

# ĐẶC TRƯNG DAO ĐỘNG CỦA TẤM FGM ĐÀN HỒI-ĐIỆN-TỬ CÓ VI BỌT RỖNG ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI KERR

Vũ Văn Thắm<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

*Nhận ngày 28/8/2024, Sửa xong 08/10/2024, Chấp nhận đăng 28/10/2024*

## Tóm tắt

Bài báo xây dựng lời giải giải tích theo lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản để phân tích dao động của tấm được chế tạo từ vật liệu FGM đàn hồi-điện-từ có vi bọt rỗng trong cấu tạo vật liệu (Po-FGMEE), tấm được đặt trên nền đàn hồi Kerr. Vật liệu Po-FGMEE được giả thiết có cơ tính biến thiên tuân theo quy luật hàm lũy thừa. Các phương trình cân bằng được thiết lập từ nguyên lý Hamilton và được giải bằng phương pháp giải tích sử dụng dạng nghiệm Navier. Độ tin cậy của mô hình và chương trình tính toán được kiểm chứng qua so sánh với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của các tham số nền đàn hồi, chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu Po-FGMEE, điện áp - từ trường bên ngoài, kiểu phân bố vi bọt rỗng, hệ số vi bọt rỗng và các kích thước hình học đến tần số dao động của tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi.

*Từ khoá:* đặc trưng dao động; tấm đàn hồi-điện-từ; vi bọt rỗng; lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản; nền đàn hồi Kerr.

## VIBRATION CHARACTERISTICS OF FUNCTIONALLY GRADED MAGNETO-ELECTRO-ELASTIC PLATES WITH POROSITIES RESTING ON KERR'S ELASTIC FOUNDATION

### Abstract

This paper develops an analytical solution for analyzing the vibrations of magneto-electro-elastic plates containing porosities, resting on a Kerr foundation, based on the simple first-order shear deformation theory. The functionally graded magneto-electro-elastic material containing porosities (Po-FGMEE) is assumed to have mechanical properties that vary according to a power-law distribution. The governing equations are derived from Hamilton's principle and solved analytically using the Navier solution method. The reliability of the model and computational program is verified through comparison with published results. Numerical investigations are conducted to evaluate the effects of Kerr foundation parameters, the volume fraction index of the Po-FGMEE material, the magnetic potential, electric voltage, porosity distribution type, porosity coefficient, and geometric dimensions on the vibration frequencies of Po-FGMEE plates resting on an elastic foundation.

*Keywords:* vibration characteristic; magneto-electro-elastic plate; porosities; simple FSDT; Kerr foundation.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19\(1V\)-12](https://doi.org/10.31814/stce.huce2025-19(1V)-12) © 2025 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Vật liệu đàn hồi-điện-từ (magneto-electro-elastic) là một loại vật liệu thông minh, có khả năng đáp ứng với các kích thích cơ, điện và từ. Các đặc tính độc đáo của loại vật liệu này bắt nguồn từ khả năng tạo ra điện tích khi chịu tác động của lực cơ học và thay đổi tính chất cơ học dưới tác động của điện và từ trường. Vật liệu đàn hồi-điện-từ (MEE) được tạo thành từ sự tích hợp giữa vật liệu áp điện và vật liệu từ tính. Kết cấu làm từ vật liệu MEE có thể điều khiển được dao động, thu năng lượng và hoạt động như các cảm biến cơ học khiến chúng trở thành loại vật liệu đầy hứa hẹn cho nhiều ngành và lĩnh vực nghiên cứu khác nhau.

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [thamvv@huce.edu.vn](mailto:thamvv@huce.edu.vn) (Thắm, V. V.)

Sự phát triển công nghệ trong lĩnh vực chế tạo vật liệu có tính năng đặc biệt đã tạo ra một loại vật liệu composite thế hệ mới là vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM). Điều này đã thúc đẩy nhiều nhà nghiên cứu phân tích các đặc tính cơ học của chúng trong các kết cấu kỹ thuật như dầm, tấm và vỏ. Nhờ vào độ bền cao và khả năng chịu nhiệt vượt trội, FGM ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực cơ khí, xây dựng, lò phản ứng hạt nhân, kỹ thuật hàng không vũ trụ, v.v. với vai trò là vật liệu của các kết cấu [1]. Để mở rộng và nâng cao hiệu quả ứng dụng của kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi-điện-từ, gần đây vật liệu MEE đã được chế tạo dưới dạng vật liệu FGM, gọi là vật liệu FGM đàn hồi-điện-từ (FGMEE). Thực tế cho thấy, khi được mô hình hóa dưới dạng vật liệu FGM, FGMEE có thể đạt được những đặc tính tối ưu nhất. Đã có nhiều nghiên cứu nhằm tìm hiểu các đặc tính và ứng xử cơ học của kết cấu làm từ vật liệu FGMEE trong những năm gần đây.

Theo tiếp cận giải tích, Liu [2] đã phân tích tĩnh tấm mỏng FGMEE dựa trên lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff. Zhen Li và cs. [3] đã phân tích dao động và bức xạ âm của FGMEE từ-điện-nhiệt-đàn hồi trong các trường đa vật lý theo lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT). Sử dụng cùng lý thuyết FSDT, Li và cs. [4] đã phân tích dao động của tấm FGMEE đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Sử dụng lý thuyết tấm bậc ba của Reddy, Shooshtari và Razavi [5] đã phân tích dao động của tấm FGMEE với các điều kiện biên khác nhau và được đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Vinyas và cs. [6–8] đã nghiên cứu các đặc tính dao động tự do của tấm FGMEE trong các trường đa vật lý theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Dao động tự do và ổn định của tấm nano FGMEE đã được nghiên cứu bởi Zur và cs. [9] theo lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Ansari và cs. [10] đã sử dụng kết hợp giữa lý thuyết tấm FSDT và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ để phân tích trạng thái mất ổn định và sau mất ổn định của tấm nano đàn hồi-nhiệt-điện-từ (METE). Ổn định nhiệt của dầm nano METE đã được phân tích bởi Ebrahimi và cs. [11] theo lý thuyết bậc ba và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ. Mohammadrezazadeh [12] đã tính toán tần số dao động tự do tuyến tính và phi tuyến của vỏ nón composite MEE nằm trên nền đàn hồi phi tuyến. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt hình sin và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, Arefi và cs. [13] đã phân tích uốn tĩnh vỏ nano hai độ cong với các lớp bề mặt FGMEE và lớp lõi là vật liệu đẳng hướng.

Một số phương pháp chế tạo vật liệu FGM bao gồm luyện kim bột, lắng đọng hơi, tự lan truyền, đúc ly tâm với hiệu suất rất cao, tuy nhiên những phương pháp này cũng có những nhược điểm riêng, chẳng hạn như kỹ thuật phức tạp và chi phí cao. Một phương pháp hiệu quả khác để sản xuất vật liệu FGM là quy trình thiêu kết. Tuy nhiên, phương pháp này gặp phải vấn đề do sự khác biệt về độ hòa rã của các thành phần vật liệu, dẫn đến sự xuất hiện của các lỗ rỗng vi mô bên trong vật liệu. Thêm vào đó, một số nghiên cứu đã chỉ ra rằng các lỗ rỗng vi mô cũng xuất hiện trong vật liệu FGM khi được chế tạo bằng kỹ thuật thâm nhập tuần tự nhiều bước. Chính các lỗ rỗng vi mô hình thành trong quá trình sản xuất này đã làm cho vật liệu FGM trở nên không hoàn hảo (Po-FGM). Dựa trên những phát hiện này, cần thiết phải xem xét ảnh hưởng của các lỗ rỗng vi mô khi thiết kế các kết cấu FGM để đảm bảo chúng an toàn và chính xác hơn. Do đó, kết cấu làm từ vật liệu Po-FGM đã thu hút được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà khoa học. Atmane và cs. [14] đã nghiên cứu ảnh hưởng của độ xốp đến ứng xử cơ học của dầm Po-FGM đặt trên nền đàn hồi. Dao động phi tuyến của dầm Timoshenko Po-FGM đã được phân tích bởi Ebrahimi và Zia [15]. Ebrahimi và cs. [16] đã nghiên cứu đáp ứng dao động nhiệt của dầm Po-FGM và kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng phần thể tích của độ xốp có ảnh hưởng đáng kể đến tần số tự nhiên của dầm. Ảnh hưởng của điện, nhiệt và kiểu phân bố vi bọt rỗng đến tần số dao động của tấm áp điện có cơ tính biến thiên với các điều kiện biên khác nhau đã được nghiên cứu bởi Barati và Zenkour [17] theo mô hình giải tích dựa trên lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến. Ebrahimi và cs. [18] đã phân tích dao động của tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi Pasternak theo lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị.

Trong thực tế, có nhiều loại kết cấu dạng dầm, tấm, vỏ được đặt trên nền đàn hồi, chẳng hạn như nền móng trên đất, phà nổi trên mặt nước, hoặc mặt đường và sàn nhà trên nền đất đá. Để đơn giản hóa việc phân tích các kết cấu này, nền đàn hồi đã được mô hình hóa theo nhiều giả thiết khác nhau. Giả thuyết về mô hình nền đàn hồi sớm nhất và đơn giản nhất là nền Winkler [19]. Mặc dù dễ tính toán nhưng mô hình Winkler không đảm bảo tính liên tục trong nền do giả thiết nền gồm các lò xo độc lập. Giả thuyết này được cải thiện bằng mô hình Pasternak [20] thông qua việc thêm một lớp chịu cắt trên lớp lò xo. Kerr [21] đã phát triển mô hình Pasternak bằng cách thêm một lớp lò xo bổ sung phía trên lớp cắt, nhằm tránh sự xuất hiện của các phản lực tập trung dọc theo các cạnh tự do của kết cấu. Shahsavari [22] đã phân tích dao động tự do của tấm Po-FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr theo lý thuyết tấm tựa đàn hồi ba chiều với hàm chuyển vị dạng hyperbol. Kumar và Harsha [23] đã sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất FSDT để phân tích tĩnh của tấm sandwich có lớp lõi Po-FGM và lớp bề mặt vật liệu áp điện đặt trên nền đàn hồi Winkler/ Pasternak/ Kerr dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-điện. Các nghiên cứu gần đây [24, 25] đã chỉ ra rằng mô hình nền Kerr đang thu hút nhiều sự quan tâm trong phân tích dao động các kết cấu dạng dầm, tấm và vỏ.

Đối với các kết cấu tấm, đặc biệt là kết cấu tấm MEE, nhiều nghiên cứu đã áp dụng lý thuyết đơn lớp tương đương (ESL) để dự đoán ứng xử cơ học của chúng. Các lý thuyết ESL phổ biến bao gồm: lý thuyết tấm cổ điển (CLPT), lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) và các lý thuyết cải tiến mở rộng. Một lý thuyết đơn giản được cải tiến từ FSDT nhằm giảm bớt khối lượng tính toán mà vẫn duy trì độ chính xác là lý thuyết FSDT đơn giản (simple FSDT) do Thai và Choi phát triển [26]. Khác với FSDT truyền thống, simple FSDT chỉ bao gồm bốn ẩn số, bằng cách tách chuyển vị ngang thành các phần uốn và cắt, giúp giảm số lượng ẩn số và làm cho lý thuyết dễ sử dụng hơn. Dựa trên đánh giá tổng quan các nghiên cứu, chưa có công trình nào phân tích đặc trưng dao động của tấm FGM đàn hồi-điện-từ có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr. Điều này cho thấy nhu cầu cần thiết cho một nghiên cứu mới nhằm giải quyết vấn đề trên. Việc phân tích dao động của tấm Po-FGMEE trên nền đàn hồi không chỉ mang ý nghĩa lý thuyết mà còn mở ra nhiều tiềm năng ứng dụng trong các kết cấu công trình, đặc biệt trong bối cảnh vật liệu này ngày càng thu hút sự quan tâm. Vì vậy, bài báo thiết lập mô hình giải tích nhằm phân tích đặc trưng dao động của tấm Po-FGMEE trên nền Kerr, sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản để hỗ trợ phát triển các ứng dụng tiềm năng của vật liệu. Kết quả so sánh với các nghiên cứu đã công bố trước đó khẳng định độ tin cậy của mô hình đề xuất. Trên cơ sở đó, bài báo tiếp tục nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số như nền đàn hồi, hệ số vi bọt rỗng, kiểu phân bố vi bọt rỗng, trường điện và từ bên ngoài áp đặt, cùng với các kích thước hình học đến tần số dao động của tấm Po-FGMEE trên nền Kerr.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Mô hình tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi Kerr

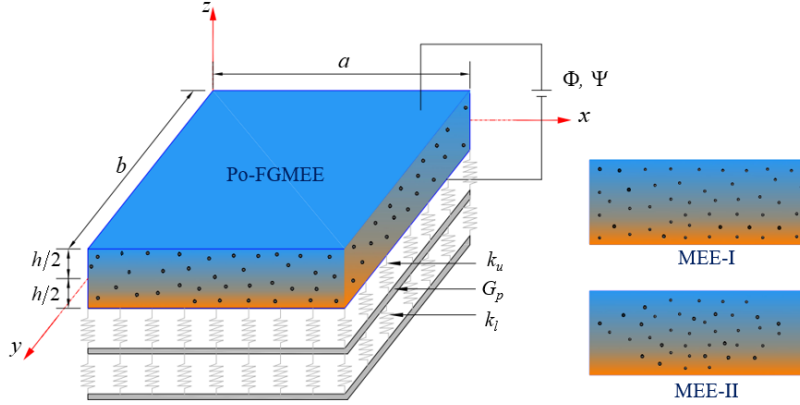
Xét tấm chữ nhật làm bằng vật liệu Po-FGMEE, được cấu thành từ hai loại vật liệu với bề mặt trên ( $z = h/2$ ) là  $\text{BaTiO}_3$  và bề mặt dưới ( $z = -h/2$ ) là  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  tiếp xúc với một điện thế  $\Phi(x, y, z)$  và từ trường  $\Psi(x, y, z)$ , đặt trên nền đàn hồi Kerr đặc trưng bởi các hệ số độ cứng uốn của nền đàn hồi trên ( $k_u$ ), hệ số độ cứng cắt ( $G_p$ ) và hệ số độ cứng uốn của nền đàn hồi dưới ( $k_l$ ) như biểu diễn trên Hình 1.

Các tính chất vật liệu hiệu dụng của tấm Po-FGMEE là các biến số theo phương chiều dày dựa trên quy luật lũy thừa [27]:

$$\Theta(z) = \Theta_l + (\Theta_u - \Theta_l) (z/h + 1/2)^p - \frac{e_0}{2} (\Theta_u + \Theta_l) \Xi \quad (1)$$

trong đó  $\Theta(z)$  là các tính chất hiệu dụng của vật liệu Po-FGMEE bao gồm: hằng số đàn hồi  $C_{ij}$ , hệ số áp điện  $e_{ij}$ , độ điện thẩm  $\kappa_{ij}$ , hệ số áp từ  $q_{ij}$ , hệ số đàn hồi-điện-từ  $d_{ij}$ , hệ số từ thẩm  $\mu_{ij}$  và khối lượng

riêng  $\rho(z)$ ;  $p$  là chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu FGME; hệ số Poisson  $\nu(z)$  của vật liệu FGME lấy gần đúng là hằng số theo chiều dày lớp;  $\Theta_u$  và  $\Theta_l$  lần lượt là các tính chất của vật liệu tại mặt trên và dưới;  $e_0$  là tỷ lệ phần trăm thể tích của các vi bột rỗng;  $\Xi$  là hàm xác định độ xốp (FGME hoàn hảo MEE-0):  $\Xi = 0$ ; FGME có vi bột rỗng phân bố đều (MEE-I) [22]:  $\Xi = 1$ ; FGME có vi bột rỗng phân bố không đều (MEE-II) [22]:  $\Xi = (1 - (2|z|/h))$ .



Hình 1. Tấm đàn hồi-điện-từ Po-FGME đặt trên nền đàn hồi Kerr

## 2.2. Các hệ thức cơ bản - Hệ phương trình chủ đạo của tấm Po-FGME

Để phân tích dao động riêng của tấm Po-FGME đặt trên nền đàn hồi Kerr, bài báo sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản (SFSDT). Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm được giả thiết như sau [26]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z\partial w_{b,x}(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z\partial w_{b,y}(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó  $u_0, v_0$  lần lượt là chuyển vị tại mặt trung bình của tấm theo các phương  $x, y$ ;  $w_b$  và  $w_s$  là các thành phần chuyển vị ngang do mômen uốn và lực cắt gây ra.

Sự phân bố điện thế và từ trường theo chiều dày tấm Po-FGME đang xét phải thỏa mãn phương trình Maxwell. Theo Wang [28], hàm điện thế, từ trường được giả định gần đúng là sự kết hợp giữa hàm lượng giác và hàm tuyến tính:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= -\cos(\pi z/h)\phi_0(x, y, t) + (2z/h)V \\ \Psi(x, y, z, t) &= -\cos(\pi z/h)\psi_0(x, y, t) + (2z/h)\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó  $V, \Omega$  lần lượt là điện áp và từ trường bên ngoài đặt vào tấm Po-FGME;  $\phi_0, \psi_0$  là điện áp và từ trường tại mặt trung bình của tấm.

Trường biến dạng  $\{\varepsilon\}$  được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} - z w_{b,xx} \\ v_{0,y} - z w_{b,yy} \\ u_{0,y} + z v_{0,x} - 2z w_{b,xy} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Theo (3), véc tơ điện trường  $\{E\} = \{E_x \ E_y \ E_z\}^T$  được xác định như sau:

$$\begin{aligned} E_x &= -\Phi_{,x} = \cos(\pi z/h) \phi_{0,x}; & E_y &= -\Phi_{,y} = \cos(\pi z/h) \phi_{0,y} \\ E_z &= -\Phi_{,z} = -(\pi/h) \sin(\pi z/h) \phi_0 - 2V/h \end{aligned} \quad (5)$$

Tương tự, véc tơ từ trường  $\{H\} = \{H_x \ H_y \ H_z\}^T$  được xác định theo:

$$\begin{aligned} H_x &= -\Psi_{,x} = \cos(\pi z/h) \psi_{0,x}; & H_y &= -\Psi_{,y} = \cos(\pi z/h) \psi_{0,y} \\ H_z &= -\Psi_{,z} = -(\pi/h) \sin(\pi z/h) \psi_0 - 2\Omega/h \end{aligned} \quad (6)$$

Phương trình chuyển động được thiết lập từ nguyên lý Hamilton mở rộng:

$$\int_0^t \delta(S + W - K)dt = 0 \quad (7)$$

ở đây  $S$  là năng lượng biến dạng,  $W$  là công do ngoại lực thực hiện và  $K$  là động năng. Biến phân của năng lượng biến dạng có thể được viết là:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ &= \int_V \left( \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} \right. \\ &\quad \left. - D_x \delta E_x - D_y \delta E_y - D_z \delta E_z - B_x \delta H_x - B_y \delta H_y - B_z \delta H_z \right) dV \end{aligned} \quad (8)$$

Thay thế các phương trình (4) vào phương trình (8) ta được:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_A \left( N_x \delta u_{0,x} - M_x \delta w_{b,xx} + N_y \delta v_{0,y} - M_y \delta w_{b,yy} \right. \\ &\quad \left. + N_{xy} (\delta u_{0,y} + \delta v_{0,x}) - 2M_{xy} \delta w_{b,xy} + Q_{xz} \delta w_{s,x} + Q_{yz} \delta w_{s,y} \right) dx dy \\ &\quad + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left( -D_x \cos(\pi z/h) \delta \phi_{0,x} - D_y \cos(\pi z/h) \delta \phi_{0,y} \right. \\ &\quad \left. + D_z \pi/h \sin(\pi z/h) \delta \phi_0 - B_x \cos(\pi z/h) \delta \psi_{0,x} \right. \\ &\quad \left. - B_y \cos(\pi z/h) \delta \psi_{0,y} + B_z \pi/h \sin(\pi z/h) \delta \psi_0 \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó các thành phần nội lực và mômen  $N, M, Q$  được xác định theo:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{-h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{-h/2} (z\sigma_x, z\sigma_y, z\sigma_{xy}) dz \\ (Q_{xz}, Q_{yz}) &= \int_{-h/2}^{-h/2} k_s (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz. \end{aligned} \quad (10)$$

với  $k_s$  là hệ số hiệu chỉnh cắt, trong nghiên cứu này lấy  $k_s=5/6$ . Biến phân của công được thực hiện bởi các lực tác dụng lên tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi Kerr có thể được viết dưới dạng [29]:

$$\delta W = \int_A \left( N_x^0(w_b + w_s)_{,x} \delta(w_b + w_s)_x \right. \\ \left. + N_y^0(w_b + w_s)_{,y} \delta(w_b + w_s)_y \right. \\ \left. + 2\delta N_{xy}^0(w_b + w_s)_x (w_b + w_s)_y - K_1 \delta(w_b + w_s) \right. \\ \left. + K_2 (\delta(w_b + w_s)_{xx} + \delta(w_b + w_s)_{yy}) \right) dx dy \quad (11)$$

trong đó  $N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$  là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng.  $K_1, K_2$  là các thông số nền và được xác định theo mô hình nền [30] (nền đàn hồi Pasternak:  $K_1 = k_w, K_2 = G_p$ ; nền đàn hồi Kerr:  $K_1 = k_l k_u / (k_l + k_u), K_2 = G_p k_u / (k_l + k_u)$ ).

Trong nghiên cứu này, giả định rằng tấm Po-FGMEE chịu tác động của điện áp ngoài  $V$ , từ trường ngoài  $\Omega$  và bỏ qua tải trọng cắt. Do đó,  $N_{xy}^0 = 0$  và  $N_x^0, N_y^0$  là các tải trọng tác dụng trong mặt phẳng do điện áp ngoài  $V$  và từ trường ngoài  $\Omega$  gây ra, được định nghĩa như sau [18]:

$$N_x^0 = N_y^0 = N^E + N^H; \quad N^E = - \int_{-h/2}^{h/2} \bar{e}_{31} \frac{2V}{h} dz; \quad N^H = - \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}_{31} \frac{2\Omega}{h} dz \quad (12)$$

Biến phân của động năng của tấm được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho(z) (\dot{u}\delta u + \dot{v}\delta v + \dot{w}\delta w) dAdz \\ &= \int_A \left( \begin{aligned} &I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)) \\ &- I_1 (\dot{u}_0 \delta \dot{w}_{b,x} + \dot{w}_{b,x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{w}_{b,y} + \dot{w}_{b,y} \delta \dot{v}_0) \\ &+ I_2 (\dot{w}_{b,x} \delta \dot{w}_{b,x} + \dot{w}_{b,y} \delta \dot{w}_{b,y}) \end{aligned} \right) dA \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó  $(I_0, I_1, I_2)$  là các mô men quán tính khối lượng được xác định bởi:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad \text{với } \rho(z) \text{ là khối lượng riêng} \quad (14)$$

Thay thế các biểu thức  $\delta S, \delta W$  và  $\delta K$  từ các phương trình (9), (11) và (13) vào phương trình (7) và tích hợp từng phần, đồng nhất các hệ số  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta \phi_0$  và  $\delta \psi_0$  ta được các phương trình chuyển động sau:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \ddot{w}_{b,x} \\ \delta v_0 : N_{y,y} + N_{xy,x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \ddot{w}_{b,y} \\ \delta w_b : M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} - (N^E + N^H - K_2) \nabla^2 (w_b + w_s) \\ &\quad - K_1 (w_b + w_s) = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 (\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \\ \delta w_s : Q_{x,x} + Q_{y,y} - (N^E + N^H - K_2) \nabla^2 (w_b + w_s) - K_1 (w_b + w_s) &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ \delta \phi_0 : \int_{-h/2}^{h/2} (D_{x,x} \cos(\pi z/h) + D_{y,y} \cos(\pi z/h) + D_z \pi/h \sin(\pi z/h)) dz &= 0 \\ \delta \psi_0 : \int_{-h/2}^{h/2} (B_{x,x} \cos(\pi z/h) + B_{y,y} \cos(\pi z/h) + B_z \pi/h \sin(\pi z/h)) dz &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Đối với tấm Po-FGMEE tuyến tính tiếp xúc với tải cơ điện từ, các liên hệ ứng suất–biến dạng được định nghĩa bởi:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{q}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{q}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{q}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\kappa}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\kappa}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{q}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_{15} \\ \bar{q}_{31} & \bar{q}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mu}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \quad (18)$$

trong đó các hằng số rút gọn của tấm Po-FGMEE ở trạng thái ứng suất phẳng được tính theo [18]:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad \bar{C}_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}; \quad \bar{C}_{66} = C_{66}; \quad \bar{e}_{15} = e_{15}; \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{e_{33}C_{13}}{C_{33}} \\ \bar{q}_{15} &= q_{15}; \quad \bar{q}_{31} = q_{31} - \frac{q_{33}C_{13}}{C_{33}}; \quad \bar{d}_{11} = d_{11}; \quad \bar{d}_{33} = d_{33} + \frac{q_{33}e_{33}}{C_{33}}; \quad \bar{\kappa}_{11} = \kappa_{11} \\ \bar{\kappa}_{33} &= \kappa_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}}; \quad \bar{\mu}_{11} = \mu_{11}; \quad \bar{\mu}_{33} = \mu_{33} + \frac{q_{33}^2}{C_{33}} \end{aligned} \quad (19)$$

Tích phân các biểu thức từ (16) ÷ (18) theo chiều dày tấm ta được các biểu thức lực màng  $N_{ij}$  và mô men uốn  $M_{ij}$ .

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{31}^e \\ A_{31}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_0 + \begin{Bmatrix} A_{31}^m \\ A_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{b,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_{31}^e \\ E_{31}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \phi_0 + \begin{Bmatrix} E_{31}^m \\ E_{31}^m \\ 0 \end{Bmatrix} \psi_0 \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} - A_{15}^e \begin{Bmatrix} \phi_{0,x} \\ \phi_{0,y} \end{Bmatrix} - A_{15}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= E_{15}^e \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^e \begin{Bmatrix} \phi_{0,x} \\ \phi_{0,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\ \int_{-h/2}^{h/2} D_z \left(\frac{\pi}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= A_{31}^e (u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^e \nabla^2 w_b - F_{31}^e \nabla^2 w_s - F_{33}^e \phi_0 - F_{33}^m \psi_0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= E_{15}^m \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} + F_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} + X_{11}^m \begin{Bmatrix} \psi_{0,x} \\ \psi_{0,y} \end{Bmatrix} \\ \int_{-h/2}^{h/2} B_z \left(\frac{\pi}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= A_{31}^m (u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^m \nabla^2 w_b - F_{31}^m \nabla^2 w_s - F_{33}^m \phi_0 - X_{33}^m \psi_0 \end{aligned} \quad (20)$$

trong đó  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^e, E_{ij}^e, F_{ij}^e$  là các hệ số độ cứng được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (ij = 11, 12, 66) \\
 A_{44} = A_{55} &= k_s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{55} dz; \quad \{A_{31}^e, E_{31}^e\} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{e}_{31} \pi/h \sin(\pi z/h) \{1, z\} dz \\
 \{A_{31}^m, E_{31}^m\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}_{31} \pi/h \sin(\pi z/h) \{1, z\} dz; \quad A_{15}^e = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{e}_{15} \cos(\pi z/h) dz \\
 A_{15}^m &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}_{15} \cos(\pi z/h) dz \\
 \{F_{11}^e, F_{33}^e\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{k}_{11} \cos^2(\pi z/h), \bar{k}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi z/h)\} dz \\
 \{F_{11}^m, F_{33}^m\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{d}_{11} \cos^2(\pi z/h), \bar{d}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi z/h)\} dz \\
 \{X_{11}^m, X_{33}^m\} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\mu}_{11} \cos^2(\pi z/h), \bar{\mu}_{33} (\pi/h)^2 \sin^2(\pi z/h)\} dz
 \end{aligned} \tag{21}$$

Thay thế các biểu thức trong các phương trình (20), (21) vào (15) ta thu được các phương trình chuyển động biểu diễn theo chuyển vị của tấm Po-FGMEE:

$$\begin{aligned}
 &A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} - B_{11}w_{b,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,xyy} \\
 &\quad + A_{31}^e\phi_{0,x} + A_{31}^m\psi_{0,x} - I_0\ddot{u}_0 + I_1\ddot{w}_{b,x} = 0 \\
 &A_{66}v_{0,xx} + A_{22}v_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} - B_{22}w_{b,yyy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{b,xyy} \\
 &\quad + A_{31}^e\phi_{0,y} + A_{31}^m\psi_{0,y} - I_0\ddot{v}_0 + I_1\ddot{w}_{b,y} = 0 \\
 &B_{11}u_{0,xxx} + (B_{12} + 2B_{66})u_{0,xyy} + (B_{12} + 2B_{66})v_{0,xyx} + B_{22}v_{0,yyy} \\
 &\quad - D_{11}w_{b,xxxx} + E_{31}^e\nabla^2\phi_0 - 2(D_{12} + 2D_{66})w_{b,xyy} - D_{22}w_{b,yyy} \\
 &\quad + E_{31}^m\nabla^2\psi_0 - (N^E + N^H - K_2)\nabla^2(w_b + w_s) \\
 &\quad - K_1(w_b + w_s) - I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1(\ddot{u}_{0,x} + \ddot{v}_{0,y}) + I_2\nabla^2\ddot{w}_b = 0 \\
 &A_{55}w_{s,xx} + A_{44}w_{s,yy} + F_{31}^e\nabla^2\phi_0 + F_{31}^m\nabla^2\psi_0 - (N^E + N^H - K_2)\nabla^2(w_b + w_s) \\
 &\quad - K_1(w_b + w_s) + A_{15}^e\nabla^2\phi_0 + A_{15}^m\nabla^2\psi_0 - I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) = 0 \\
 &A_{31}^e(u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^e\nabla^2w_b - F_{31}^e\nabla^2w_s + E_{15}^e\nabla^2w_s + F_{11}^e\nabla^2\phi_0 + F_{11}^m\nabla^2\psi_0 \\
 &\quad - F_{33}^e\phi_0 - F_{33}^m\psi_0 = 0 \\
 &A_{31}^m(u_{0,x} + v_{0,y}) - E_{31}^m\nabla^2w_b - F_{31}^m\nabla^2w_s + E_{15}^m\nabla^2w_s + F_{11}^m\nabla^2\phi_0 + X_{11}^m\nabla^2\psi_0 \\
 &\quad - F_{33}^m\phi_0 - X_{33}^m\psi_0 = 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

### 2.3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tấm Po-FGMEE chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến (SSSS), điều kiện biên thể hiện dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
 v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = \phi_0 = \psi_0 = 0, \quad \text{tại } x = 0, a \\
 u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = \phi_0 = \psi_0 = 0, \quad \text{tại } y = 0, b
 \end{aligned} \tag{23}$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (23):

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y; & v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; & w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\
 \phi_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; & \psi_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y
 \end{aligned} \quad (24)$$

trong đó:  $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ ,  $\omega$  là tần số dao động riêng (rad/s) và các hệ số cần xác định là  $\{X\} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}, \phi_{mn}, \psi_{mn}\}^T$ .

Thay (24) vào (22) và sau đó thực hiện các phép biến đổi toán học, thu được phương trình sau:

$$\{[K]_{6 \times 6} - \omega^2 [M]_{6 \times 6}\} \{X\} = \{0\} \quad (25)$$

trong đó các hệ số  $k_{ij}$  và  $m_{ij}$  của ma trận độ cứng kết cấu  $[K]_{6 \times 6}$  và ma trận khối lượng  $[M]_{6 \times 6}$  được trình bày trong Phụ lục. Tần số dao động của tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi được xác định bằng cách giải phương trình trị riêng  $|[K]_{6 \times 6} - \omega^2 [M]_{6 \times 6}| = 0$ . Nghiệm của phương trình này là tần số góc dao động  $\omega_{mn}$  ứng với dạng dao động  $(m, n)$ . Tần số dao động riêng cơ bản được xác định bởi:  $\omega = \min \{\omega_{mn}\}$ .

### 3. Kết quả số và thảo luận

#### 3.1. Ví dụ kiểm chứng

Bảng 1 trình bày kết quả tính và so sánh tần số dao động cơ bản của tấm Po-FGMEE với kết quả của Ebrahimi và cs. [18] sử dụng mô hình giải tích trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị. Điện áp  $V$  và từ trường bên ngoài áp đặt  $\Omega$  được xem xét là các đại lượng không thứ nguyên. Các thông số vật liệu  $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$  được lấy theo [18]. Vật liệu  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ :  $C_{11} = C_{22} = 286$  (Gpa),  $C_{33} = 269,5$  (Gpa),  $C_{13} = C_{23} = 170,5$  (Gpa),  $C_{12} = 173$  (Gpa),  $C_{55} = 45,3$  (Gpa),  $C_{66} = 56,3$  (Gpa),  $e_{31} = 0$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $e_{33} = 0$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $e_{15} = 0$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $q_{31} = 580,3$  (N/Am),  $q_{33} = 699,7$  (N/Am),  $q_{15} = 550$  (N/Am),  $\kappa_{11} = 0,08$  ( $10^{-9} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$ ),  $\kappa_{33} = 0,093$  ( $10^{-9} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$ ),  $\mu_{11} = -590$  ( $10^{-6} \text{Ns}^2 \text{C}^{-2}/2$ ),  $\mu_{33} = 157$  ( $10^{-6} \text{Ns}^2 \text{C}^{-2}/2$ ),  $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 0$ ,  $\rho = 7300$  ( $\text{kgm}^{-3}$ ); vật liệu  $\text{BaTiO}_3$ :  $C_{11} = C_{22} = 166$  (Gpa),  $C_{33} = 162$  (Gpa),  $C_{13} = C_{23} = 78$  (Gpa),  $C_{12} = 77$  (Gpa),  $C_{55} = 43$  (Gpa),  $C_{66} = 44,5$  (Gpa),  $e_{31} = -4,4$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $e_{33} = 18,6$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $e_{15} = 11,6$  ( $\text{cm}^{-2}$ ),  $q_{31} = 0$  (N/Am),  $q_{33} = 0$  (N/Am),  $q_{15} = 0$  (N/Am),  $\kappa_{11} = 11,2$  ( $10^{-9} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$ ),  $\kappa_{33} = 12,6$  ( $10^{-9} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \text{N}^{-1}$ ),  $\mu_{11} = 5$  ( $10^{-6} \text{Ns}^2 \text{C}^{-2}/2$ ),  $\mu_{33} = 10$  ( $10^{-6} \text{Ns}^2 \text{C}^{-2}/2$ ),  $d_{11} = d_{22} = d_{33} = 0$ ,  $\rho = 5800$  ( $\text{kgm}^{-3}$ ).

Các tham số nền không thứ nguyên được tính theo công thức [18]:

$$\begin{aligned}
 K_{\Lambda} &= k_{\Lambda} a^4 / (h^3 C_{11c}) \quad \text{với} \quad (\Lambda = w, u, s, l); & K_p &= G_p a^4 / (h^3 C_{11c}) \\
 \bar{\omega} &= \omega a^2 / h \sqrt{\rho_{\text{CoFe}_2\text{O}_3} / C_{11 \text{CoFe}_2\text{O}_3}}
 \end{aligned} \quad (26)$$

Kết quả so sánh trong Bảng 1 cho thấy sự khác biệt giữa kết quả bài báo và tài liệu [18] là nhỏ, điều này khẳng định độ tin cậy của mô hình và chương trình tính toán tần số dao động của tấm Po-FGMEE trên nền đàn hồi.

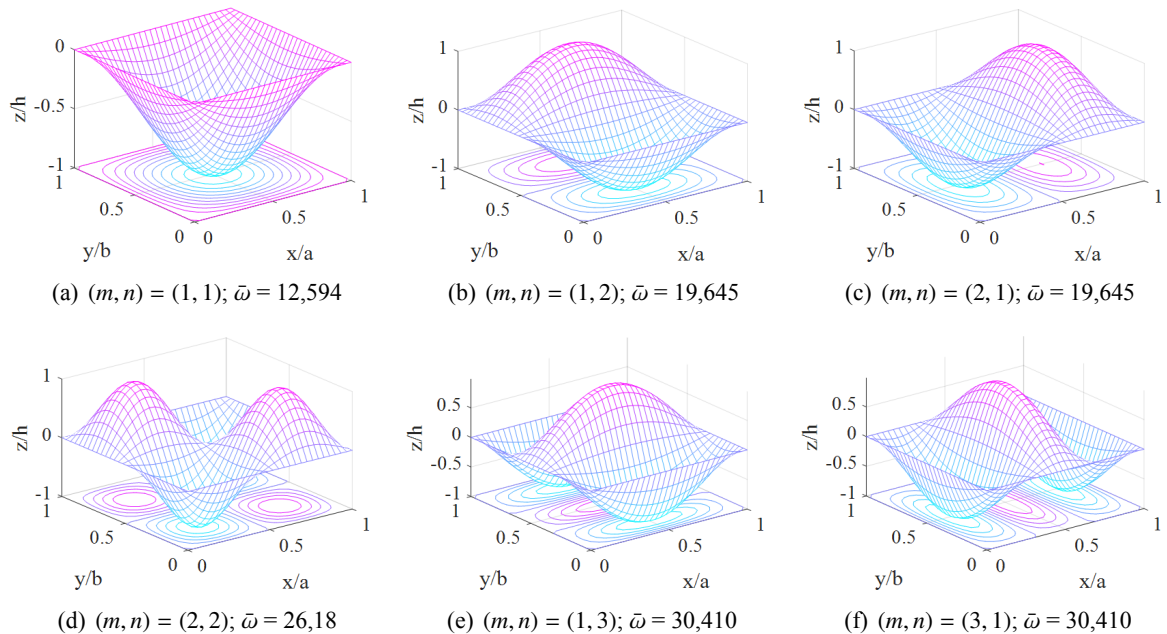
Trong các mục tiếp theo, tần số dao động của các tấm Po-FGMEE hình chữ nhật có kích thước  $a \times b \times h$ , đặt trên nền đàn hồi Kerr được nghiên cứu và thảo luận chi tiết. Các đặc tính của vật liệu Po-FGMEE ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$ ) và các công thức không thứ nguyên  $K_{\Lambda}, \bar{\omega}$  được lấy theo được lấy theo công thức (26).

Bảng 1. So sánh tần số dao động cơ bản đầu tiên không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm Po-FGMEE ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$ ) đặt trên nền Pasternak ( $a = b = 100h$ ;  $e_0 = 0,2$ )

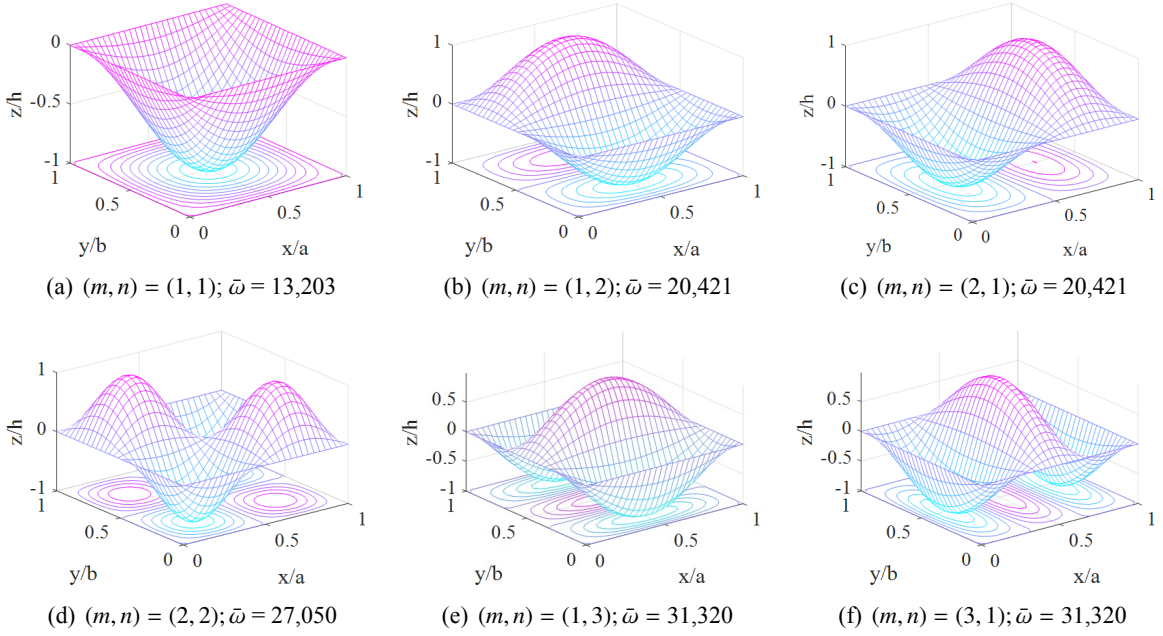
| Lý thuyết tính                        | MEE-I     |         |         | MEE-II    |         |         |
|---------------------------------------|-----------|---------|---------|-----------|---------|---------|
|                                       | $p = 0,2$ | $p = 1$ | $p = 5$ | $p = 0,2$ | $p = 1$ | $p = 5$ |
| $V = 0; \Omega = 500; K_w = K_p = 0$  |           |         |         |           |         |         |
| HSDT-4 [18]                           | 5,33491   | 4,72550 | 3,86939 | 5,38498   | 4,85984 | 4,23871 |
| Bài báo                               | 5,31167   | 4,64219 | 3,86348 | 5,34742   | 4,76826 | 4,11050 |
| $V = 0; \Omega = -500; K_w = K_p = 0$ |           |         |         |           |         |         |
| HSDT-4 [18]                           | 3,27061   | 3,46440 | 3,86939 | 3,43608   | 3,59537 | 3,93172 |
| Bài báo                               | 3,23256   | 3,34986 | 3,74004 | 3,37691   | 3,47099 | 3,79315 |
| $V = 500; \Omega = 0; K_w = K_p = 10$ |           |         |         |           |         |         |
| HSDT-4 [18]                           | 16,6333   | 16,2548 | 15,9136 | 15,7441   | 15,4211 | 15,1288 |
| Bài báo                               | 16,6259   | 16,2308 | 15,8826 | 15,7313   | 15,3926 | 15,0933 |

### 3.2. Các dạng dao động của tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi Kerr

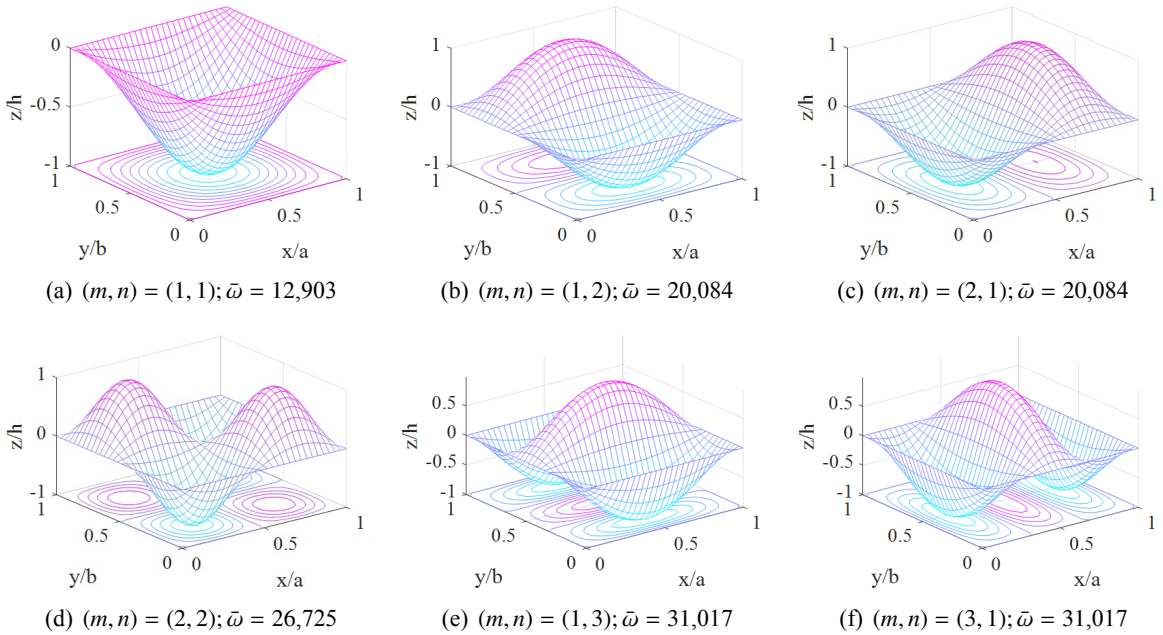
Xét ba loại tấm FGMEE (hoàn hảo, MEE-I, MEE-II) đặt trên nền đàn hồi Kerr dưới tác dụng của điện trường  $V$  và từ trường  $\Omega$ . Kết quả sáu dạng dao động đầu tiên, cùng với các giá trị tần số không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của các tấm FGMEE được thể hiện trong Bảng 2 và các Hình 2, Hình 3, Hình 4. Có thể thấy với cả ba loại tấm FGMEE xem xét đều có kết quả là các dạng dao động số 2 và 3, số 5 và 6 từng đôi một giống nhau về hình dạng, dẫn đến các cặp này có giá trị tần số dao động  $\bar{\omega}$  bằng nhau.



Hình 2. Dạng dao động của tấm FGMEE hoàn hảo đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $e_0 = 0$ ;  $p = 1$ ;  $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )



Hình 3. Dạng dao động của tấm MEE-I đặt trên nền đàn hồi Kerr  
( $e_0 = 0,1$ ;  $p = 1$ ,  $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )



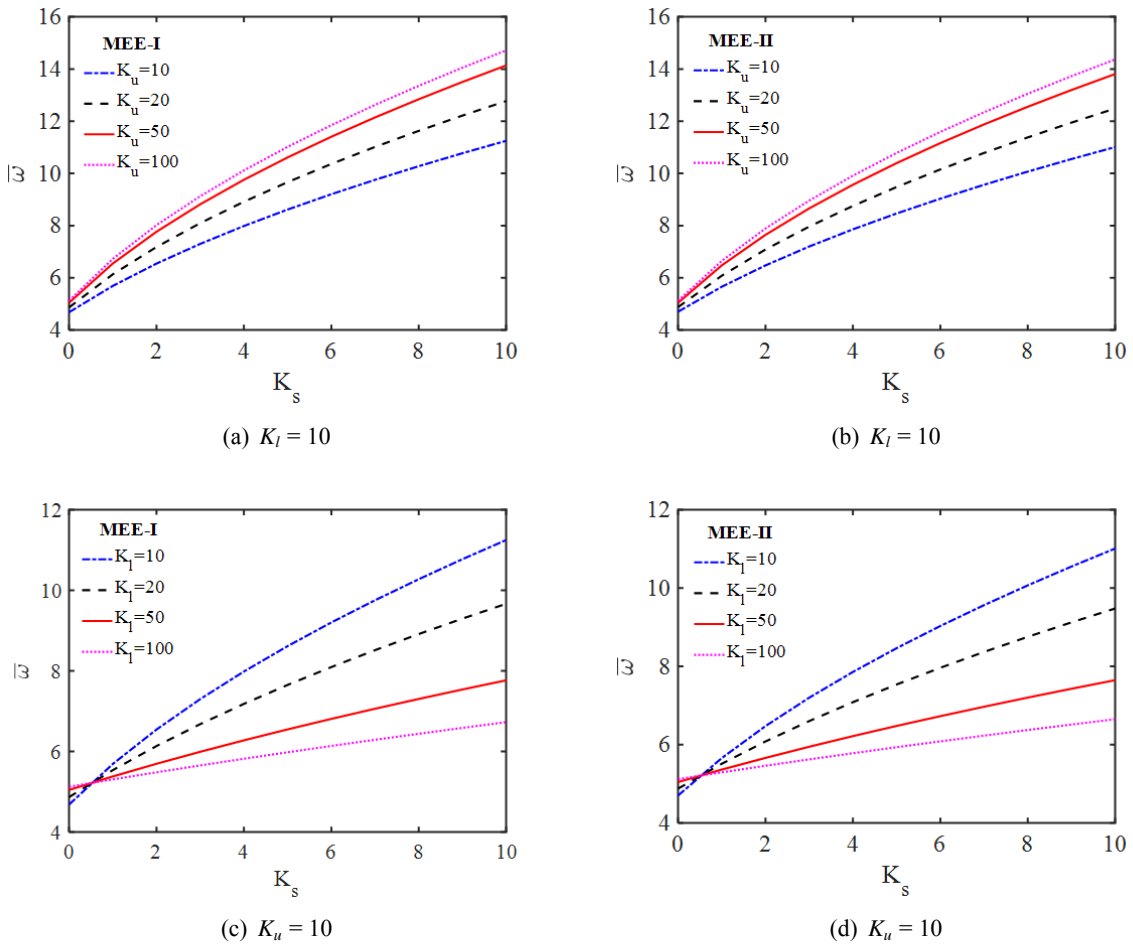
Hình 4. Dạng dao động của tấm MEE-II đặt trên nền đàn hồi Kerr  
( $e_0 = 0,1$ ;  $p = 1$ ,  $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )

Bảng 2. Sáu tần số dao động đầu tiên  $\bar{\omega}$  của tấm MEE ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4/\text{BaTiO}_3$ ) đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )

| Dạng dao động | MEE hoàn hảo ( $e_0 = 0$ ) |         |         | MEE-I ( $e_0 = 0,1$ ) |         |         | MEE-II ( $e_0 = 0,1$ ) |         |         |
|---------------|----------------------------|---------|---------|-----------------------|---------|---------|------------------------|---------|---------|
|               | $p = 0,2$                  | $p = 1$ | $p = 5$ | $p = 0,2$             | $p = 1$ | $p = 5$ | $p = 0,2$              | $p = 1$ | $p = 5$ |
| 1             | 12,863                     | 12,594  | 12,358  | 13,510                | 13,203  | 12,934  | 13,190                 | 12,903  | 12,652  |
| 2             | 20,231                     | 19,645  | 19,172  | 21,078                | 20,421  | 19,892  | 20,703                 | 20,084  | 19,584  |
| 3             | 20,231                     | 19,645  | 19,172  | 21,078                | 20,421  | 19,892  | 20,703                 | 20,084  | 19,584  |
| 4             | 27,117                     | 26,182  | 25,455  | 28,093                | 27,050  | 26,241  | 27,710                 | 26,725  | 25,960  |
| 5             | 31,586                     | 30,410  | 29,509  | 32,630                | 31,320  | 30,319  | 32,253                 | 31,017  | 30,069  |
| 6             | 31,586                     | 30,410  | 29,509  | 32,630                | 31,320  | 30,319  | 32,253                 | 31,017  | 30,069  |

### 3.3. Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền đàn hồi Kerr

Ảnh hưởng của các hệ số độ cứng nền đàn hồi Kerr ( $K_u$ ,  $K_l$ ,  $K_s$ ) đến tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên  $\bar{\omega}$  của tấm Po-FGMEE được thể hiện trong Hình 5. Kết quả cho thấy khi hệ số độ cứng của

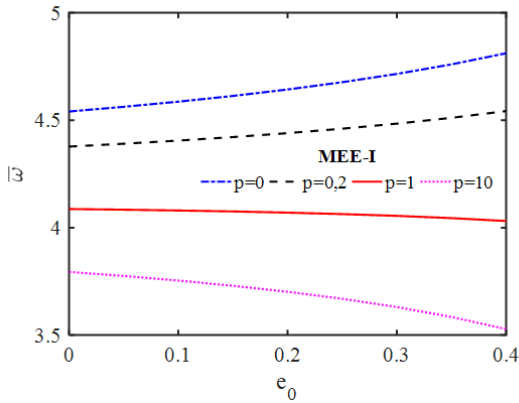


Hình 5. Ảnh hưởng của các tham số độ cứng nền:  $K_u$ ,  $K_l$ ,  $K_s$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm Po-FGMEE đặt trên nền Kerr ( $e_0 = 0,1$ ;  $p = 1$ ;  $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ )

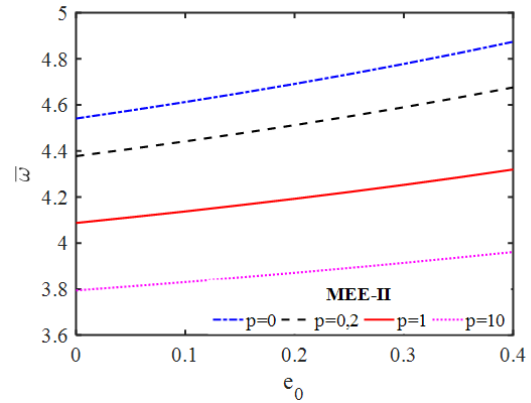
lớp cắt ( $K_s$ ) và lớp đàn hồi phía trên ( $K_u$ ) tăng thì tần số  $\bar{\omega}$  cũng tăng, chứng tỏ các lớp này có tác dụng tăng cường độ của tấm (Hình 5(a)÷(b)). Khi xem xét ảnh hưởng của độ cứng lớp đàn hồi phía dưới ( $K_l$ ) qua Hình 5(c)÷(d), ban đầu khi giá trị của  $K_l$  tăng  $\bar{\omega}$  cũng tăng, nhưng sau đó  $\bar{\omega}$  giảm xuống khi tiếp tục tăng  $K_l$ .

### 3.4. Ảnh hưởng của hệ số vi bọt rỗng

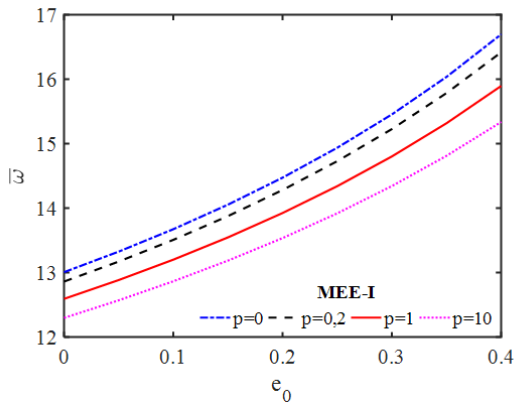
Hình 6 minh họa ảnh hưởng của hệ số vi bọt rỗng  $e_0$  khi chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  thay đổi đến tần số dao động riêng cơ bản đầu tiên  $\bar{\omega}$  của tấm Po-FGMEE được đặt hoặc không đặt trên nền đàn hồi Kerr. Có thể thấy rằng tần số dao động riêng của tấm MEE-I phụ thuộc vào giá trị của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$ . Cụ thể, khi  $e_0$  tăng, tần số riêng đầu tiên  $\bar{\omega}$  tăng lên với các giá trị của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p = 0$  và  $p = 0,2$  (Hình 6(a)). Ngược lại, tần số  $\bar{\omega}$  giảm khi  $e_0$  tăng với các giá trị  $p = 1$  và  $p = 10$ . Đối với tấm MEE-II không đặt trên nền đàn hồi và cả hai loại tấm MEE-I, MEE-II khi được đặt trên nền đàn hồi, tần số đều tăng khi  $e_0$  tăng với mọi giá trị của  $p$ . Do đó, có thể kết luận rằng ứng xử của tấm Po-FGMEE bị ảnh hưởng bởi giá trị  $e_0$  và kiểu phân bố lỗ rỗng (Hình 6(b), (c), (d)). Ngoài ra, nền đàn hồi đóng vai trò quan trọng trong ứng xử dao động của tấm, góp phần làm tăng đáng kể tần số không thứ nguyên của tấm Po-FGMEE.



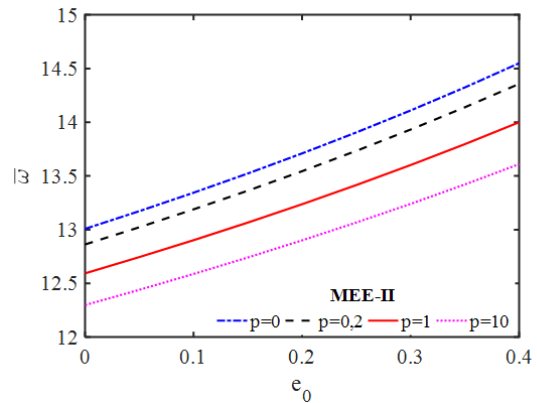
(a) MEE-I;  $K_u = K_l = K_s = 0$



(b) MEE-II;  $K_u = K_l = K_s = 0$



(c) MEE-I;  $K_s = 10; K_u = K_l = 100$

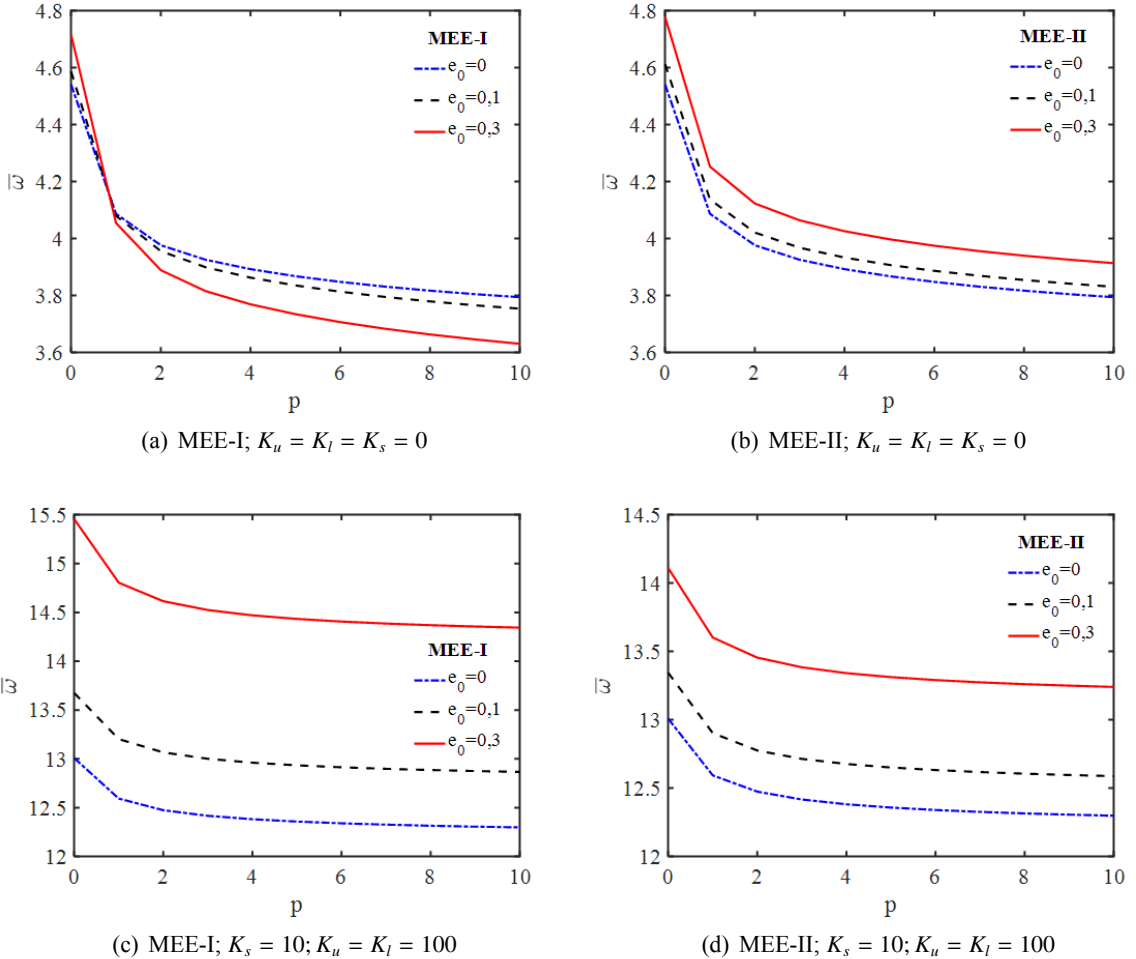


(d) MEE-II;  $K_s = 10; K_u = K_l = 100$

Hình 6. Ảnh hưởng của hệ số vi bọt rỗng  $e_0$  khi  $p$  thay đổi đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm FGME không đặt/đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ )

### 3.5. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

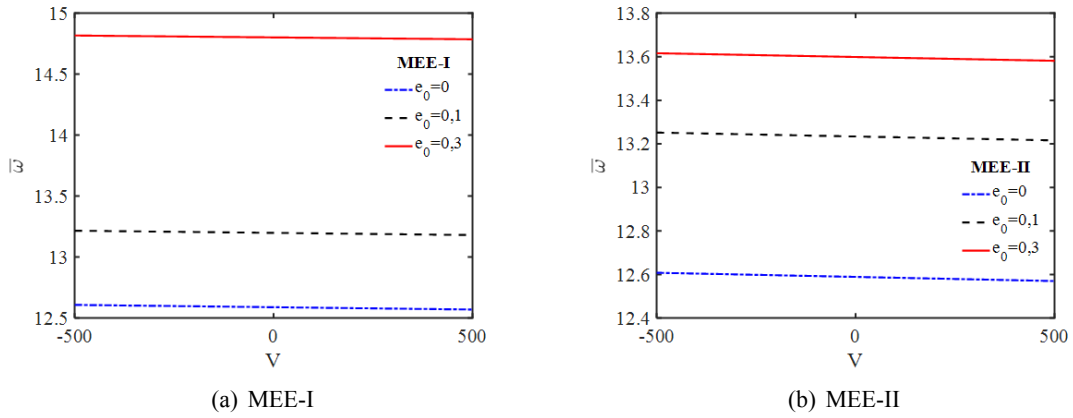
Đồ thị trên Hình 7 cho thấy, việc tăng chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  dẫn đến tần số không thứ nguyên của tấm Po-FGMEE giảm với cả hai kiểu phân bố lỗ rỗng. Trên thực tế, khi  $p = 0$ , tấm được làm hoàn toàn từ  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  và có tần số lớn nhất. Việc tăng  $p$  từ 0 đến 10 sẽ thay đổi vật liệu của tấm MEE từ tấm hoàn toàn  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  thành tấm có sự kết hợp của  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  và  $\text{BaTiO}_3$ . Do đó, việc tăng phần trăm kim loại, vốn có mô đun đàn hồi thấp hơn so với gốm, sẽ làm giảm độ cứng của tấm.



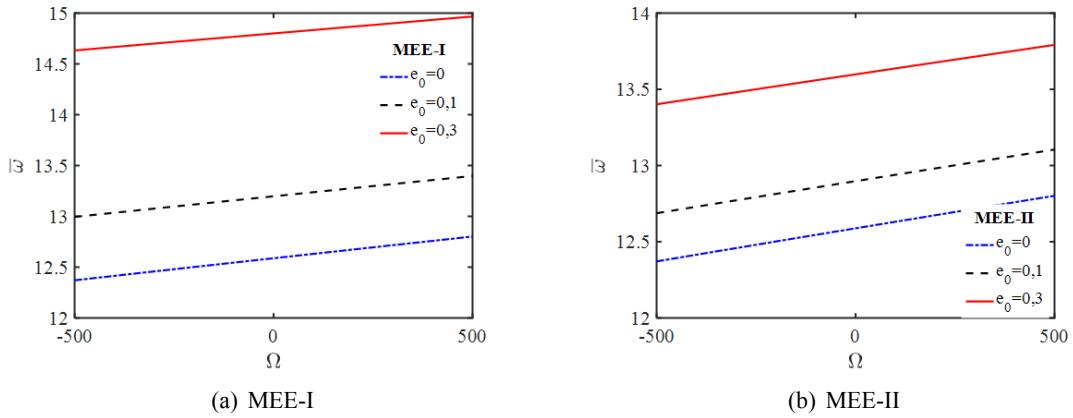
Hình 7. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  khi  $e_0$  thay đổi đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm MEE không đặt/đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $a = b = 50h$ ;  $V = 300$ ;  $\Omega = 200$ )

### 3.6. Ảnh hưởng của điện áp và từ trường ngoài áp đặt

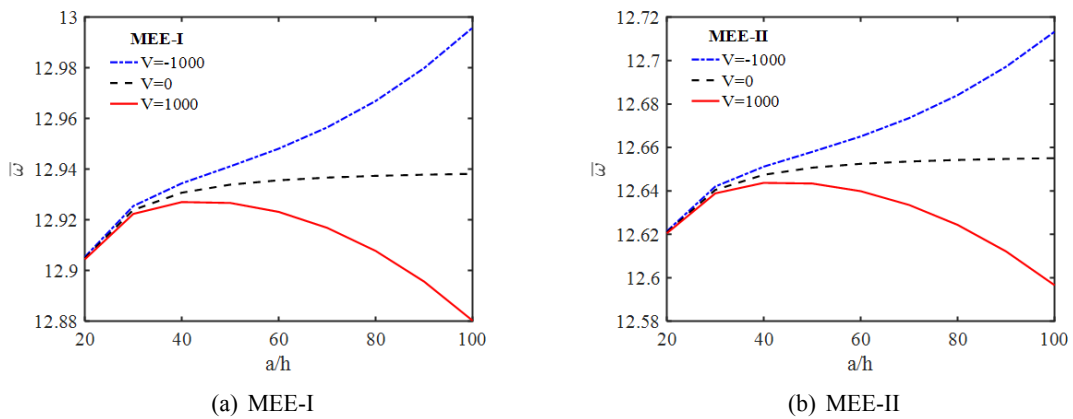
Ảnh hưởng của điện áp bên ngoài  $V$  và từ trường  $\Omega$  đến tần số dao động riêng  $\bar{\omega}$  của tấm được mô tả trong Hình 8 và Hình 9. Kết quả chỉ ra rằng với cả hai kiểu phân bố vi bột rỗng, việc tăng  $V$  là nguyên nhân làm giảm tần số riêng và khi tăng  $\Omega$  sẽ làm tăng tần số riêng  $\bar{\omega}$ . Vì vậy, độ lớn và dấu của trường điện và từ bên ngoài có vai trò quan trọng đối với ứng xử động của tấm Po-FGMEE đặt trên nền đàn hồi Kerr.



Hình 8. Ảnh hưởng của điện áp ngoài  $V$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm MEE đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $a = b = 100h$ ;  $p = 1$ ;  $\Omega = 0$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )



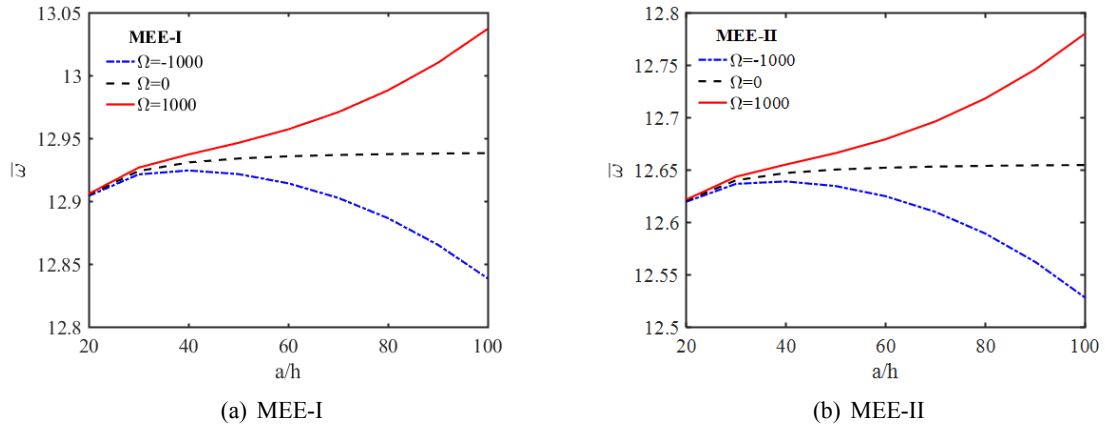
Hình 9. Ảnh hưởng của từ trường ngoài áp đặt  $\Omega$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm MEE đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $a = b = 100h$ ;  $p = 1$ ;  $V = 0$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )



Hình 10. Ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  và  $V$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm MEE đặt trên nền đàn hồi Kerr khi  $V$  thay đổi ( $e_0 = 0,1$ ;  $p = 5$ ;  $\Omega = 0$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )

### 3.7. Ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước tấm $a/h$

Ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  đến tần số không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm FGMEE đặt trên nền đàn hồi Kerr khi dấu của điện áp và thế từ bên ngoài thay đổi được thể hiện trên Hình 10 và Hình 11. Có thể thấy rằng tần số  $\bar{\omega}$  phụ thuộc vào tỷ lệ  $a/h$  và khi có điện áp âm tác dụng dẫn đến tần số  $\bar{\omega}$  cao hơn, nhưng thế từ âm tác dụng dẫn đến tần số thấp hơn. Ngoài ra, sự khác biệt giữa các kết quả tần số đối với các giá trị âm và dương của điện áp và từ trường bên ngoài trở nên rõ rệt hơn khi tỷ số  $a/h$  tăng.



Hình 11. Ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  đến tần số  $\bar{\omega}$  của tấm MEE đặt trên nền đàn hồi Kerr khi  $\bar{\omega}$  thay đổi ( $e_0 = 0, 1$ ;  $p = 5$ ;  $\Omega = 0$ ;  $K_s = 10$ ;  $K_u = K_l = 100$ )

## 4. Kết luận

Bài báo này trình bày đặc trưng dao động của tấm FGM đàn hồi-điện-từ chứa vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr, theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. Hai loại phân bố vi bọt rỗng, cụ thể là đều và không đều được xem xét. Các tính chất cơ học của tấm Po-FGMEE được giả thiết có cơ tính biến thiên tuân theo quy luật hàm lũy thừa. Kết quả khảo sát số cho thấy:

- Tăng giá trị chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  làm giảm tần số riêng của tấm Po-FGMEE trên nền đàn hồi Kerr với mọi giá trị của  $e_0$ .
- Khi hệ số độ cứng nền đàn hồi thay đổi, tần số riêng của tấm Po-FGMEE cũng thay đổi. Hệ số độ cứng cao hơn sẽ dẫn đến giá trị tần số cao hơn.
- Đối với tấm MEE-I không có nền đàn hồi, việc tăng  $e_0$  làm tăng tần số cơ bản khi  $p$  nhỏ và sau đó xu hướng này ngược lại với các giá trị  $p > 1$ . Khi đặt trên nền đàn hồi Kerr, việc tăng  $e_0$  luôn làm tăng tần số cơ bản của tấm MEE-I.
- Đối với tấm MEE-II, tần số cơ bản tăng khi  $e_0$  tăng, cả khi có và không có nền đàn hồi. Tăng từ trường áp đặt làm tăng tần số riêng của tấm Po-FGMEE, trong khi điện áp bên ngoài có tác động ngược lại.
- Khi tỷ số  $a/h$  tăng, điện áp âm tác dụng làm tăng tần số, từ trường âm tác dụng làm giảm tần số.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Mortensen, A., Suresh, S. (1995). [Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1 Processing](#). *International Materials Reviews*, 40(6):239–265.
- [2] Liu, M.-F. (2011). [An exact deformation analysis for the magneto-electro-elastic fiber-reinforced thin plate](#). *Applied Mathematical Modelling*, 35(5):2443–2461.
- [3] Li, Z., Wang, Q., Qin, B., Zhong, R., Yu, H. (2020). [Vibration and acoustic radiation of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded porous plates in the multi-physics fields](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 185:105850.

- [4] Li, Y., Zhang, J. (2013). [Free vibration analysis of magneto-electroelastic plate resting on a Pasternak foundation](#). *Smart Materials and Structures*, 23(2):025002.
- [5] Shooshtari, A., Razavi, S. (2016). [Vibration Analysis of a Magneto-electroelastic Rectangular Plate Based on a Higher-Order Shear Deformation Theory](#). *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(3): 554–572.
- [6] Vinyas, M., Kattimani, S. C. (2018). [Finite element evaluation of free vibration characteristics of magneto-electro-elastic rectangular plates in hygrothermal environment using higher-order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 202:1339–1352.
- [7] Vinyas, M., Sunny, K. K., Harursampath, D., Nguyen-Thoi, T., Loja, M. A. R. (2019). [Influence of interphase on the multi-physics coupled frequency of three-phase smart magneto-electro-elastic composite plates](#). *Composite Structures*, 226:111254.
- [8] Vinyas, M., Kattimani, S. C. (2018). [Investigation of the effect of BaTiO<sub>3</sub>/CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> particle arrangement on the static response of magneto-electro-thermo-elastic plates](#). *Composite Structures*, 185:51–64.
- [9] Žur, K. K., Arefi, M., Kim, J., Reddy, J. N. (2020). [Free vibration and buckling analyses of magneto-electro-elastic FGM nanoplates based on nonlocal modified higher-order sinusoidal shear deformation theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 182:107601.
- [10] Ansari, R., Gholami, R. (2017). [Size-Dependent Buckling and Postbuckling Analyses of First-Order Shear Deformable Magneto-Electro-Thermo Elastic Nanoplates Based on the Nonlocal Elasticity Theory](#). *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 17(01):1750014.
- [11] Ebrahimi, F., Barati, M. R. (2016). [Buckling Analysis of Smart Size-Dependent Higher Order Magneto-Electro-Thermo-Elastic Functionally Graded Nanosize Beams](#). *Journal of Mechanics*, 33(1):23–33.
- [12] Mohammadrezazadeh, S. (2023). [Vibration of MEE Composite Conical Shell Surrounded by Nonlinear Elastic Foundation Considering the Effect of Geometrical Nonlinearity](#). *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 10(1):85–102.
- [13] Arefi, M., Amabili, M. (2021). [A comprehensive electro-magneto-elastic buckling and bending analyses of three-layered doubly curved nanoshell, based on nonlocal three-dimensional theory](#). *Composite Structures*, 257:113100.
- [14] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). [Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
- [15] Ebrahimi, F., Zia, M. (2015). [Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities](#). *Acta Astronautica*, 116:117–125.
- [16] Barati, M. R., Shahverdi, H. (2016). [An analytical solution for thermal vibration of compositionally graded nanoplates with arbitrary boundary conditions based on physical neutral surface position](#). *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(10):840–853.
- [17] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2016). [Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions](#). *Journal of Vibration and Control*, 24(10):1910–1926.
- [18] Ebrahimi, F., Jafari, A., Barati, M. R. (2017). [Vibration analysis of magneto-electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations](#). *Thin-Walled Structures*, 119:33–46.
- [19] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* H. Dominicus.
- [20] Pasternak, P. L. (1954). [On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants](#). *Gos. Izd. Lit. po Strait i Arkh.*
- [21] Kerr, A. D. (1965). [A study of a new foundation model](#). *Acta Mechanica*, 1(2):135–147.
- [22] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). [A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation](#). *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.
- [23] Kumar, P., Harsha, S. P. (2022). [Static analysis of porous core functionally graded piezoelectric \(PCFGP\) sandwich plate resting on the Winkler/Pasternak/Kerr foundation under thermo-electric effect](#). *Materials*

*Today Communications*, 32:103929.

- [24] Thâm, V. V., Ngọc, V. M., Khôi, P. T. (2024). [Phân tích tĩnh dầm cong sandwich FGM xấp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD)-ĐHXDHN*, 18 (3V):48–63.
- [25] Huu-Quoc, T., Van-Tham, V. (2024). [Electro-mechanical vibration characteristics of imperfect sandwich FG piezoelectric honeycomb nanoplates resting on Kerr foundation](#). *Nano-Structures & Nano-Objects*, 39:101229.
- [26] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). [A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 101:332–340.
- [27] Doroushi, A., Eslami, M. R., Komeili, A. (2011). [Vibration Analysis and Transient Response of an FGPM Beam under Thermo-Electro-Mechanical Loads using Higher-Order Shear Deformation Theory](#). *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(3):231–243.
- [28] Wang, Q. (2002). [Axi-symmetric wave propagation in a cylinder coated with a piezoelectric layer](#). *International Journal of Solids and Structures*, 39(11):3023–3037.
- [29] Liu, H., Liu, H., Yang, J. (2018). [Vibration of FG magneto-electro-viscoelastic porous nanobeams on visco-Pasternak foundation](#). *Composites Part B: Engineering*, 155:244–256.
- [30] Li, M., Guedes Soares, C., Yan, R. (2021). [Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT](#). *Composite Structures*, 264: 113643.

## Phụ lục

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66}; & k_{12} &= -\alpha\beta (A_{12} + A_{66}); & k_{13} &= \alpha^3 B_{11} + \alpha\beta^2 (B_{12} + 2B_{66}) \\
 k_{14} &= 0; & k_{15} &= \alpha A_{31}^e; & k_{16} &= \alpha A_{31}^m; & k_{22} &= -\alpha^2 A_{66} - \beta^2 A_{22} \\
 k_{23} &= \alpha^2\beta (B_{12} + 2B_{66}) + \beta^3 B_{22}; & k_{24} &= 0; & k_{25} &= \beta A_{31}^e; & k_{26} &= \beta A_{31}^m \\
 k_{33} &= -\alpha^4 D_{11} - 2\alpha^2\beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) - \beta^4 D_{22} - K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) \\
 k_{34} &= -K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2); & k_{35} &= -E_{31}^e (\alpha^2 + \beta^2) \\
 k_{36} &= -E_{31}^m (\alpha^2 + \beta^2); & k_{44} &= -\alpha^2 A_{55}^s - \beta^2 A_{44}^s - K_1 + (N^E + N^H - K_2)(\alpha^2 + \beta^2) \\
 k_{45} &= (A_{15}^e + F_{31}^e)(\alpha^2 + \beta^2); & k_{55} &= F_{11}^e (\alpha^2 + \beta^2) + F_{33}^e \\
 k_{56} &= F_{11}^m (\alpha^2 + \beta^2) + F_{33}^m; & k_{66} &= X_{11}^m (\alpha^2 + \beta^2) + X_{33}^m \\
 m_{11} &= m_{22} = I_0; & m_{13} &= -I_1\alpha; & m_{14} &= 0; & m_{23} &= -I_1\beta; & m_{24} &= 0 \\
 m_{31} &= -I_1\alpha; & m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2); & m_{34} &= I_0; & m_{44} &= I_0 \\
 m_{12} &= m_{15} = m_{16} = m_{25} = m_{26} = m_{35} = m_{36} = m_{45} = m_{46} = m_{55} = m_{56} = m_{66} = 0
 \end{aligned}$$