

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TRƯỜNG PHA CẢI TIẾN ĐỂ NÂNG CAO SỰ CHÍNH XÁC CỦA MÔ PHỎNG HƯ HỒNG TRONG CÁC KẾT CẤU ĐIỀN HÌNH

Vũ Bá Thành^{a,*}

^aKhoa Công trình, Trường Đại học Giao thông vận tải, số 3 phố Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 26/6/2024, Sửa xong 26/8/2024, Chấp nhận đăng 06/9/2024

Tóm tắt

Dự đoán chính xác cơ chế hư hỏng của kết cấu là một vấn đề quan trọng đặt ra cho các phương pháp mô phỏng. Để giải quyết vấn đề này, bài báo sử dụng phương pháp trường pha cải tiến để dự đoán sự hình thành và phát triển vết nứt trong kết cấu chứa vật liệu giòn, đồng nhất. Trong đó, một hàm suy biến mới được áp dụng vào phương pháp trường pha này để đảm bảo ứng xử vật liệu là tuyến tính trước khi hình thành vết nứt đầu tiên, từ đó có thể dự đoán được chính xác tải trọng tới hạn tương ứng. Hơn nữa, một dạng phân tách trục giao thành phần ten-xơ biến dạng được đưa ra để ổn định sự phát triển vết nứt và ứng xử tải trọng-chuyển vị trơn mịn trong quá trình mô phỏng. Kết quả mô phỏng của bảy ví dụ được so sánh tương ứng với bảy dạng kết cấu điển hình trong phương pháp tham chiếu. Ta thấy rằng, việc so sánh giá trị tải trọng tới hạn giữa hai phương pháp có sai số lớn nhất chỉ 4,5% trong tất cả các ví dụ, chứng tỏ phương pháp mô phỏng hiện tại là một công cụ tốt để giải quyết vấn đề đặt ra.

Từ khoá: cơ học phá hủy; phương pháp trường pha; vật liệu giòn; hàm suy biến; điều kiện trục giao; tải trọng tới hạn.

ADVANCED PHASE-FIELD METHOD USED TO ENHANCE THE ACCURACY OF DAMAGE SIMULATION IN TYPICAL STRUCTURES

Abstract

Accurately predicting the damage mechanisms of structures is an important issue posed to simulation methods. To handle this problem, the present paper employs an advanced phase-field method to predict the initiation and development of cracks in structures containing brittle, homogeneous materials. A novel degradation function is applied into this phase-field method to ensure material behavior is linear elastic prior to crack initiation, thereby enabling accurate prediction of corresponding critical loads. Additionally, a form of the strain orthogonal decomposition is proposed to stabilize crack propagation and simulate smooth load-displacement behavior. Simulation results for seven examples are compared with seven typical structural configurations in the reference method. It is observed that the maximum discrepancy in critical load values between the two methods is only 4.5% across all examples, demonstrating that the current simulation method is a good tool for addressing the posed problem.

Keywords: fracture mechanics; phase-field method; brittle material; degradation function; orthogonal condition; critical load.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(4V\)-10](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(4V)-10) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Hiện tượng phá hoại vật liệu là một trong những vấn đề thường gặp nhất trong kết cấu xây dựng. Do đó, việc tìm hiểu, xác định nguyên nhân và đưa ra được biện pháp khắc phục hiện tượng này là một vấn đề cấp thiết hiện nay. Các nghiên cứu của Griffith [1] và Irwin [2] về cơ học phá hủy xuất

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: thanhvb@utc.edu.vn (Thành, V. B.)

hiện đã tạo tiền đề cho một loạt các nghiên cứu liên quan được thực hiện như phương pháp phân tích lý thuyết [3, 4], phương pháp thực nghiệm của Romani và cs. [5], phương pháp mô phỏng phần tử hữu hạn (FEM) của Moes và cs. [6], và phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng (XFEM) của Sukuma và cs. [7]. Tuy nhiên, các nghiên cứu này đều xảy ra các vấn đề như việc thực nghiệm để xác định hư hỏng kết cấu thường rất tốn kém về mặt chi phí hoặc thậm chí không thể thực hiện được cũng như vấn đề rác thải do các kết cấu sau khi phá hủy thường phải thải ra môi trường mà không thể tái sử dụng, hoặc phương pháp FEM và XFEM rất khó mô tả sự phân nhánh hoặc kết nối các vết nứt phức tạp trong kết cấu bị hư hỏng.

Để vượt qua những thách thức này, trong những năm gần đây phương pháp trường pha trở thành một công cụ mạnh để mô phỏng một hệ thống vết nứt phức tạp trong nhiều loại kết cấu khác nhau và nhiều hình thức gia tải khác nhau. Trong phương pháp trường pha, tổng năng lượng tồn tại trong kết cấu bao gồm năng lượng đàn hồi và năng lượng tạo ra hai bề mặt vết nứt mới. Phương pháp mô phỏng này đã sử dụng một biến trường pha vô hướng biến thiên từ giá trị không tới một để thể hiện diễn tiến hư hỏng của kết cấu từ trạng thái nguyên vẹn sang trạng thái xuất hiện vết nứt. Đồng thời, phương pháp này còn sử dụng một hàm suy biến khả vi của biến trường pha để mô tả sự suy giảm phần năng lượng đàn hồi khi giá trị của biến trường pha tăng lên. Do đó, phương pháp mô phỏng này có thể dự đoán sự hình thành vết nứt, phân nhánh, và liên kết các vết nứt độc lập mà không cần phải tạo vết nứt ban đầu.

Trong vật liệu giòn, vết nứt được tạo ra bởi ứng xử kéo, chính vì thế trong mô phỏng ten-xơ biến dạng thường được chia ra thành phần dương và phần âm tương ứng với ứng xử kéo và ứng xử nén khi kết cấu chịu tải trọng. Việc phân tách ten-xơ biến dạng này được chỉ ra trong hầu hết các nghiên cứu về phương pháp trường pha để mô phỏng hư hỏng cho vật liệu giòn [8–11], kết cấu bê tông cường độ cao có bổ sung nano-silica của Vũ và cs. [12], kết cấu với các lỗ rỗng phân bố ngẫu nhiên của Nguyễn và cs. [13], kết cấu bê tông rỗng của Nguyễn và cs. [14], vật liệu chứa nhiều pha khi xét tới ảnh hưởng mặt phân giới của Vũ và cs. [15]. Trong một phân tích lý thuyết gần đây, He và Shao [16] đã chỉ ra rằng hai thành phần ten-xơ biến dạng phải trực giao để ổn định sự lan truyền vết nứt và đường cong ứng xử trơn mịn ngay cả khi kết cấu bị hư hỏng hoàn toàn. Tuy nhiên, các nghiên cứu [8–15] đều không thỏa mãn điều kiện trực giao của He và Shao [16], điều này có thể dẫn tới việc xuất hiện các điểm kỳ dị khi kết cấu bắt đầu hư hỏng.

Hơn nữa, một nghiên cứu khác của Sargado và cs. [17] đã khảo sát ứng xử của vật liệu giòn và chỉ ra rằng hàm suy biến của biến trường pha và tham số chiều dài đại diện cho việc mô tả chuẩn tắc của vết nứt là các yếu tố rất quan trọng ảnh hưởng trực tiếp tới độ chính xác về sự phát triển vết nứt và ứng xử vật liệu trong mô phỏng. Tuy nhiên, trong hầu hết các nghiên cứu [9–15] đều sử dụng một hàm suy biến bậc hai cô điển được đưa ra bởi Miehe và cs. [8], kết quả là tham số chiều dài phụ thuộc chặt chẽ vào các đặc tính vật liệu và dẫn tới việc lựa chọn giá trị tham số chiều dài càng lớn thì giá trị tải trọng tới hạn càng nhỏ. Điều này cũng làm cho ứng xử cơ học không tuyến tính trước khi xảy ra hư hỏng và khó có thể dự đoán chính xác được tải trọng tới hạn tương ứng với thời điểm xảy ra hư hỏng đầu tiên này.

Để khắc phục hai vấn đề nêu trên là các thành phần ten-xơ biến dạng phải trực giao và đường cong tải trọng-chuyển vị tuyến tính trước khi hư hỏng để dự đoán chính xác được tải trọng tới hạn, bài báo này sử dụng phương pháp trường pha cải tiến cho vật liệu giòn, đồng nhất với việc áp dụng họ hàm suy biến của Sargado và cs. [17] và một dạng phân tách ten-xơ biến dạng thỏa mãn điều kiện trực giao được phân tích trong nghiên cứu lý thuyết của He và Shao [16] để dự đoán đường lan truyền vết nứt, đường cong tải ứng xử, và giá trị tải trọng tới hạn trong bảy trường hợp điển hình được đưa ra trong nghiên cứu lý thuyết của Tada và cs. [18]. Một quy trình rõ ràng về việc lựa chọn kích thước kết cấu,

chia lưới phần tử, điều kiện biên và điều kiện tải trọng được đưa ra cho từng trường hợp cụ thể. Giá trị tải trọng tối hạn được so sánh giữa phương pháp trường pha cải tiến và nghiên cứu của Tada và cs. [18] để chứng minh được tính hiệu quả của phương pháp mô phỏng hiện tại.

2. Giới thiệu về phương pháp trường pha cải tiến

2.1. Các phương trình năng lượng

Một miền nứt V với biên ngoài ∂V chứa vết nứt Γ . Biến trường pha $p(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in V$ được sử dụng để mô tả trạng thái từ nguyên vẹn tới hư hỏng hoàn toàn của miền V tương ứng với $p(\mathbf{x}) = [0 \div 1]$. Trong miền V , tổng năng lượng trong sự tác dụng của tải trọng được mô tả như sau:

$$\Pi = E(\mathbf{u}, p) - E^{ext} = \int_V \bar{\Psi}_u(\boldsymbol{\varepsilon}, p) dV + \int_V G_c \gamma(p, \nabla p) dV - \int_V \mathbf{f}_k \mathbf{u} dV - \int_{\partial V_F} \mathbf{F}^{ext} \mathbf{u} d\Gamma \quad (1)$$

trong đó $E(\mathbf{u}, p)$ là tổng năng lượng trong miền nứt V ; E^{ext} là công của ngoại lực $\mathbf{F}^{ext}$ trên biên lực ∂V_F ; $\mathbf{f}_k$ là lực khối trong miền V và G_c là năng lượng kháng nứt, $\gamma(p, \nabla p) = \frac{p^2}{2l} + \frac{l}{2} \nabla p \cdot \nabla p$ là hàm mật độ vết nứt, l là tham số chiều dài; $\boldsymbol{\varepsilon}$ là ten-xơ biến dạng; ∇p là gradient của biến p . Trong vật liệu giòn được xem xét trong bài báo này, sự bất đối xứng của ứng xử kéo và nén được thể hiện rõ ràng như các nghiên cứu [8–14]. Trong mô hình hóa hư hỏng vật liệu này bằng phương pháp trường pha, cần thiết phải xem xét tới quá trình hình thành vết nứt được thúc đẩy bằng phần năng lượng liên quan tới thành phần biến dạng kéo (hoặc biến dạng dương). Do đó, ten-xơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ được chia thành phần biến dạng dương $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ và phần biến dạng âm $\boldsymbol{\varepsilon}^-$, sao cho $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-$.

Phương trình vi phân $\delta \Pi$ của hàm Π trong công thức (1) theo biến trường pha p và ten-xơ $\boldsymbol{\varepsilon}$ được phân tích bởi:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) &= \int_V \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial p} \delta p dV + \int_V G_c \frac{\partial \gamma}{\partial p} \delta p dV \\ &+ \int_V \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{f}_k \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial V_F} \mathbf{F}^{ext} \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Theo He và Shao [16], hàm mật độ năng lượng đàn hồi tuyến tính trong vật thể chưa nứt là $W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon})$, trong đó $\mathbb{C}$ là ten-xơ độ cứng đàn hồi bậc bốn. Tương ứng với hai thành phần $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^-$, hàm năng lượng này được xác định:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^+ : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^+) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^- : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^-) + \boldsymbol{\varepsilon}^+ : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^-) \quad (3)$$

Hàm $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ trong (3) được chia thành W^+ phần W^- như biểu thức dưới đây:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = W^+(\boldsymbol{\varepsilon}^+) + W^-(\boldsymbol{\varepsilon}^-); \quad W^+(\boldsymbol{\varepsilon}^+) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^+ : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^+); \quad W^-(\boldsymbol{\varepsilon}^-) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^- : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^-) \quad (4)$$

khí và chỉ khi điều kiện trực giao dưới đây thỏa mãn:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ : (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^-) = 0 \quad \text{hay} \quad (\sqrt{\mathbb{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^-) : (\sqrt{\mathbb{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^-) = 0 \quad (5)$$

Từ [16], để thỏa mãn điều kiện (5), ta đặt ten-xơ biến dạng chuyển đổi $\bar{\epsilon} = \sqrt{C}\epsilon$ khi đó $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^+ + \bar{\epsilon}^-$ và $\bar{\epsilon}^+ : \bar{\epsilon}^- = 0$. Do đó, hai thành phần năng lượng $W^\pm(\epsilon^\pm)$ trong (4) được xác định để đảm bảo điều kiện (5) như sau (xem Vu và cs. [19]):

$$W^\pm(\epsilon^\pm) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{C}\epsilon^\pm \right) : \left(\sqrt{C}\epsilon^\pm \right) = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^\pm : \bar{\epsilon}^\pm \quad (6)$$

hai thành phần ten-xơ biến dạng $\bar{\epsilon}^\pm = \sqrt{C}\epsilon^\pm$ được xác định bởi:

$$\bar{\epsilon}^\pm = \sum_{i=1}^{\mathcal{D}} \langle \bar{\epsilon}^i \rangle_\pm \bar{n}_i \otimes \bar{n}_i \quad (7)$$

trong đó $\bar{\epsilon}^i$ và $\bar{n}_i$ (với $i = 1, \dots, \mathcal{D}$) là giá trị riêng và vec-tơ riêng của $\bar{\epsilon}$ với $\bar{\epsilon}^1 \leq \bar{\epsilon}^2 \leq \dots \leq \bar{\epsilon}^{\mathcal{D}}$ và $\langle \bar{\epsilon}^i \rangle_\pm = (\bar{\epsilon}^i \pm |\bar{\epsilon}^i|)/2$.

Trong các công thức (1) và (2), hàm năng lượng đàn hồi $\bar{\Psi}_u$ như sau:

$$\bar{\Psi}_u = \{g(p) + \kappa\} W^+(\epsilon) + W^-(\epsilon) = \{g(p) + \kappa\} W(\epsilon^+) + W(\epsilon^-) \quad (8)$$

trong đó $g(p)$ là hàm suy biến khả vi với biến p , và $\kappa \ll 1$ là số thực vô cùng nhỏ (xem [8, 10]). Từ đó, ứng suất Cô-sy được định nghĩa theo công thức $\sigma = \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial \epsilon}$.

Để giải phương trình (2), ta quy nạp từng số hạng của biểu thức (2) bằng không, tức là $\frac{\partial \Pi}{\partial p} \delta p = 0$ và $\frac{\partial \Pi}{\partial \epsilon} : \epsilon(\delta u) = 0$, tương ứng với:

$$\int_V \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial p} \delta p dV + \int_V G_c \frac{\partial \gamma}{\partial p} \delta p dV = 0 \quad (9)$$

$$\int_V \frac{\partial \bar{\Psi}_u}{\partial \epsilon} : \epsilon(\delta u) dV - \int_V f_k \delta u dV - \int_{\partial V_F} F^{ext} \delta u d\Gamma = 0 \quad (10)$$

Đặt hàm lịch sử biến dạng $\mathcal{H} = \max_{\tau \in [0, t]} \{W^+(\mathbf{x}, \tau)\}$ (xem [8, 10]). Từ các công thức (8), (9) và các điều kiện biên liên quan tới biến trường pha p , ta có hệ phương trình sau để giải biến p :

$$\begin{cases} \int_V g'(p) \mathcal{H} \delta p dV + \int_V \frac{G_c}{l} (p - l^2 \Delta p) \delta p dV = 0 & \text{trong } V \\ p(\mathbf{x}) = 1 & \text{tại } \Gamma \\ \nabla p(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{tại } \partial V \end{cases} \quad (11)$$

Tương tự, từ các công thức (8), (10) và các điều kiện biên tương ứng tới vec-tơ chuyển vị $\mathbf{u}$, ta có hệ phương trình dưới đây để giải vec-tơ chuyển vị này:

$$\begin{cases} \int_V \sigma : \epsilon(\delta u) dV - \int_V f_k \delta u dV - \int_{\partial V_F} F^{ext} \delta u d\Gamma = 0 & \text{trong } V \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} & \text{tại } \partial V_u \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}^{ext} & \text{tại } \partial V_F \end{cases} \quad (12)$$

Trong (11) và (12), $g'(p)$ là đạo hàm bậc một của $g(p)$ theo p ; $\mathbf{n}$ là vec-tơ pháp tuyến tại biên ∂V ; Δp là toán tử Laplace của $p(\mathbf{x})$; ∂V_u là biên chuyển vị.

2.2. Giới thiệu về hàm suy biến được sử dụng

Bài báo này sử dụng họ hàm suy biến được mô tả trong Sargado và cs. [17] với phương trình tổng quát như sau:

$$g(p; n; \alpha; k) = (1 - k) \frac{1 - e^{-\alpha(p,n)(1-p)^n}}{1 - e^{-\alpha(p,n)}} + k\varphi_c(p) \quad (13)$$

Công thức (13) trong nghiên cứu [17] sử dụng các số thực $\alpha > 0$, $n \geq 2$ và $k = 0, 1$; trong đó $\alpha(p, n) = \frac{(n-2)p+1}{np(1-p)^n}$, hàm $\varphi_c(p) = A_2(1-p)^2 + A_3(1-p)^3$ là hàm điều chỉnh sao cho $\varphi_c(\phi) - \phi\varphi_c''(\phi) = 0$; $\varphi_c(0) = 1$ và $\varphi_c(p) > 0$ ở giá trị bất kỳ của p , với $A_2 = \frac{3\phi^2-3}{3\phi^2-1}$; $A_3 = \frac{2}{3\phi^2-1}$ là các hằng số, ở đó $\phi = \frac{1}{3}$ nếu $n = 2$ và $\phi = \frac{-(n+1) + \sqrt{5n^2-6n+1}}{2(n^2-2n)}$ nếu $n > 2$.

Theo [17], ta sử dụng một hàm không thứ nguyên của tham số l như sau $\sigma_{nd} = \sigma_c \sqrt{\frac{l}{EG_c}}$, với σ_c là ứng suất tới hạn, E là mô đun đàn hồi. Để xác định quan hệ giữa số thực n trong (13) và tham số chiều dài l , nghiên cứu [17] đã thiết lập một hàm như sau:

$$n(\sigma_{nd}) = c_0 + \frac{c_1}{\sigma_{nd}} + \frac{c_2}{\sigma_{nd}^2} + \frac{c_3}{\sigma_{nd}^3} \quad (14)$$

trong đó $c_0 = -1,9683716827$; $c_1 = 3,0725412764$; $c_2 = -0,1019957566$; $c_3 = 0,0071948119$ được đưa ra trong [17]. Từ công thức (14) này, cứ mỗi giá trị của tham số l , ta sẽ xác định được giá trị của số thực n tương ứng.

2.3. Giải bài toán trường pha và bài toán chuyển vị trong khung phần tử hữu hạn

a. Bài toán trường pha

Theo nghiên cứu [17], đạo hàm bậc hai của hàm suy biến cải tiến (13) với p được xác định là $g''(p) = -\frac{g'(p)}{(1-p)}$. Từ quan hệ này, phương trình (11¹) trở thành:

$$\int_V \left\{ \left(g''(p) \mathcal{H} + \frac{G_c}{l} \right) p \delta p + G_c l \nabla p \nabla (\delta p) \right\} dV = \int_V g''(p) \mathcal{H} \delta p dV \quad (15)$$

Sử dụng khung phần tử hữu hạn (FEM), ta có các biểu thức dưới đây:

$$p(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_p] \{\mathbf{p}_e\}; \quad \nabla p(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}_p] \{\mathbf{p}_e\}; \quad \delta p(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_p] \{\delta \mathbf{p}_e\}; \quad \nabla \delta p(\mathbf{x}) = [\mathbf{B}_p] \{\delta \mathbf{p}_e\} \quad (16)$$

với $[\mathbf{N}_p]$ và $[\mathbf{B}_p]$ là ma trận hàm dạng và ma trận vi phân hàm dạng của biến trường pha $p(\mathbf{x})$, và $\{\mathbf{p}_e\}$ các giá trị biến trường pha tại các nút phần tử. Thế các quan hệ (16) vào biểu thức (15), ta có ma trận độ cứng $[\mathbf{K}_p]$ và véc-tơ lực $\{\mathbf{F}_p\}$ như:

$$[\mathbf{K}_p] = \int_V \left\{ \left(g''(p) \mathcal{H} + \frac{G_c}{l} \right) [\mathbf{N}_p]^T [\mathbf{N}_p] + G_c l [\mathbf{B}_p]^T [\mathbf{B}_p] \right\} dV \quad (17)$$

$$\{\mathbf{F}_p\} = \int_V g''(p) [\mathbf{N}_p]^T \mathcal{H} dV \quad (18)$$

Từ đó, ta xác định được giá trị biến trường pha $\{\mathbf{p}_e\}$ tại các nút phần tử:

$$\{\mathbf{p}_e\} = [\mathbf{K}_p]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_p\} \quad (19)$$

b. Bài toán chuyển vị

Tương tự, sử dụng khung FEM cho bài toán chuyển vị, ta có các quan hệ sau:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_u] \{\mathbf{u}_e\}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = [\mathbf{B}_u] \{\mathbf{u}_e\}; \quad \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_u] \{\delta \mathbf{u}_e\}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) = [\mathbf{B}_u] \{\delta \mathbf{u}_e\} \quad (20)$$

với $[\mathbf{N}_u]$ và $[\mathbf{B}_u]$ là ma trận hàm dạng và ma trận vi phân hàm dạng của véc-tơ chuyển vị $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, và $\{\mathbf{u}_e\}$ các giá trị chuyển vị tại nút phần tử. Từ công thức (6), (7), (8) và (12¹), ta có ma trận độ cứng $[\mathbf{K}_u]$ và véc-tơ lực $\{\mathbf{F}_u\}$ tương ứng với chuyển vị:

$$[\mathbf{K}_u] = \int_V \left\{ g(p) [\mathbf{B}_u]^T (\mathbb{P}^+ : \sqrt{\mathbb{C}})^T : (\mathbb{P}^+ : \sqrt{\mathbb{C}}) [\mathbf{B}_u] + [\mathbf{B}_u]^T (\mathbb{P}^- : \sqrt{\mathbb{C}})^T : (\mathbb{P}^- : \sqrt{\mathbb{C}}) [\mathbf{B}_u] \right\} dV \quad (21)$$

$$\{\mathbf{F}_u\} = \int_V [\mathbf{N}_u]^T \mathbf{f}_k dV + \int_{\partial V_F} [\mathbf{N}_u]^T \mathbf{F}^{ext} d\Gamma \quad (22)$$

Hai thành phần $\mathbb{P}^\pm$ trong (21) được xác định $\mathbb{P}^\pm = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ (xem Vu và cs. [19]). Trong các công thức (17) và (21), $[\mathbf{A}]^T$ là ma trận chuyển vị trí của ma trận $[\mathbf{A}]$. Từ (21) và (22), ta xác định được giá trị chuyển vị tại nút các phần tử như sau:

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{K}_u]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_u\} \quad (23)$$

3. Các ví dụ mô phỏng

Trong tất cả các ví dụ của bài báo này, ta sử dụng các tham số vật liệu được coi là giòn, đồng nhất như được mô tả trong [5] như sau: mô đun đàn hồi $E = 12$ GPa, hệ số Poisson $\nu = 0,3$, năng lượng kháng nứt $G_c = 1,4$ N/m và ứng suất tới hạn $\sigma_c = 3,9$ Mpa. Các ví dụ được thực hiện trong bài toán hai chiều (2D) với điều kiện biến dạng phẳng. Theo [18], cường độ kháng nứt của vật liệu nêu trên

được xác định như sau $K_I = \sqrt{\frac{EG_c}{1-\nu^2}} = 4,3$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$.

Nghiên cứu này dụng phương pháp trường pha kết hợp với họ hàm suy biến (13) và các điều kiện trực giao ten-xơ biến dạng (7). Trong họ hàm suy biến (13) ta có thể xác định được nhiều cặp giá trị $[n, l]$ khác nhau dựa vào công thức (14), nhưng bài báo này đề xuất sử dụng một cặp giá trị đại diện $[n, l] = [6; 0,14 \text{ mm}]$ để mô phỏng. Khi $n = 6$, thông qua một quá trình biến đổi chi tiết trong mục 2.2 và công thức (13), ta có hàm suy biến $g(p) = 0,9114 - 0,9114e^{-4,3854(1-p)^6} + 0,3068(1-p)^2 - 0,2068(1-p)^3$.

Mục tiêu của bài báo này là khảo sát sự phát triển vết nứt, ứng xử tải trọng-chuyển vị và giá trị lực tới hạn P_c giữa phương pháp mô phỏng hiện tại với bảy dạng kết cấu điển hình trong [18] như sau: (i) Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn có một vết nứt giữa; (ii) Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn bị nứt hai cạnh; (iii) Dầm chịu kéo tách; (iv) Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có một vết nứt giữa; (v) Tấm chịu kéo kích thước bán vô hạn bị nứt một cạnh; (vi) Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương ngang; (vii) Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương đứng. Đặc biệt các giá trị P_c đạt được bởi phương pháp mô phỏng được so sánh với kết quả phân tích theo [18] để kiểm chứng sự chính xác của phương pháp đề xuất. Các kết cấu được chia lưới tam giác bằng phần mềm GMSH [20] với kích thước lưới $h_{\min} = 0,05$ mm và $h_{\max} = 0,5$ mm. Trong suốt quá trình mô phỏng, kết cấu được gia tải với bước chuyển vị không đổi $\Delta u = 5 \times 10^{-5}$ mm trong tất cả các ví dụ.

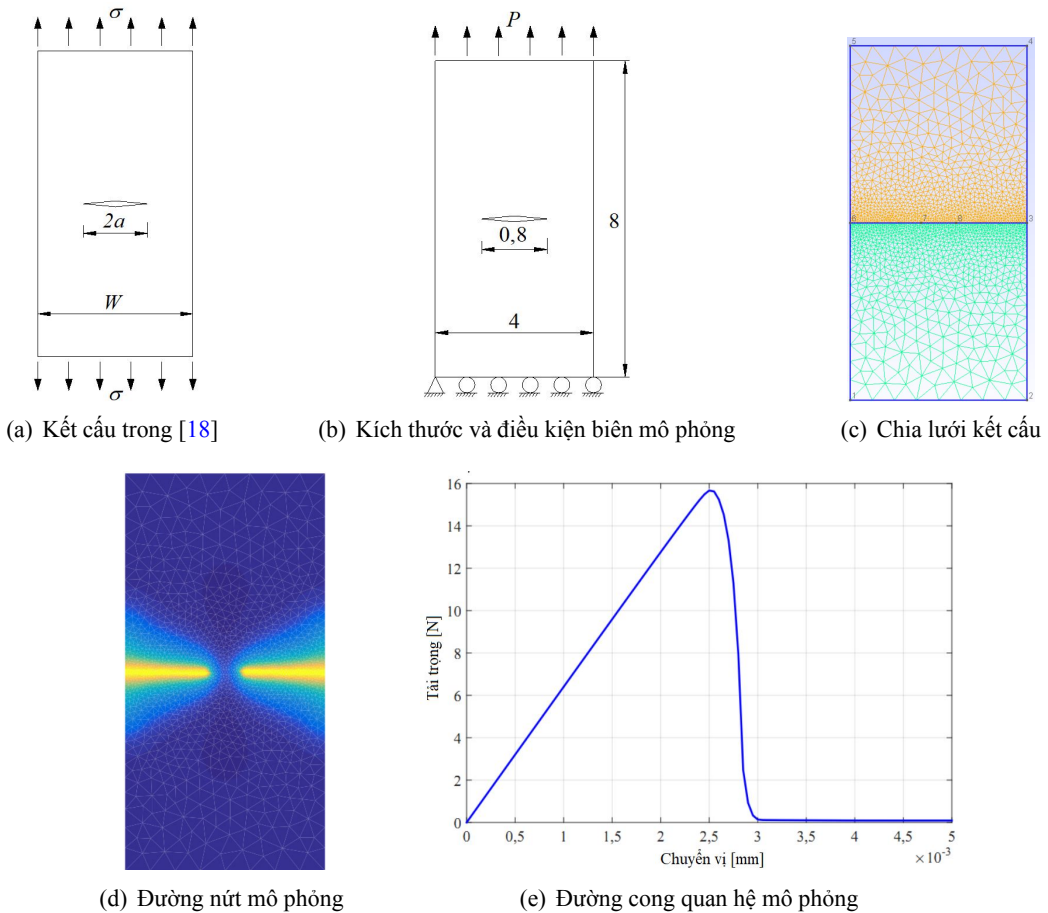
3.1. Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn có một vết nứt giữa

Hình 1(a) mô tả tấm chịu kéo theo Tada và cs. [18], do đó, trong phương pháp mô phỏng dùng tấm hữu hạn có kích thước 8×4 mm với vết nứt trước $2a = 0,8$ mm có điều kiện biên như Hình 1(b). Tấm được chia thành 3596 phần tử tam giác như Hình 1(c), với điểm 7 và điểm 8 là hai đầu vết nứt mỗi. Hình 1(d) và (e) thể hiện đường nứt và đường cong ứng xử của phương pháp mô phỏng hiện tại.

Theo [18], đối với tấm như Hình 1(a) và (b), cường độ kháng nứt K_I như sau:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\alpha) = \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{2a}{W} = 0,2 \quad (24)$$

Ta tính được hệ số $F(\alpha) = 1 + 0,128\alpha - 0,288\alpha^2 + 1,525\alpha^3 = 1,023$. Vậy theo [18], giá trị lực tới hạn $P_c^I = 14,994$ N. Theo mô phỏng hiện tại $P_c^{mp} = 15,67$ N.



Hình 1. Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn có một vết nứt giữa

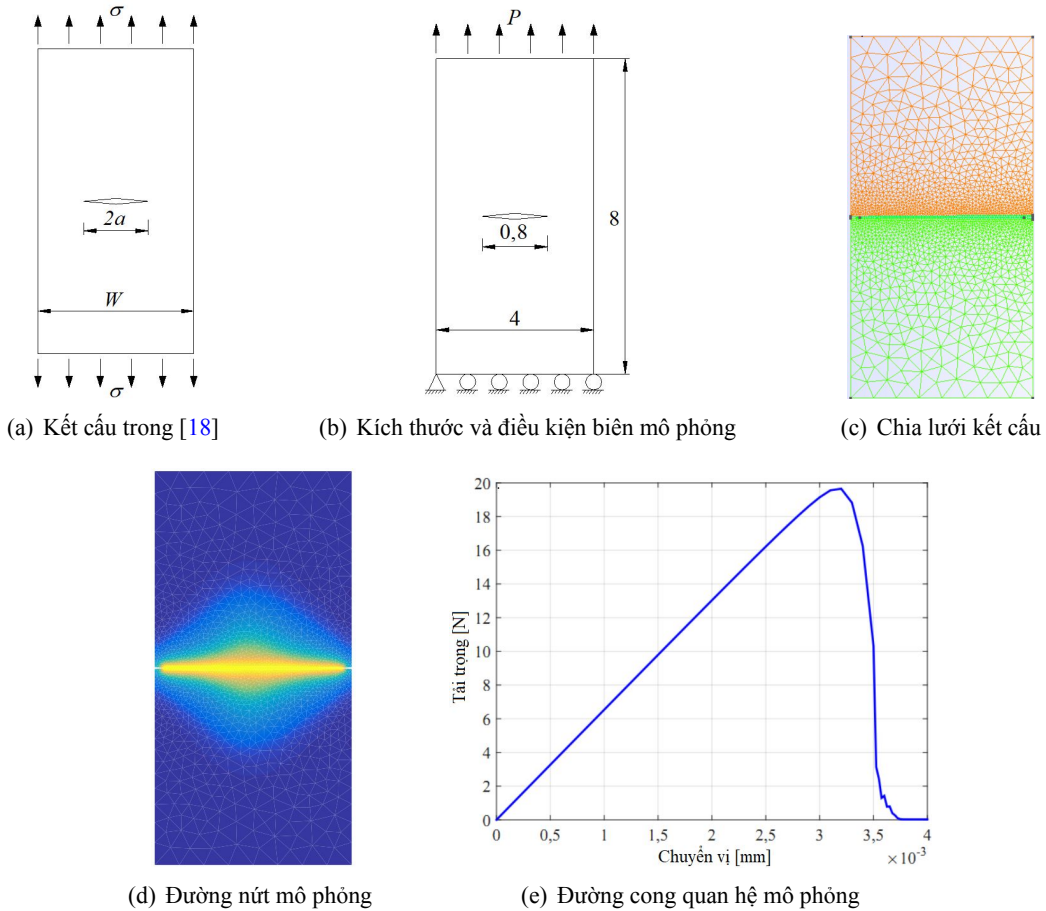
3.2. Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn bị nứt hai cạnh

Tấm chịu kéo theo [18] được mô tả trong Hình 2(a). Trong phương pháp mô phỏng dùng tấm hữu hạn có kích thước 8×4 mm với hai vết nứt trước dài $a = 0,2$ mm và có điều kiện biên như Hình 2(b). Tấm được chia thành 3916 phần tử tam giác như Hình 2(c). Hình 2(d) và (e) thể hiện đường nứt và đường cong ứng xử của phương pháp trường pha.

Đối với trường hợp này, cường độ kháng nứt K_I theo [18] như sau:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\alpha) = \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{2a}{W} = 0,2 \quad (25)$$

Theo [18], hệ số $F(\alpha) = 1,122 - 0,154\alpha + 0,807\alpha^2 - 1,894\alpha^3 + 2,494\alpha^4 = 1,112$. Vậy giá trị tải trọng tới hạn lý thuyết theo [18] $P_c^{lt} = 19,513$ N. Kết quả đạt được theo mô phỏng hiện tại như Hình 2(e) là $P_c^{mp} = 19,65$ N.

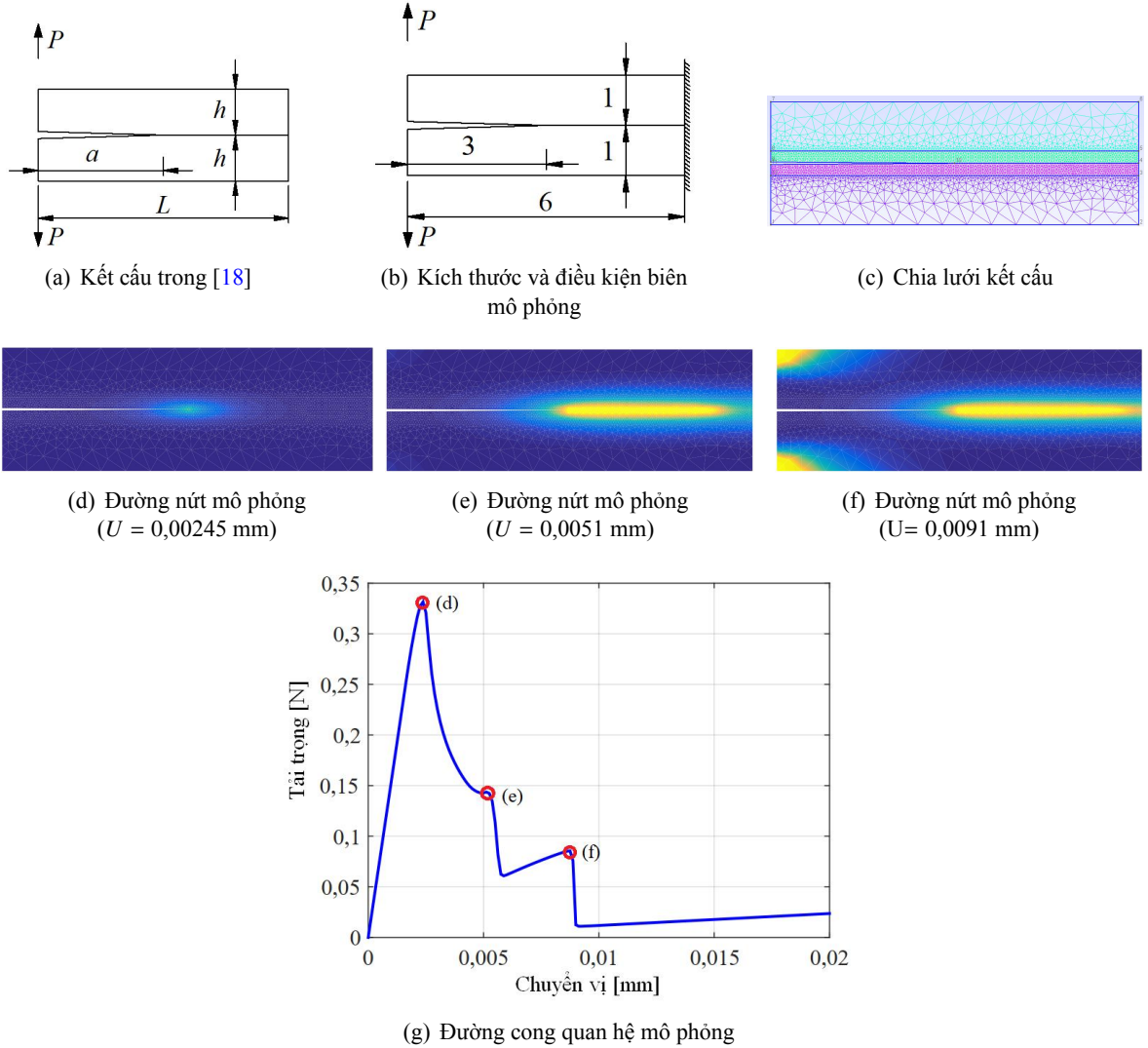


Hình 2. Tấm chịu kéo kích thước hữu hạn bị nứt hai cạnh

3.3. Dầm chịu kéo tách

Dầm chịu kéo tách được mô tả theo [18] và mô phỏng hiện tại được thể hiện trong Hình 3(a) và (b) tương ứng. Kích thước dầm được là $L \times 2h = 6 \times 2$ mm với vết nứt trước dài $a = 3$ mm. Dầm chịu hai lực tập trung P kéo ngược hướng tương ứng với bước chuyển vị không đổi $\Delta u = 5 \times 10^{-5}$ mm. Hình 3(c) thể hiện kích thước lưới được chia bằng GMSH với 5646 phần tử tam giác. Sự phát triển vết nứt và đường cong chuyển vị-tải trọng được thể hiện trên Hình 3(d)–(f) và Hình 3(g), tương ứng.

Hình 3(d)–(f) thể hiện sự phát triển vết nứt cho các giá trị chuyển vị $U = 0,00245$ mm, 0,0051 mm và 0,0091 mm tương ứng với các điểm được đánh dấu (d), (e) và (f) trên Hình 3(g). Ta thấy rằng khi $U = 0,00245$ mm xuất hiện giá trị tải trọng tới hạn lớn nhất tương ứng với sự hình thành vết nứt đầu tiên ở vết nứt mới (điểm (d) trên Hình 3(g)). Sau đó giá trị tải trọng suy giảm tới điểm (e) của



Hình 3. Dầm chịu kéo tách

Hình 3(g), tại thời điểm này, vết nứt phát triển gần tới phần ngàm của dầm nên giá trị tải trọng có vẻ tăng lên. Sau đó, giá trị tải trọng bị giảm đột ngột và tiếp tục tăng lên tới điểm (f) của Hình 3(g). Việc tăng giá trị tải trọng này có thể giải thích do sự hình thành hư hỏng cục bộ tại hai điểm đặt lực tập trung. Cường độ kháng nứt K_I theo [18] đối với trường hợp này như sau:

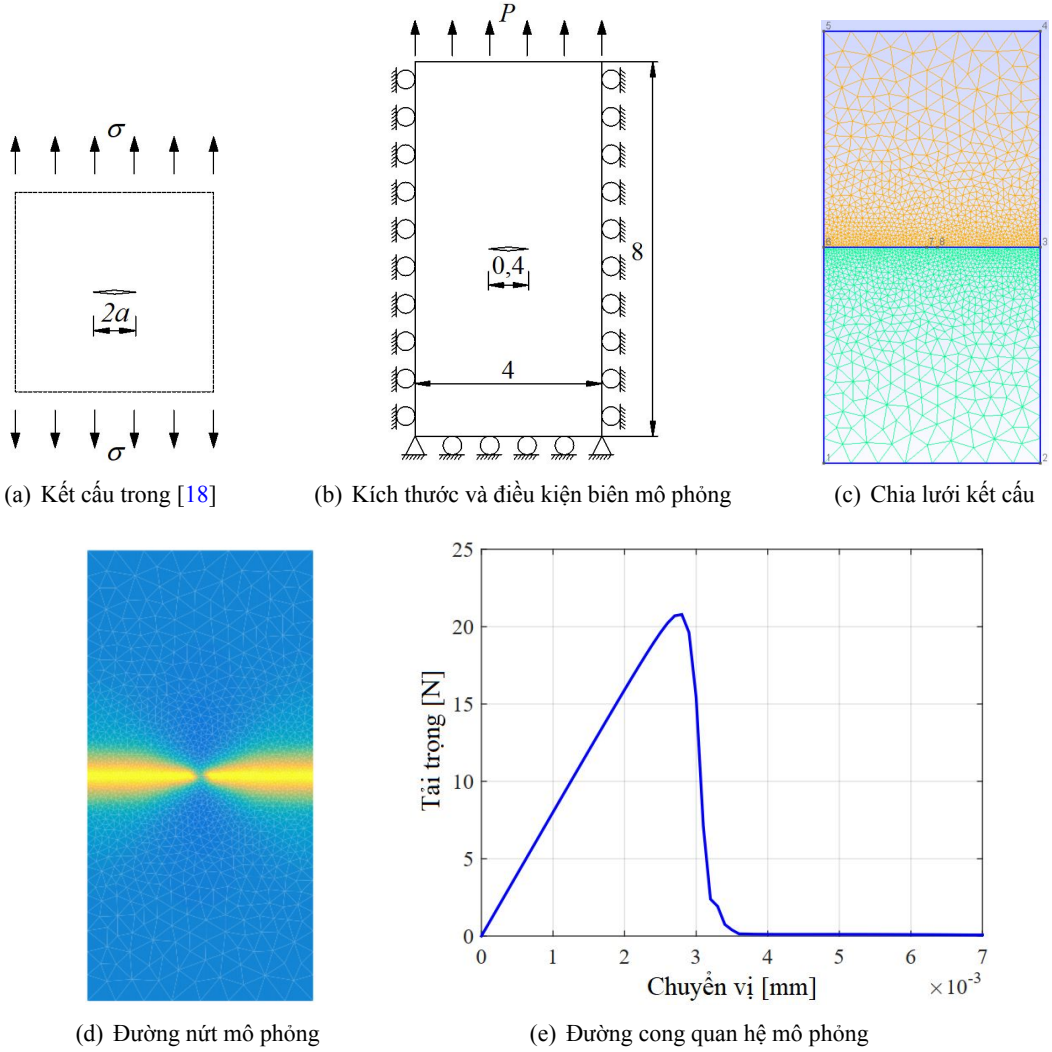
$$K_I = \frac{P_c}{t \sqrt{h}} F(\alpha); \quad \alpha = \frac{a}{h} = 0,5; \quad t = 1 \text{ mm} \quad (26)$$

Từ đó, ta tính được hệ số $F(\alpha) = 2\sqrt{3} \left(\frac{a}{h} + 0,64 \right) = 12,609$. Ví dụ này lấy chiều dày của dầm $t = 1 \text{ mm}$, vậy theo [18], giá trị $P_c^H = 0,341 \text{ N}$. Tại điểm (d) của Hình 3(g), giá trị tải trọng tới hạn mô phỏng là $P_c^{mp} = 0,335 \text{ N}$.

3.4. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có một vết nứt giữa

Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có một vết nứt giữa theo [18] được mô tả trong Hình 4(a). Để đáp ứng điều kiện của bài toán đặt ra, phương pháp mô phỏng hiện tại dùng tấm hữu hạn có chiều

cao 8 mm và bề rộng $W = 4$ mm, với vết nứt trước dài $2a = 0,4$ mm như Hình 4(b). Tỷ lệ chiều dài của vết nứt trước so với bề rộng tấm là $0,4/4 = 0,1$ là khá nhỏ nên có thể coi kích thước tấm là vô hạn so với vết nứt. Hơn nữa, điều kiện biên như Hình 4(b) với hai cạnh bên bị khống chế chuyển vị theo phương ngang, do đó khi kéo theo phương thẳng đứng, biến dạng không gây ảnh hưởng cho hai cạnh này, do đó tấm mô phỏng này có thể được coi là vô hạn. Tấm được chia thành 3596 phần tử tam giác như Hình 4(c), với điểm 7 và điểm 8 là hai đầu vết nứt mỗi. Hình 4(d) và (e) thể hiện đường nứt và đường cong ứng xử của phương pháp mô phỏng hiện tại.



Hình 4. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có một vết nứt giữa

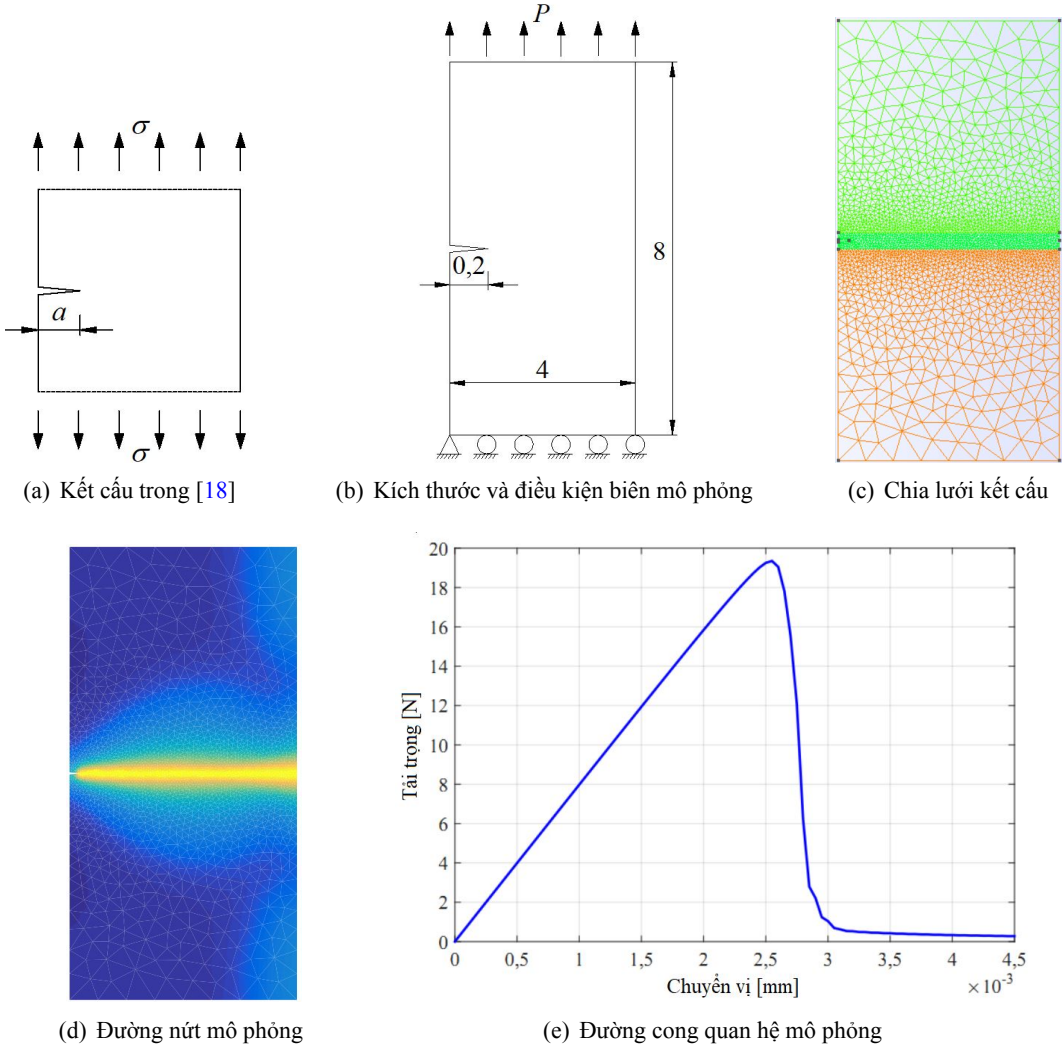
Với tấm như Hình 4(a) và (b), cường độ kháng nứt K_I được tính theo [18] như:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} = \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} \quad (27)$$

Do đó, giá trị phân tích của tải trọng tới hạn theo [18] đạt được $P_c^H = 21,699$ N. Giá trị mô phỏng của tải trọng này như trên Hình 4(e) là $P_c^{mp} = 20,79$ N.

3.5. Tấm chịu kéo kích thước bán vô hạn bị nứt một cạnh

Hình 5(a)–(c) thể hiện tấm chịu kéo kích thước bán vô hạn bị nứt một cạnh theo mô tả của [18] và mô phỏng hiện tại với vết nứt trước dài $a = 0,2$ mm cũng như lưới phần tử được chia theo GMSH, tương ứng. Tấm chia thành 4696 phần tử tam giác. Trong đó Hình 5(d) và (e) thể hiện đường nứt và đường cong ứng xử của tấm trong quá trình mô phỏng.



Hình 5. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có một vết nứt giữa

Theo [18], đối với trường hợp này như Hình 5(a) và (b), cường độ kháng nứt K_I như công thức dưới đây:

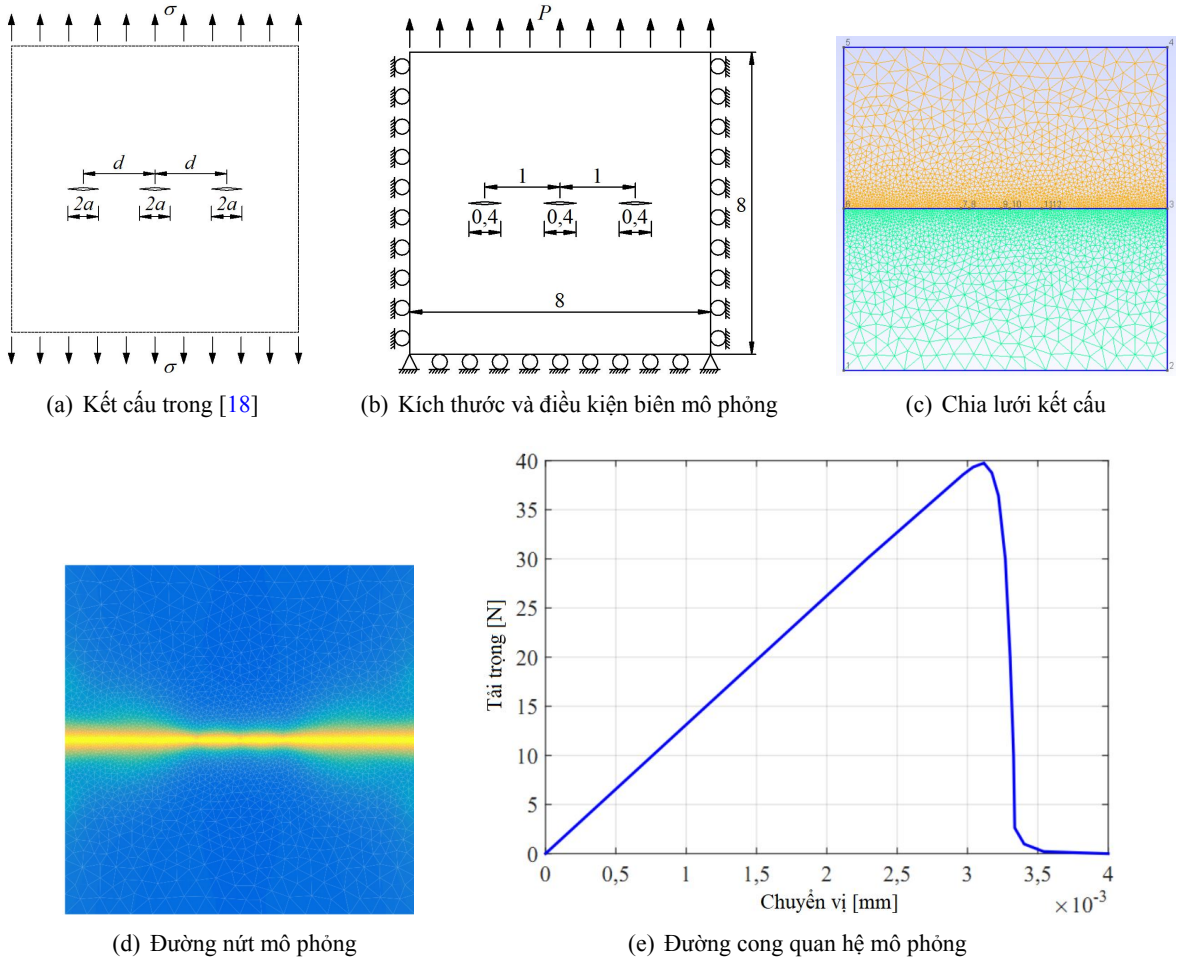
$$K_I = 1,1215\sigma \sqrt{\pi a} = 1,1215 \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} \quad (28)$$

Theo phân tích của [18], giá trị tải trọng tới hạn là $P_c^H = 19,348$ N. Theo mô phỏng hiện tại thì $P_c^{mp} = 18,97$ N.

3.6. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương ngang

Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương ngang theo [18] được mô tả trong Hình 6(a). Trong phương pháp mô phỏng dùng tấm có chiều cao 8 mm và bề rộng $W = 8$ mm,

với ba vết nứt trước có chiều dài $2a = 0,4$ mm cách nhau $d = 1$ mm như Hình 6(b). Tỷ lệ chiều dài vết nứt trước so với bề rộng tấm là $0,4/8 = 0,05$ và điều kiện biên trên Hình 6(b) với hai cạnh bên bị khống chế chuyển vị theo phương ngang, do đó có thể coi tấm là kích thước vô hạn so với vết nứt để thuận tiện cho quá trình mô phỏng. Hình 6(c) là lưới phần tử được chia theo GMSH, với các điểm 7-8 là hai đầu vết nứt mỗi thứ nhất, các điểm 9-10 là hai đầu vết nứt mỗi thứ hai, và các điểm 11-12 là hai đầu vết nứt mỗi thứ ba. Tấm được chia thành 6956 phần tử tam giác. Kết quả mô phỏng được thể hiện trên Hình 6(d) và (e).



Hình 6. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương ngang

Cường độ kháng nứt K_I theo [18] được đưa ra:

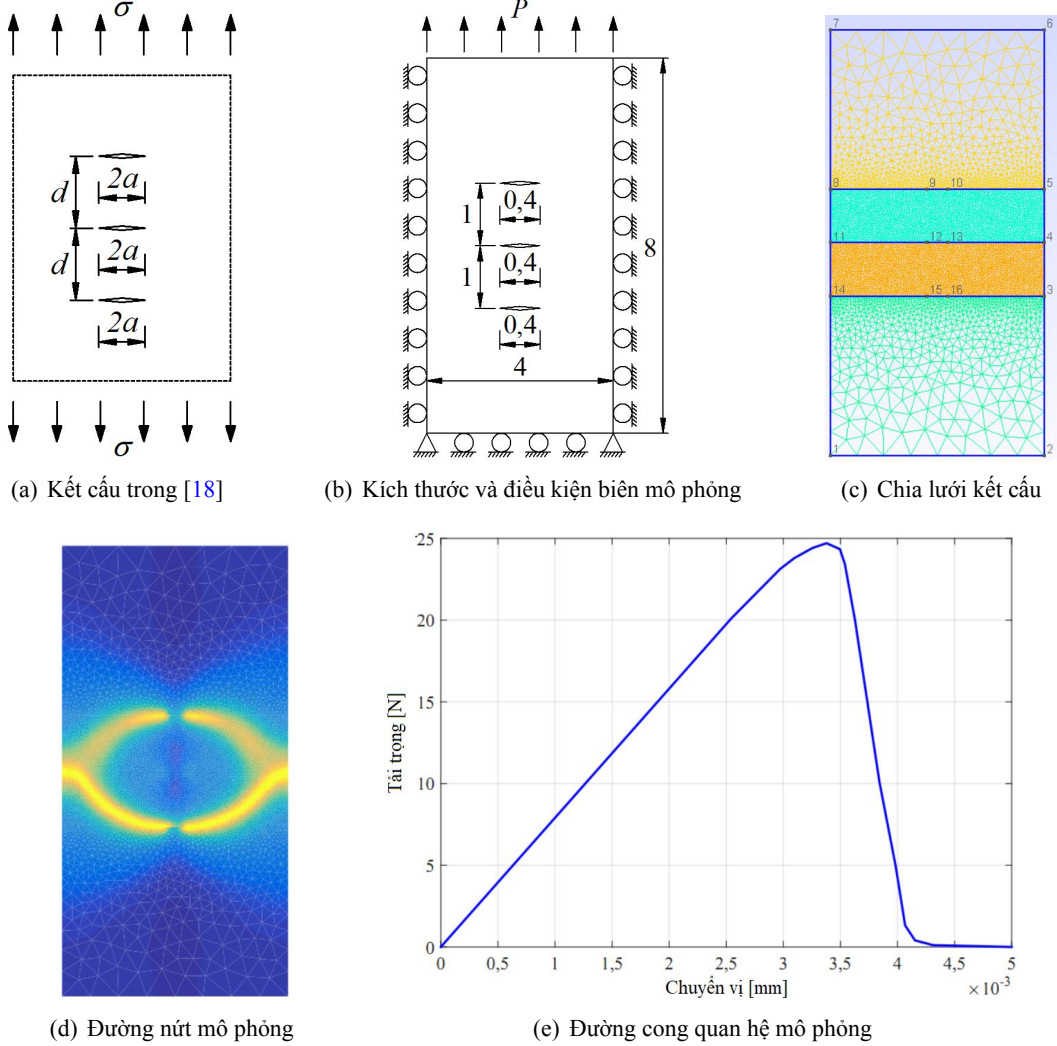
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\alpha) = \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{2a}{d} = 0,4 \quad (29)$$

Ta tính được hệ số $F(\alpha) = \sqrt{(2/\pi\alpha) \tan(\pi\alpha/2)} = 1,076$. Do đó theo [18], giá trị $P_c^{lt} = 40,348$ N. Giá trị tải trọng tới hạn theo mô phỏng hiện tại $P_c^{mp} = 39,75$ N.

3.7. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương đứng

Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương đứng của [18] được mô tả trong Hình 7(a). Trong phương pháp mô phỏng hiện tại dùng tấm có chiều cao 8 mm và bề rộng $W = 4$

mm, với ba vết nứt trước dài $2a=0,4\text{mm}$ cách nhau theo phương đứng $d = 1\text{ mm}$ như Hình 7(b). Tỷ lệ chiều dài vết nứt trước so với bề rộng tấm là $0,4/4 = 0,1$ và điều kiện biên như Hình 7(b) với hai cạnh bên bị khống chế chuyển vị theo phương ngang. Hình 7(c) mô tả lưới phần tử của tấm, với các điểm 9-10 là hai đầu vết nứt mỗi thứ nhất, các điểm 12-13 là hai đầu vết nứt mỗi thứ hai, và các điểm 15-16 là hai đầu vết nứt mỗi thứ ba. Tấm được chia thành 11054 phần tử tam giác. Kết quả mô phỏng được thể hiện trên Hình 7(d) và (e).



Hình 7. Tấm chịu kéo kích thước vô hạn có ba vết nứt giữa xếp theo phương đứng

Trường hợp này, cường độ kháng nứt K_I theo [18] được xác định như sau:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\alpha) = \frac{P_c}{W} \sqrt{\pi a} F(\alpha), \quad \alpha = \frac{2a}{d} = 0,4 \quad (30)$$

Ta tính được hệ số $F(\alpha) = 1 - (\pi\alpha/2)^2 + 0,375(\pi\alpha/4)^4 = 0,861$. Vậy theo phân tích [18], giá trị $P_c^{lt} = 25,2\text{ N}$. Giá trị lực tới hạn theo mô phỏng là $P_c^{mp} = 24,93\text{ N}$.

Từ đây ví dụ trên ta có bảng tổng hợp so sánh giá trị lực tới hạn P_c giữa phương pháp phân tích lý thuyết của [18] và phương pháp trường pha hiện tại. Kết quả so sánh cụ thể với sai số giữa hai phương

pháp được thể hiện trên Bảng 1.

Bảng 1. So sánh P_c giữa với phương pháp trường pha và tham chiếu [18] cho bảy loại kết cấu điển hình

Ví dụ	P_c^{lt} (N) theo [18]	P_c^{mp} (N) theo mô phỏng	Sai số (%)
3.1	14,994	15,67	4,5
3.2	19,513	19,65	0,7
3.3	0,341	0,335	1,76
3.4	21,699	20,79	4,19
3.5	19,348	18,97	1,95
3.6	40,348	39,75	1,48
3.7	25,2	24,93	1,08

Kết quả của Bảng 1 chỉ ra rằng sai số lớn nhất giữa hai phương pháp trong bảy ví dụ điển hình là 4,5% tương ứng với ví dụ đầu tiên, chứng tỏ phương pháp trường pha hiện tại là một công cụ hiệu quả để mô phỏng hư hỏng và dự đoán tải trọng tối hạn trong vật liệu giòn, đồng nhất.

4. Kết luận

Bài báo đã sử dụng phương pháp trường pha với hàm suy biến mới và điều kiện trực giao ten-xơ biến dạng để mô tả hư hỏng trong vật liệu giòn, đồng nhất. Từ các kết quả đạt được, ta có một vài kết luận sau:

Giá trị tải trọng tối hạn đạt được giữa hai phương pháp là tương tự nhau, sai số lớn nhất là 4,5% tương ứng với ví dụ đầu tiên của tấm chịu kéo kích thước hữu hạn có một vết nứt giữa.

Khác với các ví dụ còn lại với tải trọng phân bố đều ở mặt trên của kết cấu, trong ví dụ ba của dầm chịu kéo tách với tải trọng tập trung đặt ở mút hẫng của dầm, đường cong ứng xử xuất hiện một vài tải trọng đỉnh trong suốt quá trình mô phỏng, nhưng tải trọng đỉnh đầu tiên lớn nhất tương ứng với sự xuất hiện hư hỏng ở đầu vết nứt mới.

Trong tất cả các ví dụ, sự lan truyền của vết nứt ổn định, các đường cong ứng xử là tuyến tính trước khi vết nứt đầu tiên xuất hiện, phù hợp với ứng xử thực tế của vật liệu giòn.

Bài báo hiện tại chỉ nghiên cứu các ví dụ liên quan tới dạng hư hỏng do mở rộng vết nứt (dạng I) của cơ học phá hủy, các nghiên cứu tiếp theo có thể khảo sát hư hỏng của kết cấu liên qua tới vết nứt do cắt trượt (dạng II) và do xé (dạng III).

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2024-GHA-03.

Tài liệu tham khảo

- [1] Griffith, G. A. (1921). [The phenomena of rupture and flow in solid](#). *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 221(582–593):163–198.
- [2] Irwin, G. R. (1957). [Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate](#). *Journal of Applied Mechanics*, 24(3):361–364.
- [3] Dunn, M. L., Suwito, W., Cunningham, S. (1997). [Fracture initiation at sharp notches: Correlation using critical stress intensities](#). *International Journal of Solids and Structures*, 34(29):3873–3883.
- [4] Leguillon, D., Yosibash, Z. (2003). [Crack onset at a V-notch. Influence of the notch tip radius](#). *International Journal of Fracture*, 122(1/2):1–21.
- [5] Romani, R., Bornert, M., Leguillon, D., Le Roy, R., Sab, K. (2015). [Detection of crack onset in double cleavage drilled specimens of plaster under compression by digital image correlation – Theoretical predictions based on a coupled criterion](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 51:172–182.

- [6] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999). [A finite element method for crack growth without remeshing](#). *International journal for numerical methods in engineering*, 46(1):131–150.
- [7] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International journal for numerical methods in engineering*, 48(11): 1549–1570.
- [8] Miehe, C., Hofacker, M., Welschinger, F. (2010). [A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45–48):2765–2778.
- [9] Nguyen, T. T., Yvonnet, J., Bornert, M., Chateau, C., Sab, K., Romani, R., Le Roy, R. (2016). [On the choice of parameters in the phase field method for simulating crack initiation with experimental validation](#). *International Journal of Fracture*, 197(2):213–226.
- [10] Nguyen, T. T., Yvonnet, J., Zhu, Q.-Z., Bornert, M., Chateau, C. (2015). [A phase field method to simulate crack nucleation and propagation in strongly heterogeneous materials from direct imaging of their microstructure](#). *Engineering Fracture Mechanics*, 139:18–39.
- [11] Nguyen, T. T., Yvonnet, J., Zhu, Q.-Z., Bornert, M., Chateau, C. (2016). [A phase-field method for computational modeling of interfacial damage interacting with crack propagation in realistic microstructures obtained by microtomography](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312:567–595.
- [12] Vũ, B. T., Ngô, V. T., Bùi, T. T., Trần, T. T., Đỗ, A. T. (2021). [Mô phỏng sự hình thành và lan truyền vết nứt trong dầm bê tông cường độ cao có chất kết dính bổ sung nano silica bằng phương pháp phase field](#). *Tạp chí khoa học Giao thông vận tải*, 72(6):672–686.
- [13] Như, N. T. H., Bình, T. A. (2017). Khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng tới sự khởi tạo và phát triển vết nứt bằng phương pháp trường pha. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ Xây dựng*, 5:100–107.
- [14] Nguyen, H.-Q., Tran, B.-V., Vu, T.-S. (2022). [Numerical approach to predict the flexural damage behavior of pervious concrete](#). *Case Studies in Construction Materials*, 16:e00946.
- [15] Vũ, B. T., Trần, A. T., Nguyễn, Đ. H. (2021). [Mô phỏng sự lan truyền vết nứt trong kết cấu nhiều pha vật liệu bằng phương pháp phase field có xét tới hư hỏng mặt phân giới giữa các pha](#). *Transport and Communications Science Journal*, 72(8):893–907.
- [16] He, Q.-C., Shao, Q. (2019). [Closed-form coordinate-free decompositions of the two-dimensional strain and stress for modeling tension–compression dissymmetry](#). *Journal of Applied Mechanics*, 86(3).
- [17] Sargado, J. M., Keilegavlen, E., Berre, I., Nordbotten, J. M. (2018). [High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions](#). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 111:458–489.
- [18] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R. (2000). *The stress analysis of cracks handbook*. Third edition, American Society of Mechanical Engineers Press, New York.
- [19] Vu, B.-T., Quang, H. L., He, Q.-C. (2022). [Modelling and simulation of fracture in anisotropic brittle materials by the phase-field method with novel strain decompositions](#). *Mechanics Research Communications*, 124:103936.
- [20] Phần mềm GMSH. <https://gmsh.info>. Truy cập ngày 15/05/2024.