

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA KẾT CẤU TẤM FGM CÓ KÍCH THƯỚC MICRO ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Nguyễn Văn Lợi^{a,*}, Đặng Xuân Hùng^a, Đoàn Quốc Cường^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 29/5/2024, Sửa xong 02/7/2024, Chấp nhận đăng 12/7/2024

Tóm tắt

Bài báo xây dựng lời giải giải tích cho bài toán dao động riêng của tấm chữ nhật ở kích cỡ micro đặt trên nền đàn hồi. Trong đó, tấm micro được làm từ vật liệu có cơ tính biến thiên – FGM (Functionally graded material), các đặc tính cơ học của vật liệu được tính toán dựa trên quy tắc hỗn hợp. Các phương trình chủ đạo của bài toán dao động riêng của tấm FGM kích cỡ micro (FGM micro) đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton, lý thuyết tấm cải tiến bốn ẩn, và lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh. Phương pháp Navier được sử dụng để xác định tần số dao động riêng của tấm FGM micro có biên tựa khớp trên chu vi. Kết quả số của bài toán tấm FGM micro được kiểm chứng với các nghiên cứu gần đây trên các tạp chí hiện hành. Sau đó, các khảo sát số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hiệu ứng kích thước, kích thước hình học tấm và hệ số nền đàn hồi đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro.

Từ khóa: phân tích dao động riêng; tấm FGM micro; lý thuyết cải tiến bốn ẩn chuyển vị; nền đàn hồi Winkler-Pasternak; phương pháp Navier.

FREE VIBRATION OF FGM MICROPLATES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

Abstract

This article develops an analytical solution for the free vibration problem of rectangular microplates placed on an elastic foundation. The microplate is made from functionally graded material - FGM and its material properties are estimated based on the mixture rule. The governing equations of the free vibration problem of the FGM microplate resting on the Winkler-Pasternak elastic foundation are derived based on Hamilton's principle, the four-unknown refined plate theory, and the modified couple stress theory. The Navier solution method is used to determine the natural frequency of the FGM microplate under simply supported boundary conditions. The present results of the FGM microplate are verified with recent studies in the existing literature. Then, numerical investigations are performed to evaluate the influence of material parameters, size-dependent effect, geometric parameters, and elastic foundation coefficients on the natural vibration frequency of the FGM microplates.

Keywords: free vibration; FGM microplates; four-variable refined plate theory; Winkler-Pasternak elastic foundation; Navier method.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(3V\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(3V)-03) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Ngày nay, với sự phát triển nhanh chóng của khoa học và công nghệ, việc sử dụng các cấu trúc nano/micro ngày càng trở nên phổ biến trong nhiều lĩnh vực khác nhau như vi cảm biến/thiết bị truyền động, điện tử, tự động hóa, các hệ thống nano điện cơ (NEMS), hệ thống vi cơ điện (MEMS), kỹ thuật y sinh [1, 2] ... Xu hướng này đang đặt ra những thách thức mới cho các nhà khoa học trong việc mô hình hóa và phân tích ứng xử cơ học của các kết cấu micro/nano trong các điều kiện khác nhau. Cụ thể, đối với kết cấu ở kích cỡ micro/nano thì các nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm đều chỉ ra rằng

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: loinv@huce.edu.vn (Lợi, N. V.)

lý thuyết của cơ học môi trường liên tục cổ điển (không phụ thuộc vào kích thước) không còn phù hợp. Bên cạnh đó, vật liệu có cơ tính biến thiên-FGM là vật liệu thường được tạo thành từ hai vật liệu thành phần có các đặc tính khác nhau để hình thành nên vật liệu composite có các ưu điểm kết hợp của chúng. Do các đặc tính độc đáo của vật liệu có cơ tính biến thiên so với các vật liệu thông thường (ví dụ: độ bền cao, độ dẻo dai cao, khả năng chịu nhiệt và khả năng chống ăn mòn cao), vậy nên các nghiên cứu về kết cấu làm bằng vật liệu FGM đã dành được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong những thập kỷ gần đây. Nhiều bài báo nghiên cứu đã được công bố về ứng xử cơ học của kết cấu FGM, chúng có thể được tìm thấy trong các bài báo [3–8]. Do vậy, kết cấu tấm FGM micro sẽ là đối tượng nghiên cứu của bài báo này.

Để tính toán kết cấu micro, lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST (Modified couple stress theory) và lý thuyết gradient biến dạng hiệu chỉnh MSGT (Modified Strain Gradient Theory) thường được sử dụng phổ biến hiện nay. Trong đó, lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST do Yang và cs. [9] giới thiệu có ưu điểm là chỉ dùng duy nhất một tham số liên quan đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước. Dựa trên cơ sở của lý thuyết MCST này, nhiều mô hình tính toán kết cấu tấm micro đã được xây dựng. Chẳng hạn như, các tác giả Yin và cs. [10], Jomehzadeh và cs. [11] đã xây dựng mô hình tấm cổ điển Kirchhoff để phân tích dao động riêng của tấm micro dùng lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST. Reddy và Berry [12] đã nghiên cứu bài toán uốn đối xứng trục của tấm tròn FGM micro dựa trên lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST. Dùng mô hình lý thuyết tấm Mindlin và lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST, các ứng xử cơ học của tấm micro đã được nghiên cứu bởi Ke và cs. [13], Zhou và Gao [14]. Mặt khác, các lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao được sử dụng rộng rãi hiện nay [15], đặc biệt là lý thuyết tấm cải tiến bốn ẩn số chuyển vị là một lựa chọn hợp lý vì sự đơn giản và hiệu quả về mặt tính toán [16, 17]. Cũng đã có một số nghiên cứu sử dụng lý thuyết cải tiến bốn ẩn số và lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST để tính toán cho kết cấu tấm micro, chẳng hạn như, Lou và cs. [18] đã trình bày phân tích phi tuyến về tần số dao động và uốn tĩnh của tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi. Nguyen và Lee [16] cũng đã sử dụng mô hình lý thuyết này để phân tích kết cấu tấm micro áp điện. Do vậy, lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST kết hợp với lý thuyết cải tiến bốn ẩn số sẽ được dùng trong nghiên cứu của bài báo này.

Có nhiều phương pháp tính toán kết cấu như phương pháp phần tử hữu hạn, phân tích dạng hình học (IGA), phương pháp giải tích, bán giải tích, ... chúng là những phương pháp được sử dụng rộng rãi trong nhiều nghiên cứu gần đây. Mặc dù gặp khó khăn khi giải bài toán có hình dạng kết cấu và điều kiện biên phức tạp, tuy nhiên phương pháp giải tích dùng lời giải Navier là một trong những công cụ đáng tin cậy có thể cung cấp kết quả chính xác mà tốn ít tài nguyên tính toán đối với các kết cấu dầm/tấm/vỏ có cấu hình và điều kiện biên đơn giản [19]. Do đó, phương pháp Navier được sử dụng để tính toán kết cấu tấm FGM micro trong nghiên cứu này.

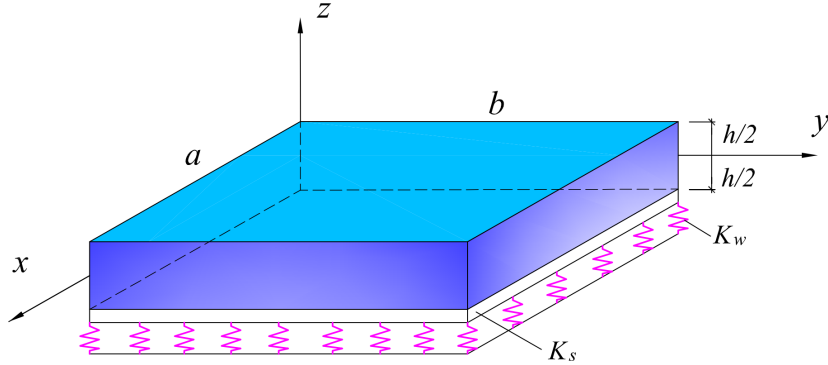
Dựa trên tìm hiểu tổng quan ở trên, chúng ta có thể thấy rằng nghiên cứu về dao động riêng của kết cấu tấm FGM ở kích cỡ micro đặt trên nền đàn hồi khá là hiếm, đặc biệt là dùng lý thuyết cải tiến bốn ẩn [20]. Do vậy, phân tích dao động riêng của kết cấu tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak sẽ được trình bày chi tiết. Các phương trình chủ đạo của bài toán được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton, lý thuyết tấm cải tiến bốn ẩn, và lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST. Ở phần các kết quả số, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hiệu ứng kích thước, kích thước hình học tấm và hệ số nền đàn hồi đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro được trình bày chi tiết.

2. Cơ sở lý thuyết và lời giải

2.1. Mô hình tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi

Xét một tấm micro có chiều rộng là a , chiều dài là b , và chiều dày là h tương ứng theo các phương x, y , và z của hệ trục tọa độ, như Hình 1. Tấm micro được làm bằng vật liệu FGM (vật liệu có cơ tính

biến thiên với mặt trên giàu gốm – ceramic và mặt dưới giàu kim loại – metal) và được đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak.



Hình 1. Mô hình tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak

Mô đun đàn hồi, khối lượng riêng của vật liệu FGM được giả thiết thay đổi theo chiều dày của tấm với quy luật hàm lũy thừa như sau [21]:

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m, \quad -0.5h \leq z \leq 0.5h \quad (1)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m, \quad -0.5h \leq z \leq 0.5h \quad (2)$$

trong đó các chỉ số dưới “c” và “m” biểu thị các đại lượng tương ứng của thành phần gốm (ceramic) ở mặt trên và kim loại (metal) ở mặt dưới của tấm; p là chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu. Hệ số Poisson được giả thiết là hằng số trong nghiên cứu này.

2.2. Lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST

Theo lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST, thế năng biến dạng của tấm FGM micro được xác định bởi [22]:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (3)$$

trong đó σ_{ij} là các thành phần ten xơ ứng suất, ε_{ij} là các thành phần ten xơ biến dạng, m_{ij} là thành phần lệch của ten xơ cặp ứng suất. Các thành phần ten xơ độ cong đối xứng, χ_{ij} , được định nghĩa bởi:

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial X_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

trong đó Φ_i là các thành phần của véc tơ quay, chúng được xác định như sau:

$$\Phi_x = \Phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_2} - \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \right) \quad (5)$$

$$\Phi_y = \Phi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} - \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right) \quad (6)$$

$$\Phi_z = \Phi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_1} - \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right) \quad (7)$$

ở đây U_1, U_2 và U_3 , là các thành phần chuyển vị theo các phương của hệ trục tọa độ (X_1, X_2, X_3) .

2.3. Trường chuyển vị

Dựa trên lý thuyết tấm cải tiến bốn ần chuyển vị, trường chuyển vị của tấm FGM micro được xác định bởi [20]:

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, t) - zW_{b,x} - f(z)W_{s,x} \quad (8)$$

$$U_2(x, y, z, t) = V(x, y, t) - zW_{b,y} - f(z)W_{s,y} \quad (9)$$

$$U_3(x, y, z, t) = W_b(x, y, t) + W_s(x, y, t) \quad (10)$$

trong đó U_1, U_2 và U_3 là các thành phần chuyển vị của một điểm theo các phương x, y , và z của hệ tọa độ. Dấu chỉ số dưới (\cdot) là đạo hàm của hàm số theo biến tương ứng. Các ký hiệu U, V là các thành phần chuyển vị trên mặt trung bình của tấm theo các phương x, y . Theo lý thuyết tấm cải tiến bốn ần, W_b và W_s là hai thành phần uốn và thành phần cắt của độ võng U_3 . Hiện nay có nhiều phiên bản của lý thuyết cải tiến bốn ần với các hàm $f(z)$ khác nhau. Trong nghiên cứu này, hàm được sử dụng là $f(z) = -\frac{z}{8} + \frac{3}{2}\left(\frac{z^3}{h^2}\right)$ [20].

2.4. Các thành phần biến dạng

Mối quan hệ biến dạng-chuyển vị của tấm FGM micro được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (11)$$

trong đó $g(z) = 1 - f'(z)$ và

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{,x} \\ V_{,y} \\ U_{,y} + V_{,x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -W_{b,xx} \\ -W_{b,yy} \\ -2W_{b,xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -W_{s,xx} \\ -W_{s,yy} \\ -2W_{s,xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{s,y} \\ W_{s,x} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Thế trường chuyển vị (8)–(10) vào các biểu thức (5)–(7), ta được

$$\Phi_x = W_{b,y} + \frac{1}{2}(1 + f_{,z})W_{s,y} \quad (14)$$

$$\Phi_y = -W_{b,x} - \frac{1}{2}(1 + f_{,z})W_{s,x} \quad (15)$$

$$\Phi_z = \frac{1}{2}(V_{,x} - U_{,y}) \quad (16)$$

Tương tự, thế các biểu thức (14)–(16) vào biểu thức (4), ta được các thành phần của ten xơ độ cong (the curvature tensor), chúng được biểu diễn dưới dạng:

$$\chi_{xx} = \chi_{xx}^0 + (1 + f_{,z})\chi_{xx}^1; \quad \chi_{yy} = \chi_{yy}^0 + (1 + f_{,z})\chi_{yy}^1; \quad \chi_{zz} = 0 \quad (17)$$

$$\chi_{xy} = \chi_{xy}^0 + (1 + f_{,z})\chi_{xy}^1; \quad \chi_{yz} = \chi_{yz}^0 + f_{,zz}\chi_{yz}^1; \quad \chi_{xz} = \chi_{xz}^0 + f_{,zz}\chi_{xz}^1 \quad (18)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^0 &= W_{b,xy}; & \chi_{xx}^1 &= \frac{1}{2}W_{s,xy}; & \chi_{yy}^0 &= -W_{b,xy}; & \chi_{yy}^1 &= -\frac{1}{2}W_{s,xy} \\ \chi_{xy}^0 &= \frac{1}{2}(W_{b,yy} - W_{b,xx}); & \chi_{xy}^1 &= \frac{1}{4}(W_{s,yy} - W_{s,xx}) \\ \chi_{yz}^0 &= \frac{1}{4}(V_{,xy} - U_{,yy}); & \chi_{yz}^1 &= -\frac{1}{4}W_{s,x} \\ \chi_{xz}^0 &= \frac{1}{4}(V_{,xx} - U_{,xy}); & \chi_{xz}^1 &= \frac{1}{4}W_{s,y} \end{aligned} \quad (19)$$

2.5. Các thành phần ứng suất

Các thành phần ứng suất trong tấm FGM micro được xác định như sau [21]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}(z) & e_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ e_{12}(z) & e_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{66}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{55}(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ m_{yz} \\ m_{xz} \end{pmatrix} = 2G(z) l_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \\ \chi_{yz} \\ \chi_{xz} \end{pmatrix} \quad (21)$$

trong đó l_0 là tham số dùng để đánh giá ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước ($l_0 = 17,6 \times 10^{-6}$ m), và

$$e_{11}(z) = e_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}; \quad e_{12}(z) = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2}; \quad e_{66}(z) = e_{44}(z) = e_{55}(z) = G(z) = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} \quad (22)$$

2.6. Các thành phần ứng lực

Các thành phần ứng lực trong tấm FGM micro được định nghĩa như sau:

$$(N_j, M_j^b, M_j^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_j(1, z, f) dz, \quad j = xx, yy, xy \quad (23)$$

$$Q_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g\sigma_j dz, \quad j = yz, xz \quad (24)$$

$$P_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_j dz, \quad j = xx, yy, xy, yz, xz \quad (25)$$

$$R_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 + f_{,z}) m_j dz, \quad j = xx, yy, xy \quad (26)$$

$$S_j = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_{,zz} m_j dz, \quad j = yz, xz \quad (27)$$

Thế các biểu thức (11), (17), (18) vào các biểu thức ứng suất (20)–(21), kết quả đạt được sau đó ta thế tiếp vào các biểu thức ứng lực (23)–(27). Các thành phần ứng lực của tấm FGM micro được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & 0 \\ \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & 0 \\ \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} & 0 \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & 0 \\ \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & 0 \\ \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^b \\ k_{yy}^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & 0 \\ \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx}^s \\ k_{yy}^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{44}^s & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \tilde{A}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^0 \\ \chi_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \tilde{B}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{yz} \\ P_{xz} \end{Bmatrix} = \tilde{A}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^0 \\ \chi_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \tilde{C}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_{xy} \end{Bmatrix} = \tilde{B}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^0 \\ \chi_{yy}^0 \\ \chi_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \tilde{D}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx}^1 \\ \chi_{yy}^1 \\ \chi_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz} \\ S_{xz} \end{Bmatrix} = \tilde{C}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^0 \\ \chi_{xz}^0 \end{Bmatrix} + \tilde{G}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{yz}^1 \\ \chi_{xz}^1 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

trong đó các hệ số $(\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \tilde{D}_{ij}, \tilde{C}_{ij}, \tilde{F}_{ij}, \tilde{G}_{ij}, \tilde{A}_{ij}^s)$ của ma trận và các đại lượng $(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{D}_n, \tilde{C}_n, \tilde{G}_n)$ được xác định bởi:

$$(\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \tilde{D}_{ij}, \tilde{C}_{ij}, \tilde{F}_{ij}, \tilde{G}_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f, zf, f^2) e_{ij}(z) dz, \quad (ij = 11, 12, 22, 66) \quad (36)$$

$$\tilde{A}_{ij}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} g(z)^2 e_{ij}(z) dz, \quad (ij = 44, 55) \quad (37)$$

$$(\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{D}_n, \tilde{C}_n, \tilde{G}_n) = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} 2G(z) l_0^2 \{1, (1 + f_z), (1 + f_z)^2, f_{zz}, f_{zz}^2\} dz \quad (38)$$

2.7. Các phương trình cân bằng

Trong bài báo này, nguyên lý Hamilton được sử dụng để thiết lập phương trình chủ đạo của bài toán dao động riêng của tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi, dạng giải tích của nguyên lý được viết như sau:

$$0 = \int_0^t \delta(\hat{U} + \hat{U}_f - \hat{T}) dt \quad (39)$$

trong đó, thể năng biến dạng của tấm FGM micro được xác định bởi [22–24]:

$$\begin{aligned} \hat{U} = \frac{1}{2} \int_A & \left(N_x \epsilon_{xx}^0 + N_y \epsilon_{yy}^0 + N_{xy} \epsilon_{xy}^0 + M_x^b k_{xx}^b + M_y^b k_{yy}^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_{xx}^s + M_y^s k_{yy}^s \right. \\ & + M_{xy}^s k_{xy}^s + Q_{yz} \gamma_{yz}^s + Q_{xz} \gamma_{xz}^s + P_x \chi_{xx}^0 + R_x \chi_{xx}^1 + P_y \chi_{yy}^0 + R_y \chi_{yy}^1 \\ & \left. + 2P_{xy} \chi_{xy}^0 + 2R_{xy} \chi_{xy}^1 + 2P_{yz} \chi_{yz}^0 + 2S_{yz} \chi_{yz}^1 + 2P_{xz} \chi_{xz}^0 + 2S_{xz} \chi_{xz}^1 \right) dA \end{aligned} \quad (40)$$

Năng lượng biến dạng của nền đàn hồi được xác định bởi:

$$\hat{U}_f = \frac{1}{2} \int_A \left\{ K_w (W_b + W_s)^2 + K_s \left[(W_{b,x} + W_{s,x})^2 + (W_{b,y} + W_{s,y})^2 \right] \right\} dA \quad (41)$$

trong đó A là diện tích của mặt trung bình tấm; K_w là hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness) và K_s là hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).

Động năng của tấm FGM micro được xác định bởi:

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left[(\dot{U} - z\dot{W}_{b,x} - f\dot{W}_{s,x})^2 + (\dot{V} - z\dot{W}_{b,y} - f\dot{W}_{s,y})^2 + (\dot{W}_b + \dot{W}_s)^2 \right] dz dA \quad (42)$$

Thế các biểu thức (40)–(42) vào (39), sau đó nhóm các hệ số của các biến phân $\delta U, \delta V, \delta W_b$, và δW_s ; ta thu được phương trình chủ đạo của bài toán phân tích dao động riêng của tấm FGM micro như sau:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} + \frac{1}{2} (P_{xz,xy} + P_{yz,yy}) = \tilde{J}_0 \ddot{U} - \tilde{J}_1 \ddot{W}_{b,x} - \tilde{K}_1 \ddot{W}_{s,x} \quad (43)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} - \frac{1}{2} (P_{xz,xx} + P_{yz,xy}) = \tilde{J}_0 \ddot{V} - \tilde{J}_1 \ddot{W}_{b,y} - \tilde{K}_1 \ddot{W}_{s,y} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx}^b + 2M_{xy,xy}^b + M_{y,yy}^b - K_w (W_b + W_s) + K_s \nabla^2 (W_b + W_s) - P_{x,xy} + P_{y,xy} \\ - P_{xy,yy} + P_{xy,xx} = \tilde{J}_0 (\ddot{W}_b + \ddot{W}_s) + \tilde{J}_1 (\ddot{U}_{,x} + \ddot{V}_{,y}) - \tilde{J}_2 \nabla^2 \ddot{W}_b - \tilde{K}_2 \nabla^2 \ddot{W}_s \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx}^s + 2M_{xy,xy}^s + M_{y,yy}^s + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} - K_w (W_b + W_s) \\ + K_s \nabla^2 (W_b + W_s) + \frac{1}{2} (-R_{x,xy} + R_{y,xy} - R_{xy,yy} + R_{xy,xx}) + \frac{1}{2} (S_{xz,y} - S_{yz,x}) \\ = \tilde{J}_0 (\ddot{W}_b + \ddot{W}_s) + \tilde{K}_1 (\ddot{U}_{,x} + \ddot{V}_{,y}) - \tilde{K}_2 \nabla^2 \ddot{W}_b - \tilde{L}_2 \nabla^2 \ddot{W}_s \end{aligned} \quad (46)$$

trong đó toán tử

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (47)$$

Các tham số ($\tilde{J}_0, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2$) được xác định bởi

$$(\tilde{J}_0, \tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f, fz, f^2) \rho(z) dz \quad (48)$$

3. Lời giải Navier

Trong phần này, lời giải Navier được trình bày cho bài toán dao động của tấm FGM chữ nhật đặt trên nền đàn hồi, có bốn biên tựa khớp trên chu vi. Theo lời giải Navier, bốn ẩn chuyển vị của bài toán được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau [21]:

$$U(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\tilde{\alpha}x) \sin(\tilde{\beta}y) \quad (49)$$

$$V(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\tilde{\alpha}x) \cos(\tilde{\beta}y) \quad (50)$$

$$W_b(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\tilde{\alpha}x) \sin(\tilde{\beta}y) \quad (51)$$

$$W_s(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\tilde{\beta}y) \quad (52)$$

trong đó, ω là tần số dao động riêng của hệ; $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$ là các hệ số của các thành phần chuyển vị; t là biến thời gian; $\tilde{\alpha} = m\pi/a, \tilde{\beta} = n\pi/b$ và i là số phức $i^2 = -1$.

Thế các biểu thức chuyển vị (49)–(52) vào các phương trình chủ đạo (43)–(46) của bài toán, ta thu được hệ phương trình đại số có dạng:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Delta = \mathbf{0} \quad (53)$$

trong đó \mathbf{K}, \mathbf{M} là các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của hệ; và $\Delta = (U_{mn} V_{mn} W_{bmn} W_{smn})^T$ là véc tơ hệ số của chuyển vị. Khi giải bài toán trị riêng (53), với mỗi cặp (m, n) ta sẽ tìm được tần số dao động riêng ω_{mn} tương ứng với mode dao động (m, n) của tấm. Tần số dao động riêng cơ bản là tần số nhỏ nhất của tấm $\omega = \min(\omega_{mn})$. Cũng lưu ý rằng khi cho tham số $l_0 = 0$, ta sẽ thu được kết quả tần số dao động riêng của tấm FGM macro truyền thống.

4. Kết quả số

Dựa trên cơ sở lý thuyết và lời giải đã xây dựng ở các mục trước. Kết quả tần số dao động riêng của bài báo sẽ được kiểm chứng với kết quả của các tác giả khác công bố gần đây. Ngoài ra, ảnh hưởng các tham số đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro đặt trên nền đàn hồi cũng sẽ được khảo sát.

Bảng 1. Một số đặc trưng cơ học của các vật liệu thành phần của tấm FGM micro

Vật liệu	Các đặc trưng cơ học vật liệu
Nhôm (Al)	$E_m = 70$ (GPa), $\rho_m = 2702$ (kg/m ³), $\nu_m = 0,3$
Nhôm oxít (Al ₂ O ₃)	$E_c = 380$ (GPa), $\rho_c = 3800$ (kg/m ³), $\nu_c = 0,3$
Zirconi oxít (ZrO ₂)	$E_c = 151$ (GPa), $\rho_c = 3000$ (kg/m ³), $\nu_c = 0,3$

Trong các phần tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng các tham số vật liệu như thể hiện ở Bảng 1. Ngoài ra, các tham số tần số dao động riêng không thứ nguyên và các hệ số nền đàn hồi được sử dụng trong bài báo như sau:

$$\bar{\omega} = 100\omega h \sqrt{\rho_c/E_c}; \quad \bar{K}_w = \frac{K_w a^4}{D_m}; \quad \bar{K}_s = \frac{K_s a^2}{D_m}; \quad D_m = \frac{E_m h^3}{12(1 - \nu_m^2)} \quad (54)$$

4.1. Kiểm chứng kết quả

a. Kiểm chứng tần số dao động riêng của tấm FGM đặt trên nền đàn hồi

Trong mục này, kết quả tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ của tấm FGM macro truyền thống được làm từ Al/Al₂O₃ đặt trên nền đàn hồi được so sánh với kết quả của tác giả Thai và Choi [23]. Ở đây, các kết quả tần số cơ bản $\hat{\omega}$ của tấm FGM vuông với các tỷ lệ chiều dày khác nhau và các chỉ số thể tích khác nhau ($p = 0; 0,5; 1; 2; 5$) được so sánh và thể hiện ở Bảng 2. Ta thấy rằng kết quả của bài báo dùng lý thuyết cải tiến bốn ẩn chuyển vị với hàm $f(z) = -\frac{z}{8} + \frac{3}{2} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$ là rất sát với kết quả của tác giả Thai và Choi [23] sử dụng lý thuyết bốn ẩn chuyển vị với hàm $f(z) = -\frac{z}{4} + \frac{5z^3}{3h^2}$, dùng lời giải Levy.

Bảng 2. Bảng so sánh tần số dao động riêng cơ bản $\hat{\omega}$ của tấm FGM macro đặt trên nền đàn hồi

\bar{K}_w	\bar{K}_s	a/h	Nguồn	Chỉ số tỷ lệ thể tích (p)				
				0	0,5	1	2	5
100	100	20	Thai và Choi [23]	0,0411	0,0392	0,0384	0,0381	0,0384
			Bài báo	0,0411	0,0392	0,0384	0,0381	0,0384
		10	Thai và Choi [23]	0,1619	0,1550	0,1520	0,1505	0,1515
			Bài báo	0,1617	0,1549	0,1519	0,1505	0,1515
		5	Thai và Choi [23]	0,6162	0,5954	0,5855	0,5802	0,5835
			Bài báo	0,6156	0,5950	0,5852	0,5800	0,5834

b. Kiểm chứng tần số dao động riêng của tấm FGM micro

Trong mục này, kết quả tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\tilde{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho_c/E_c}$ của tấm FGM vuông ở kích cỡ micro, được làm từ vật liệu Al/Al₂O₃ được so sánh với kết quả của tác giả Thai và Kim [21]. Các kết quả của tấm FGM micro với tỷ số chiều dày $a/h = 20$ và các chỉ số thể tích khác nhau ($p = 0; 0,5; 1; 5; 10$) được so sánh và liệt kê ở Bảng 3. Ta thấy rằng kết quả của bài báo dùng lý thuyết cải tiến bốn ẩn là trùng khớp với kết quả của tác giả Thai và Kim [21] dùng thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy. Lý thuyết cải tiến bốn ẩn với hàm $f(z) = -\frac{z}{8} + \frac{3}{2} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$ cũng là một dòng

Bảng 3. Bảng so sánh tần số dao động riêng cơ bản $\tilde{\omega}$ của tấm FGM micro

a/h	l_0/h	Nguồn	Chỉ số tỷ lệ thể tích (p)				
			0	0,5	1	5	10
20	0	Thai và Kim [21]	5,9199	5,0180	4,5228	3,8884	3,7622
		Bài báo	5,9199	5,0180	4,5228	3,8884	3,7622
	0,4	Thai và Kim [21]	7,6708	6,6585	6,0756	5,0199	4,7488
		Bài báo	7,6708	6,6585	6,0756	5,0199	4,7488
	1	Thai và Kim [21]	13,5545	12,0372	11,1042	8,8286	8,1494
		Bài báo	13,5545	12,0372	11,1042	8,8286	8,1494

lý thuyết biến dạng cắt bậc ba dạng đa thức tương đồng với lý thuyết của Reddy (với cùng phương pháp giải Navier) cho nên kết quả giữa chúng là không có khác biệt ở ví dụ này.

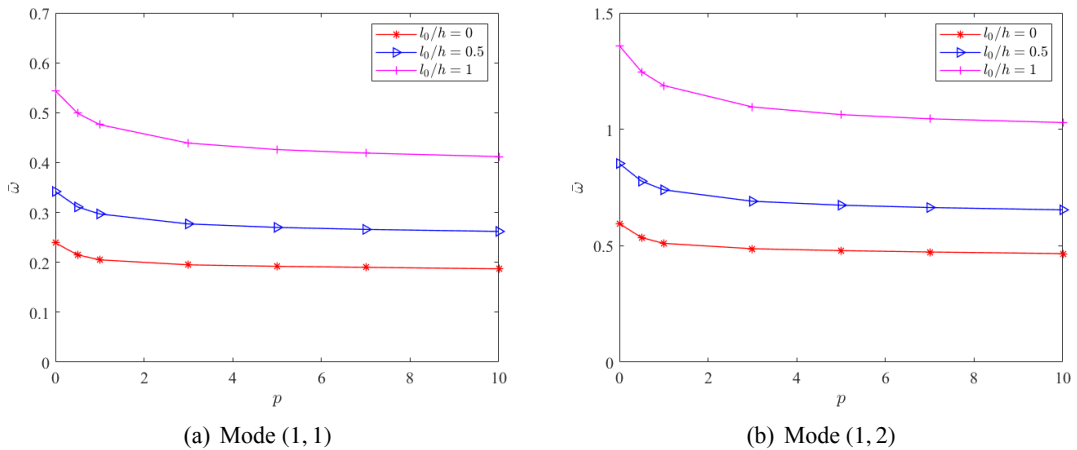
Từ hai ví dụ kiểm chứng ở trên, có thể thấy rằng mô hình lý thuyết và phương pháp giải được trình bày trong bài báo là có độ tin cậy cao. Chúng sẽ được sử dụng để khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hiệu ứng kích thước, kích thước hình học tấm, và tham số nền đàn hồi đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro.

4.2. Khảo sát các tham số

Trong mục này, các khảo sát số sẽ được tiến hành cho tấm FGM micro được làm từ hai vật liệu thành phần Al/ZrO₂, các đặc tính vật liệu của chúng được liệt kê ở Bảng 1.

a. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích

Để khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro, tác giả đã tiến hành xác định tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro với các chỉ số tỷ lệ thể tích p khác nhau, kết quả được thể hiện trên Hình 2(a)–(b). Tấm FGM micro khảo sát có $b/a = 1, a/h = 50, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$ và các tham số hiệu ứng kích thước $l_0/h = 0; 0,5; 1$. Rõ ràng, kết quả Hình 2 thể hiện rằng khi tăng chỉ số thể tích p (hàm lượng gốm-ceramic giảm) thì tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro giảm trong cả trường hợp tấm FGM macro truyền thống ($l_0/h = 0$) và trường hợp tấm FGM micro (có kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước). Điều này là do thành phần gốm là thành phần cứng hơn thành phần kim loại nên độ cứng tấm sẽ giảm đi khi hàm lượng gốm trong tấm FGM giảm.



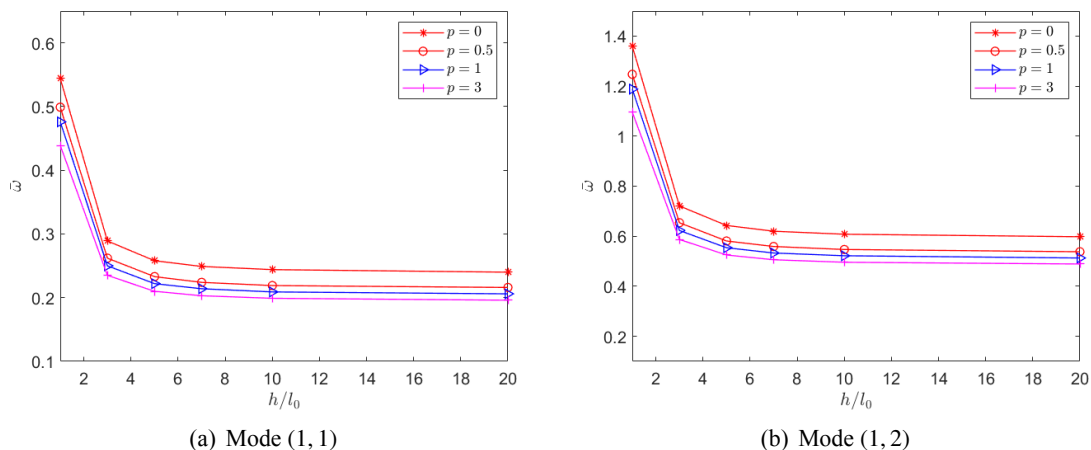
Hình 2. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro

b. Ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước

Để khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro, tác giả đã tiến hành xác định tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm micro FGM với các tỷ số h/l_0 khác nhau (tỷ số thể hiện ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước). Kết quả được thể hiện bằng đồ thị như trên Hình 3(a)–(b). Tấm FGM micro khảo sát có $b/a = 1, a/h = 50, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$ và các chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 0; 0,5; 1; 3$ được chọn để minh họa.

Các kết quả cho thấy rằng khi tăng tỷ số h/l_0 (tăng chiều dày, kích thước tấm) thì tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro giảm khá mạnh ở giai đoạn đầu. Đặc biệt, khi kích thước tấm FGM micro càng bé thì tần số dao động riêng (hay độ cứng) của tấm càng lớn và như vậy ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước càng lớn; và khi $h/l_0 > 10$ thì ta thấy tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro thay

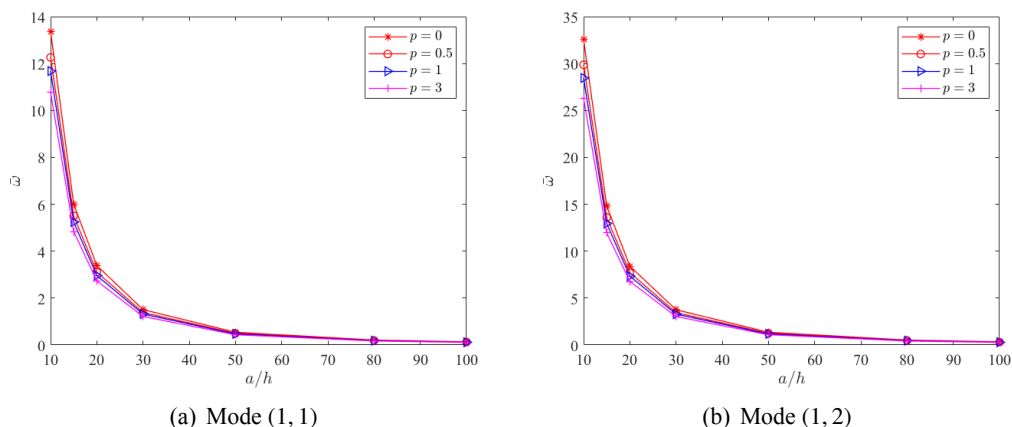
đổi không đáng kể và chúng tiệm cận tới giá trị của tấm macro truyền thống, điều này cho thấy tấm micro có kích thước càng lớn thì kết quả càng gần với lý thuyết tấm macro thông thường (ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến kết quả lúc này là không đáng kể). Ngoài ra, cũng như ở mục trước, khi tăng chỉ số tỷ lệ thể tích p thì tần số cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro giảm.



Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ số h/l_0 đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro

c. Ảnh hưởng của tỷ số a/h

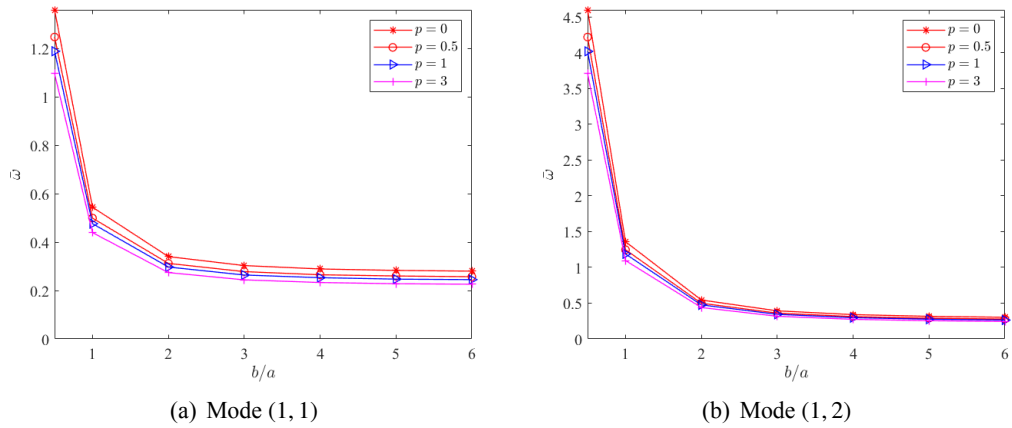
Trong mục này, ảnh hưởng của tỷ số chiều dài a/h đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro được khảo sát và thể hiện như trên Hình 4(a)–(b). Tấm FGM micro khảo sát có $b/a = 1, l_0/h = 1, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$ và chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 0; 0,5; 1; 3$. Rõ ràng, ta thấy rằng khi tăng tỷ số a/h thì tần số dao động riêng cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro giảm, đặc biệt là giảm khá mạnh ở giai đoạn đầu khi tỷ số $a/h < 20$.



Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ số a/h đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro

d. Ảnh hưởng của tỷ số b/a

Trong mục này ảnh hưởng của tỷ số kích thước b/a đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro được trình bày, và kết quả thể hiện trên Hình 5(a)–(b). Tấm FGM micro khảo sát có $a/h = 50, l_0/h = 1, \bar{K}_w = 0, \bar{K}_s = 0$ và chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 0; 0,5; 1; 3$. Rõ ràng là, khi tăng tỷ số kích thước cạnh b/a thì tần số dao động riêng của tấm FGM micro giảm. Điều này cũng tương tự với các khảo sát của tấm macro truyền thống.

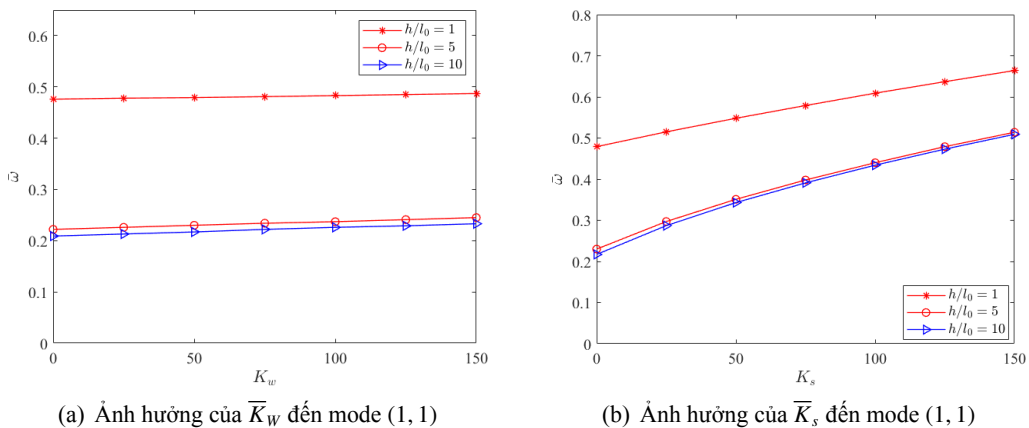


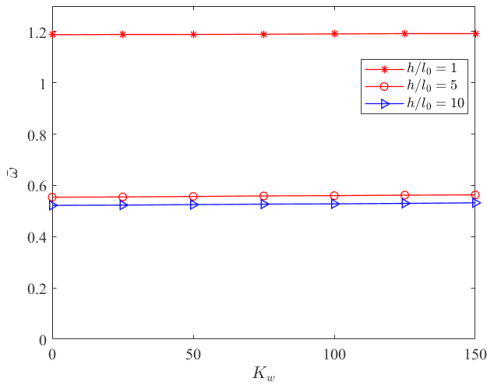
Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số b/a đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro

e. Ảnh hưởng của tham số nền đàn hồi

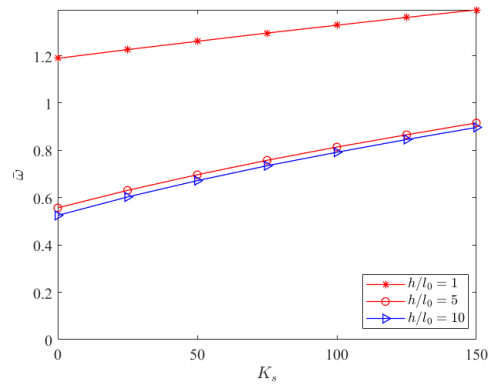
Để khảo sát ảnh hưởng của tham số nền đàn hồi \bar{K}_w đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro, tác giả đã tiến hành xác định tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro khi cho hệ số nền \bar{K}_w thay đổi từ 0 đến 150 trong khi hệ số $\bar{K}_s = 0$ và ba trường hợp $h/l_0 = 1, 5$ và 10 được xét. Kết quả tần số được thể hiện tương ứng cho mode (1, 1) và mode (1, 2) như trên Hình 6(a), (c). Tấm FGM micro khảo sát có $b/a = 1, a/h = 50$ và chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 1$. Rõ ràng, từ kết quả số ta thấy rằng hệ số nền \bar{K}_w ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro, đặc biệt ảnh hưởng của nền đàn hồi càng giảm khi kích thước tấm FGM micro càng bé (tỷ số h/l_0 bé).

Để khảo sát ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi \bar{K}_s đến tần số dao động riêng cơ bản $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro, tác giả đã tiến hành xác định tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của mode (1, 1) và mode (1, 2) tấm FGM micro khi cho \bar{K}_s thay đổi từ 0 đến 150 trong khi giữ nguyên hệ số nền $\bar{K}_w = 50$ và ba trường hợp $h/l_0 = 1, 5$ và 10 được xét. Kết quả tần số của mode (1, 1) và mode (1, 2) được trình bày tương ứng ở các Hình 6(b), (d). Tấm FGM micro khảo sát có $b/a = 1, a/h = 50$ và chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 1$. Rõ ràng là, so với hệ số nền \bar{K}_w , thì hệ số nền \bar{K}_s ảnh hưởng rõ rệt hơn và đáng kể hơn đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của tấm FGM micro. Cũng vậy, ảnh hưởng của hệ số nền \bar{K}_s càng giảm khi tấm FGM micro càng nhỏ (tỷ số h/l_0 bé).





(c) Ảnh hưởng của \bar{K}_w đến mode (1, 2)



(d) Ảnh hưởng của \bar{K}_s đến mode (1, 2)

Hình 6. Ảnh hưởng của các hệ số nền đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro

5. Kết luận

Bài báo đã xây dựng lời giải giải tích cho bài toán dao động riêng của tấm chữ nhật FGM ở kích cỡ micro đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak, có bốn biên tựa khớp trên chu vi. Các phương trình chủ đạo của bài toán được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton, lý thuyết cải tiến bốn ẩn, và lý thuyết cặp ứng suất hiệu chỉnh MCST. Phương pháp Navier được sử dụng để xác định tần số dao động riêng của tấm FGM micro có biên tựa khớp. Kết quả số của bài toán được kiểm chứng và các khảo sát số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của các tham số đến tần số dao động riêng của tấm FGM micro. Một số kết luận được rút ra từ bài báo:

- Kết quả cho thấy phiên bản lý thuyết tấm cải tiến bốn ẩn chuyển vị với hàm $f(z) = -\frac{z}{8} + \frac{3}{2} \left(\frac{z^3}{h^2} \right)$

cho kết quả khá sát với các công bố khác về dao động kết cấu tấm FGM micro.

- Khi kích thước tấm càng nhỏ (tỷ số h/l_0 càng nhỏ) thì tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ của FGM micro càng lớn (tăng độ cứng của tấm) và ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến tần số dao động tấm FGM micro càng rõ rệt.

- Ảnh hưởng của hệ số nền \bar{K}_s đến tần số dao động riêng $\bar{\omega}$ mode (1, 1) và mode (1, 2) của tấm FGM micro khá là rõ rệt và đáng kể hơn hệ số nền \bar{K}_w . Đặc biệt, ảnh hưởng của hệ số nền giảm đi khi tấm khi tấm FGM micro có kích thước càng nhỏ.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2024.XDA.08.

Tài liệu tham khảo

- [1] Tadigadapa, S., Mateti, K. (2009). [Piezoelectric MEMS sensors: state-of-the-art and perspectives](#). *Measurement Science and Technology*, 20(9):092001.
- [2] Hierold, C., Jungen, A., Stampfer, C., Helbling, T. (2007). [Nano electromechanical sensors based on carbon nanotubes](#). *Sensors and Actuators A: Physical*, 136(1):51–61.
- [3] Jha, D. K., Kant, T., Singh, R. K. (2013). [A critical review of recent research on functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 96:833–849.
- [4] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2015). [A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells](#). *Composite Structures*, 128:70–86.
- [5] Liên, T. V., Khiêm, N. T., Đức, N. T. (2017). Phân tích dao động cường bức của dầm Timoshenko bằng vật liệu FGM có nhiều vết nứt. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD)-ĐHXDHN*, 11(3): 10–19.

- [6] Lợi, N. V., Định, T. B., Bình, C. T. (2018). [Phân tích tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên có gân gia cường](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCCNXD)-ĐHXD*, 12(6):20–28.
- [7] Ghatage, P. S., Kar, V. R., Sudhagar, P. E. (2020). [On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures: A review](#). *Composite Structures*, 236:111837.
- [8] Nhân, N. T., Dương, N. N., Kiên, N. T. (2022). [Phát triển phương pháp Chebyshev-Ritz phân tích dao động tự do dầm cơ tính biến thiên](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD)-ĐHXDHN*, 16 (1V):79–91.
- [9] Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., Tong, P. (2002). [Couple stress based strain gradient theory for elasticity](#). *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2731–2743.
- [10] Yin, L., Qian, Q., Wang, L., Xia, W. (2010). [Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory](#). *Acta Mechanica Solida Sinica*, 23(5):386–393.
- [11] Jomehzadeh, E., Noori, H., Saidi, A. (2011). [The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory](#). *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4): 877–883.
- [12] Reddy, J. N., Berry, J. (2012). [Nonlinear theories of axisymmetric bending of functionally graded circular plates with modified couple stress](#). *Composite Structures*, 94(12):3664–3668.
- [13] Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Yang, J., Kitipornchai, S. (2012). [Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory](#). *Journal of Sound and Vibration*, 331(1):94–106.
- [14] Zhou, S.-S., Gao, X.-L. (2014). [A Nonclassical Model for Circular Mindlin Plates Based on a Modified Couple Stress Theory](#). *Journal of Applied Mechanics*, 81(5).
- [15] Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Limkatanyu, S., Mohammad-Sedighi, H., Rungamornrat, J. (2022). [Reddy's third-order shear deformation shell theory for free vibration analysis of rotating stiffened advanced nanocomposite toroidal shell segments in thermal environments](#). *Acta Mechanica*, 233(11):4659–4684.
- [16] Nguyen, N. V., Lee, J. (2021). [On the static and dynamic responses of smart piezoelectric functionally graded graphene platelet-reinforced microplates](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 197: 106310.
- [17] Nguyen, V.-L., Limkatanyu, S., Bui, T. Q., Rungamornrat, J. (2022). [Free vibration analysis of rotating stiffened functionally graded graphene-platelet-reinforced composite toroidal shell segments with novel four-unknown refined theories](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 19(2): 319–350.
- [18] Lou, J., He, L., Du, J., Wu, H. (2016). [Nonlinear analyses of functionally graded microplates based on a general four-variable refined plate model and the modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 152:516–527.
- [19] Tran, M.-T., Pham, H.-A., Nguyen, V.-L., Trinh, A.-T. (2017). [Optimisation of stiffeners for maximum fundamental frequency of cross-ply laminated cylindrical panels using social group optimisation and smeared stiffener method](#). *Thin-Walled Structures*, 120:172–179.
- [20] Tran, H.-Q., Vu, V.-T., Tran, M.-T. (2023). [Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method](#). *Composite Structures*, 305: 116535.
- [21] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2013). [A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 45(1):1636–1645.
- [22] Şimşek, M., Aydın, M. (2017). [Size-dependent forced vibration of an imperfect functionally graded \(FG\) microplate with porosities subjected to a moving load using the modified couple stress theory](#). *Composite Structures*, 160:408–421.
- [23] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). [A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation](#). *Composites Science and Technology*, 71(16):1850–1858.
- [24] Yin, B., Fang, J. (2022). [Modified couple stress-based free vibration and dynamic response of rotating FG multilayer composite microplates reinforced with graphene platelets](#). *Archive of Applied Mechanics*, 93(3):1051–1079.