

NGHIÊN CỨU ỨNG XỬ CHỊU XOẮN THUẦN TÚY CỦA DẦM BÊ TÔNG CỐT THÉP BẰNG MÔ HÌNH MÀNG HÓA MỀM CHO XOẮN

Nguyễn Vĩnh Sáng^{a,*}, Nguyễn Anh Dũng^a, Nguyễn Ngọc Thắng^a, Lê Đăng Dũng^b

^aKhoa Công trình, Trường Đại học Thủy Lợi, số 175 Tây Sơn, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam

^bKhoa Kỹ thuật xây dựng, Trường Đại học Giao thông vận tải,
số 3 phố Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 03/5/2024, Sửa xong 26/5/2024, Chấp nhận đăng 04/06/2024

Tóm tắt

Mô hình giàn hóa mềm (STM) đã được sử dụng để phân tích ứng xử xoắn của các cấu kiện bê tông từ những năm 1980. Tuy nhiên, phương pháp STM này bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất kéo bê tông và chỉ có thể dự đoán ứng xử sau nứt. Trong khi đó, mô hình màng hóa mềm (SMM), được phát triển để dự đoán ứng xử cho các phần tử màng bê tông cốt thép chịu cắt, được mở rộng cho các cấu kiện bê tông cốt thép chịu xoắn, được gọi là mô hình màng hóa mềm cho xoắn (SMMT). Mô hình SMMT đã xem xét ảnh hưởng của ứng suất kéo bê tông và có thể dự đoán toàn bộ đường cong mô men – góc xoắn trước và sau nứt. Mô hình SMMT sử dụng có sửa đổi mô hình vật liệu cốt thép là mô hình hai đoạn thẳng, chảy dẻo lý tưởng. Ảnh hưởng của hệ số khuếch đại Hsu/Zhu tại điểm phân giới cũng được xem xét. Mô hình SMMT sửa đổi này cho kết quả rất tốt về ứng xử chịu xoắn và mô men xoắn cực hạn so với các nghiên cứu thực nghiệm trước đây. Cuối cùng, điểm phân giới 0,002 được đề xuất sử dụng để tránh sự thay đổi đột ngột mô men xoắn.

Từ khóa: ứng xử chịu xoắn; mô men xoắn cực hạn; hệ số Hsu/Zhu; dầm bê tông cốt thép; mô hình màng hóa mềm cho xoắn.

STUDYING THE PURE TORSIONAL BEHAVIOR OF REINFORCED CONCRETE BEAMS USING A SOFTENED MEMBRANE MODEL FOR TORSION

Abstract

Since the 1980s, the softened truss model (STM) has been employed to examine the torsional characteristics of concrete elements. Nevertheless, techniques relying on the (STM) fail to account for the impact of specific tensile stress and are limited to forecasting post-cracking responses. The Softened Membrane Model (SMM), originally designed to predict the behavior of reinforced concrete (RC) membrane elements under shear, has been expanded to include RC members experiencing torsion. This extension is called the softened membrane model for torsion (SMMT). The SMMT model effectively accounts for the impact of tensile stress on concrete and can accurately forecast the complete torque-twist relationship, encompassing both in pre-cracking and post-cracking. The SMMT model was used to modify the reinforcement material model. This model is a simple bilinear model with full plastic. The influence of the Hsu/Zhu amplification ratio at the demarcation point was also considered. This modified SMMT model results in very good torsional behavior and ultimate torque compared to previous experimental studies. Finally, a demarcation point of 0.002 was suggested to avoid sudden changes in torque.

Keywords: torsional behavior; ultimate torque; Hsu/Zhu ratio; reinforcement concrete beam; softened membrane model for torsion.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(4V\)-07](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(4V)-07) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Hiện nay, kết cấu bê tông cốt thép (BTCT) là dạng kết cấu được sử dụng rất phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng và giao thông. Cấu kiện BTCT chịu xoắn là dạng kết cấu thường gặp

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: sangnv@tlu.edu.vn (Sáng, N. V.)

trong hệ kết cấu công trình (ví dụ: hệ dầm biên, dầm thang bộ, dầm cầu trên đường cong dẫn) [1]. Ảnh hưởng của mô men xoắn gây ra sự phá hoại với các cấu kiện chịu xoắn qua các giai đoạn làm việc khác nhau: trước và sau nứt. Do đó, việc phân tích của mô hình dự báo cấu kiện BTCT chịu xoắn cần thể hiện được qua các giai đoạn làm việc khác nhau này để làm căn cứ cho việc thiết kế được an toàn và đáng tin cậy hơn.

Kể từ những năm 1980, ứng xử chịu xoắn của cấu kiện bê tông cốt thép đã được phân tích dựa trên mô hình STM [2]. Mô hình này tiếp tục được phát triển và sửa đổi các điều kiện về ứng xử vật liệu bê tông và cốt thép [3–5]. Tuy nhiên, các phương pháp STM này bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất kéo bê tông và do đó chỉ có thể dự đoán dự đoán được ứng xử sau nứt bê tông. Mô hình SMM cho lực cắt gần đây theo đề xuất bởi Hsu và Zhu [6], được áp dụng cho cấu kiện chịu xoắn do Hsu và Jeng [7] phát triển còn được gọi là mô hình SMMT. Mô hình SMMT để đánh giá ứng xử chịu xoắn đã thực hiện hai hiệu chỉnh. Thứ nhất tính đến sự uốn cong của phần tử hai chiều theo hướng biến dạng theo phương chính cũng như xét đến sự làm việc chịu kéo của bê tông. Điều này cho phép dự đoán ứng xử xoắn trước khi nứt. Thứ hai, mô hình SMMT tính đến hiệu ứng Poisson thông qua hệ số khuếch đại Hsu/Zhu do Zhu và Hsu [8] đề xuất cho các phần tử phẳng hai chiều theo hướng nén chính, vì vậy ứng xử sau nứt chịu xoắn được dự đoán chính xác hơn. Tuy nhiên, hệ số khuếch đại Hsu/Zhu lấy theo điểm phân giới là điểm chảy dẻo đầu tiên của cốt thép (thép dọc hoặc thép đai) trong các mô hình SMMT trước đây, điều này khác với điểm phân giới 0,002 đề xuất bởi Zhu và Hsu [8]. Hơn nữa, ứng xử của cốt thép nhúng trong bê tông xét đến ảnh hưởng của ứng suất kéo của bê tông dẫn đến phức tạp trong tính toán. Mô hình SMMT liên tục được cải tiến và mở rộng áp dụng cho kết cấu bê tông ứng suất trước [9, 10]. Ngoài ra, phương pháp SMMT đơn giản hóa để xác định mô men xoắn nứt và góc xoắn nứt cũng được phát triển [9, 11]. Mô hình SMMT cũng được áp dụng để phân tích ứng xử chịu xoắn cho dầm BTCT được gia cường bằng polyme cốt sợi FRP có và không có ứng suất trước có kiểm chứng với thực nghiệm cho kết quả đáng tin cậy [12, 13]. Ở Việt Nam, một số nghiên cứu bằng thực nghiệm và tính toán lý thuyết cho dầm BTCT chịu xoắn để đánh giá ứng xử và khả năng chịu xoắn của dầm BTCT [1, 14].

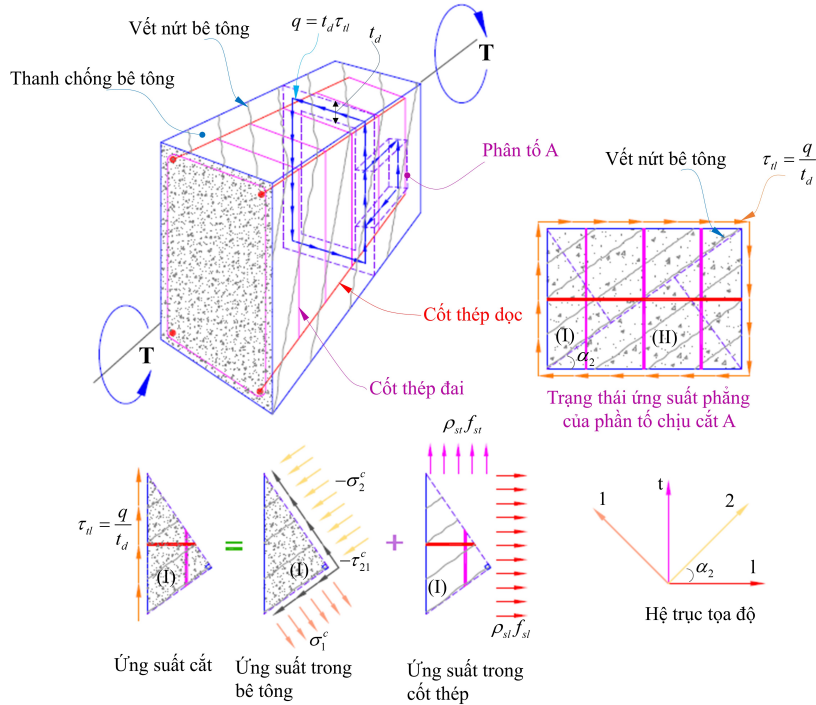
Ngoài ra, mô hình dự báo kháng xoắn theo tiêu chuẩn EC2 [15], ACI 318-19 [16] cho dầm BTCT trước và sau nứt có chung giả thiết như sau: trước nứt, dầm BTCT làm việc như một ống thành mỏng và bỏ qua đóng góp của lõi bê tông bên trong; sau khi các vết nứt nghiêng xuất hiện do xoắn, cơ chế kháng xoắn của dầm được mô phỏng bằng một hệ giàn ảo có thanh chịu nén là thanh chống bê tông, thanh chịu kéo là cốt dọc và cốt thép đai. Trong khi, tiêu chuẩn TCVN 5574:2018 [17] chỉ xét đến khả năng chịu xoắn bởi sự tham gia chịu lực của cốt thép đai và thép dọc theo lý thuyết uốn vênh, chưa xem xét đến ứng xử ở các giai đoạn làm việc chịu xoắn [18].

Trong bài báo này, mô hình SMMT được sử dụng để dự đoán ứng xử qua các giai đoạn làm việc và khả năng chịu xoắn của dầm BTCT. Trong mô hình SMMT này, ứng xử cốt thép theo mô hình hai đoạn thẳng chảy dẻo lý tưởng theo TCVN 5574:2018 được sử dụng để đơn giản quá trình tính toán. Ảnh hưởng của hệ số khuếch đại Hsu/Zhu đến ứng xử chịu xoắn cũng được xem xét. Dựa trên 54 mẫu thử nghiệm của các nghiên cứu trước đây được sử dụng tính toán theo SMMT và so sánh khả năng chịu xoắn với các tiêu chuẩn hiện hành TCVN 5574:2018 [17], EC2 [15], ACI 318-19 [16].

2. Mô hình phân tích

Sau khi dầm bê tông bị nứt dưới tác dụng của lực xoắn T gây ra. Dầm làm việc như một hệ giàn không gian được tạo bởi thanh bê tông nghiêng chịu nén, các thanh chịu kéo là cốt thép dọc và thép đai theo phương ngang và đứng tương ứng nhằm chống lại ngoại lực T . Theo cách tiếp cận này, các phương trình cân bằng và tương thích được giải cùng với các quan hệ ứng suất – biến dạng của vật

liệu cấu thành cấu kiện khi chịu xoắn thuần túy thể hiện trong Hình 1. Một thuật toán thử và sai đã được phát triển để tính toán từng điểm của đường cong mô men xoắn-góc xoắn [7].



Hình 1. Dầm chịu xoắn thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng

2.1. Phương trình cân bằng

Mô men xoắn T tác dụng vào tiết diện hình chữ nhật của dầm bê tông cốt thép (BTCT) được thể hiện trên Hình 1 tạo ra dòng ứng suất cắt trong chiều dày t_d và bằng ($\tau_{lt} = q/t_d$). Xem xét phần tử A của dầm chữ nhật BTCT chịu xoắn thuần túy trong dòng chảy cắt, trạng thái ứng suất có thể biểu diễn bằng vòng tròn Mohr bằng cách xác định tọa độ trục $l - t$ là phương ngang của cốt thép dọc và phương đứng thép đai, tọa độ $2 - 1$ là phương của ứng suất chính theo Hình 1. Các phương trình cân bằng trong mặt phẳng cho phần tử A được đưa ra bởi các phương trình (1)–(3).

2.2. Phương trình tương thích

Khả năng tương thích trong mặt phẳng của phần tử A trong Hình 1 phải đảm bảo ba phương trình (4)–(6) tương thích được biểu diễn bằng vòng tròn Mohr [6]. Vì các quy luật cấu tạo của vật liệu được tính toán từ các biến dạng đơn trục nên cần phải xác định các ảnh hưởng biến dạng đơn trục đến biến dạng hai trục. Zhu và Hsu [8] đưa ra mối quan hệ giữa các biến dạng hai trục và đơn trục trong ứng xử chịu cắt bởi phương trình (7)–(9). Đối với bài toán chịu xoắn thuần túy, mô hình SMM cho bài toán chịu cắt và xét đến ảnh hưởng của hệ số Hsu/Zhu bởi phương trình (10)–(12) [19]. Trong mô hình SMMT cho xoắn, Jeng và Hsu [7] đã đề xuất hệ số Hsu/Zhu cho mô hình SMM sang SMMT khi xét đến sự uốn trong thanh chống bê tông dẫn đến sự suy giảm hệ số Hsu/Zhu 20% so với ứng xử cắt, được thể hiện quan phương trình (13). Từ đó sự suy giảm biến dạng theo phương (1-3) và (4-6) của phương trình (7) và (8) cho xoắn được xác định như phương trình (14)–(15).

Các biến dạng một trục trung bình theo hướng trục l $\bar{\epsilon}_l$ và hướng trục t $\bar{\epsilon}_t$ của các thanh thép được tính theo quy trình tương tự như phương trình (4) và (5), biến dạng một trục được thay thế bằng biến

dạng hai trục bởi phương trình (16) và (17). Ngoài ra, hai phương trình tương thích khác liên quan đến góc xoắn trên một đơn vị chiều dài θ và độ cong uốn ψ của bê tông với biến dạng cắt trong chiều dày ống thành mỏng [7], thể hiện bởi phương trình (18) và (19).

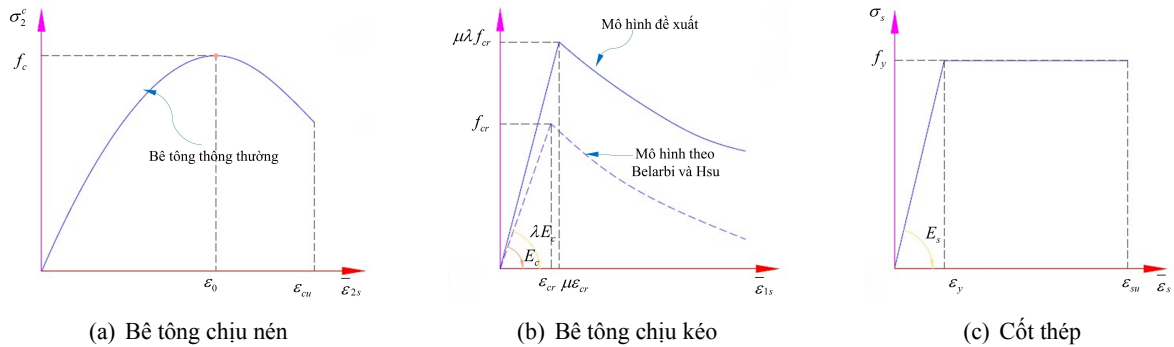
Vì sự phân bố biến dạng được giả định là tuyến tính nên độ dày t_d được tính như [7] theo phương trình (20) và (21). Thay thế ψ từ phần đầu tiên của phương trình (19) và các phương trình tính toán p_0 và A_0 dẫn đến việc tính toán t_d theo biểu thức (23). Diện tích A_0 và chu vi p_0 của dòng chảy cắt được xác định theo (25) và (26).

Áp dụng phương trình Brest' khi chịu xoắn, ta xác định được mô men xoắn T thông qua hệ thức (27). Ngoài ra, hàm lượng cốt thép dọc và cốt thép đai trong hệ thức (1) và (2) của dòng chảy cắt xác định bởi (28).

2.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng của vật liệu

Như trong SMM, mối quan hệ biến dạng - ứng suất nén của bê tông mềm hóa đề xuất bởi Wang [20] được sử dụng và được minh họa trong Hình 2(a). Hệ số mềm hóa trong Hình 2(a) đại diện cho sự suy giảm cường độ chịu nén của bê tông được biểu thị dưới dạng hàm của ba tham số: biến dạng kéo $\bar{\varepsilon}_{2s}$ theo phương chính, cường độ bê tông f'_c và góc nghiêng β . Giống như mô hình RA-STM chịu xoắn [19], ứng suất nén trong bê tông trong mô hình SMMT được xác định thông qua hệ số trung bình k_{1c} của thanh chống bê tông biểu diễn trên Hình 2(a) và xác định bởi phương trình (30) và (31). Từ đó, hệ số ứng suất trung bình σ_2^c thu được bằng cách tích hợp các phương trình biến dạng ứng suất theo phương trình (29)–(33). Đối với bê tông chịu kéo, ứng suất kéo σ_1^c thể hiện trên Hình 2(b) xác định bởi phương trình (34)–(37). Đối với dầm đặc BTCT lấy các hệ số khếch đại ứng suất nén và kéo η , biến dạng kéo μ và mô đun đàn hồi λ của bê tông được lấy bằng $\mu = \lambda = 1,45$ và $\eta = 1$ [10].

Khác với mô hình do Hsu và Jeng [7] đề xuất, ứng suất kéo trong vết nứt tròn của bê tông được xem xét trong mô hình SMMT, mối quan hệ ứng suất - biến dạng của cốt thép dọc và thép đai thông thường được xem xét trong mối quan hệ ứng suất – biến dạng khi xét đến ứng suất kéo nứt của bê tông do cốt thép được nhúng trong bê tông. Trong nghiên cứu này, mô hình song tuyến tính đơn giản cho quan hệ ứng suất - biến dạng của cốt thép được sử dụng theo tiêu chuẩn EC2 [15] và TCVN 5574:2018 [17], biểu diễn trên Hình 2(c) và qua các phương trình (38) và (39).



Hình 2. Quan hệ ứng suất – biến dạng vật liệu

2.4. Quan hệ của bê tông chịu cắt

Như trong SMM, ứng suất cắt được kết hợp trong SMMT mối quan hệ ứng suất cắt của bê tông với biến dạng cắt theo phương trình (40) do Bairan JM và Mari AR [21] đề xuất. Các phương trình của mô hình SMMT:

$$\sigma_l = \sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \sin^2 \alpha_2 + 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_{sl} f_{sl} \quad (1)$$

$$\sigma_t = \sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \cos^2 \alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_{st} f_{st} \quad (2)$$

$$\tau_{lt} = (\sigma_2^c + \sigma_1^c) \sin^2 \alpha_2 - 2\tau_{21}^c \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_{st} f_{st} \quad (3)$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_2 + \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (4)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha_2 - \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (5)$$

$$\gamma_{lt} = 2(-\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \gamma_{21} (\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2 \quad (7)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2 \quad (8)$$

$$\bar{\gamma}_{21} = \gamma_{21} \quad (9)$$

$$\nu_{12} = 0,2 + 850\varepsilon_{sf} \quad \text{khi} \quad \varepsilon_{sf} \leq \varepsilon_y \quad (10)$$

$$\nu_{12} = 1,9 \quad \text{khi} \quad \varepsilon_{sf} > \varepsilon_y \quad (11)$$

$$\nu_{21} = 0 \quad (12)$$

$$(\nu_{12})_{torsion} = 0,8\nu_{12} \quad \text{và} \quad \nu_{21} = 0 \quad (13)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + (\nu_{12})_{torsion} \varepsilon_2 \quad (14)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \quad (15)$$

$$\bar{\varepsilon}_l = \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 + \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (16)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \gamma_{12} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (17)$$

$$\theta = \frac{p_0}{2A_0} \gamma_{lt} \quad (18)$$

$$\psi = \theta \sin 2\alpha_2 = \frac{p_0}{2A_0} \gamma_{lt} \sin 2\alpha_2 \quad (19)$$

$$t_d = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\psi} \quad (20)$$

$$\bar{\varepsilon}_{2s} = 2\bar{\varepsilon}_2 \quad (21)$$

$$t_d = \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\psi} \quad (22)$$

$$t_d = \frac{1}{2(Q+4)} \left[p_c \left(1 + \frac{Q}{2} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{Q}{2} \right)^2 (p_c)^2 - 4Q(Q+4)A_c} \right] \quad (23)$$

$$Q = \frac{2\bar{\varepsilon}_{2s}}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha} = \frac{4\bar{\varepsilon}_2}{\gamma_{lt} \sin 2\alpha} \quad (24)$$

$$A_0 = A_c - 0,5p_c t_d + t_d^2 \quad (25)$$

$$p_0 = p_c - 4t_d \quad (26)$$

$$T = 2A_0 q = 2A_0 t_d \tau_{lt} \quad (27)$$

$$\rho_{sl} = \frac{A_{sl}}{p_0 t_d} \quad \text{và} \quad \rho_{st} = \frac{A_{st}}{s t_d} \quad (28)$$

$$\sigma_2^c = -\eta k_{1c} \zeta f'_c \quad (29)$$

$$k_{1c} = \left[\frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} - \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} \right)^2 \right] \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} \leq 1 \quad (30)$$

$$k_{1c} = 1 - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon_p}{\bar{\varepsilon}_{2s}} - \frac{(\bar{\varepsilon}_{2s} - \varepsilon_p)^3}{3 \bar{\varepsilon}_{2s} (4\varepsilon_0 - \varepsilon_p)^2} \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{2s}}{\varepsilon_p} > 1 \quad (31)$$

$$\zeta = \frac{5,8}{\sqrt{f'_c}} \frac{1}{\sqrt{1 + 400\bar{\varepsilon}_1}} \left(1 - \frac{|\beta|}{24^\circ} \right) \leq 0,9 \quad \text{và} \quad \frac{5,8}{\sqrt{f'_c}} \leq 0,9 \quad (32)$$

$$\beta (\text{deg}) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{21}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) \frac{180}{\pi} \quad (33)$$

$$\sigma_1^c = \eta k_{1t} f_{cr} \quad (34)$$

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{cr}} \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} \leq 1 \quad (35)$$

$$k_{1t} = \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{2\varepsilon_{cr}} + \frac{(\varepsilon_{cr})^{0,4}}{(0,6) \bar{\varepsilon}_{1s}} \left[(\bar{\varepsilon}_{1s})^{0,6} - (\varepsilon_{cr})^{0,6} \right] \quad \text{khi} \quad \frac{\bar{\varepsilon}_{1s}}{\varepsilon_{cr}} > 1 \quad (36)$$

$$\varepsilon_{cr} = \mu (0,00008) \quad \text{và} \quad f_{cr} = \lambda \mu (0,31) \sqrt{f'_c} \quad (37)$$

$$f_s = E_s \bar{\varepsilon}_s \quad \text{khi} \quad \bar{\varepsilon}_s < \varepsilon_y \quad (38)$$

$$f_s = f_y \quad \text{khi} \quad \bar{\varepsilon}_s \geq \varepsilon_y \quad (39)$$

$$\tau_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \gamma_{21} \quad (40)$$

Các kí hiệu của mô hình SMMT trong công thức và phương trình (1)–(40) như sau: σ_l và σ_t lần lượt là ứng suất pháp tuyến tác dụng theo phương dọc l và phương ngang t của phần tử BTCT, σ_1^c và σ_2^c lần lượt là ứng suất pháp tuyến trung bình của bê tông theo phương 1 và phương 2, τ_{lt} là ứng suất cắt tác dụng theo phương tọa độ $l-t$ của các cốt thép, τ_{21}^c là ứng suất cắt trên vết nứt trơn của bê tông theo tọa độ 2-1, α_2 là góc của ứng suất nén chính tác dụng giữa trục 2 và trục l . ρ_{sl} và ρ_{st} lần lượt là hàm lượng thép dọc và thép ngang, f_{sl} và f_{st} lần lượt là ứng suất kéo của thép dọc và thép ngang. Vì ứng suất pháp tuyến trong phần tử chịu lực xoắn thuần túy bằng 0, nên theo cơ học vật liệu với phần tử vô cùng nhỏ được thể hiện trong Hình 1, ở trạng thái ứng suất cắt thuần túy ($\sigma_l = \sigma_t = 0$) và $\alpha_2 = 45^\circ$. ε_l và ε_t tương ứng là biến dạng trung bình của thép dọc và cốt đai theo phương dọc và đứng, γ_{lt} là biến dạng cắt trung bình theo hệ trục $l-t$ của thanh thép, ε_1 và ε_2 là biến dạng hai trục trung bình theo phương 1 và 2 tương ứng, γ_{12} là biến dạng cắt trung bình trong hệ tọa độ 2-1. ε_{sf} là biến dạng trung bình của các thanh thép chảy dẻo đầu tiên, ε_y là biến dạng chảy của các cốt thép (dọc và đai). f'_c là cường độ nén bê tông mẫu hình trụ, ε_0 là biến dạng bê tông tại ứng suất nén cực đại lấy bằng $-0,00235$, τ là hệ số hóa mềm được tính từ biểu thức (32) và $\varepsilon_p = \zeta \varepsilon_0$, biến dạng $\bar{\varepsilon}_{2s} = 2\bar{\varepsilon}_2$ là biến dạng ở mặt ngoài thanh chống bê tông. k_{1t} là hệ số trung bình của ứng suất kéo trong bê tông. f_{cr} là cường độ kéo nứt của bê tông và ε_{cr} là biến dạng nứt của bê tông. $\bar{\varepsilon}_{1s} = 2\bar{\varepsilon}_1$ là biến dạng kéo ở mép ngoài của bê tông. f_s , E_s , $\bar{\varepsilon}_s$ là ứng suất, mô đun đàn hồi, biến dạng của cốt thép đang xét (thép đai hoặc thép dọc). f_y là cường độ chảy dẻo của cốt thép.

2.5. Sơ đồ thuật toán

Thuật toán giải pháp của SMMT được đề xuất là một phần mở rộng của SMM. Như trong SMM, hai phương trình cân bằng cơ bản đầu tiên trong biểu thức (1) và (2) được cộng và trừ để thu được hai phương trình (41) và (42) dưới đây sử dụng làm tiêu chí hội tụ cho quy trình nghiệm của Hsu và Zhu [6].

$$\rho_{sl}f_l + \rho_{st}f_t = -(\sigma_2^c + \sigma_1^c) \quad (41)$$

$$\rho_{sl}f_l - \rho_{st}f_t = -(-\sigma_2^c + \sigma_1^c) \cos 2\alpha - 2\tau_{21}^c \sin 2\alpha \quad (42)$$

Một sơ đồ thuật toán để trình bày, minh họa các bước giải đường cong quan hệ T- θ được thể hiện trên Hình 3. Một chương trình được sử dụng trong môi trường MATLAB [22] bằng thuật toán thử và sai để tính toán từng điểm của đường cong quan hệ mô men xoắn - góc xoắn trên một đơn vị chiều dài. Trong nghiên cứu này, giá trị ε_2 thay đổi từ 0 đến cực hạn là 0,0035 theo TCVN 5574:2018 [17]. Ở mỗi bước xác định điểm mô xoắn và góc xoắn (Hình 3), ban đầu chọn giá trị ε_2 , sau đó giả thiết γ_{12} , ε_1 , tiếp đến tiến hành tính toán và kiểm tra hội tụ theo phương trình (41) và (42). Tiếp đến, gia tăng giá trị ε_2 bởi một số gia $\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_{cu}/n$, với $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ và $n = 1000$ là tổng số bước lặp cho chương trình chạy MATLAB của nghiên cứu này.

3. Kiểm chứng mô hình

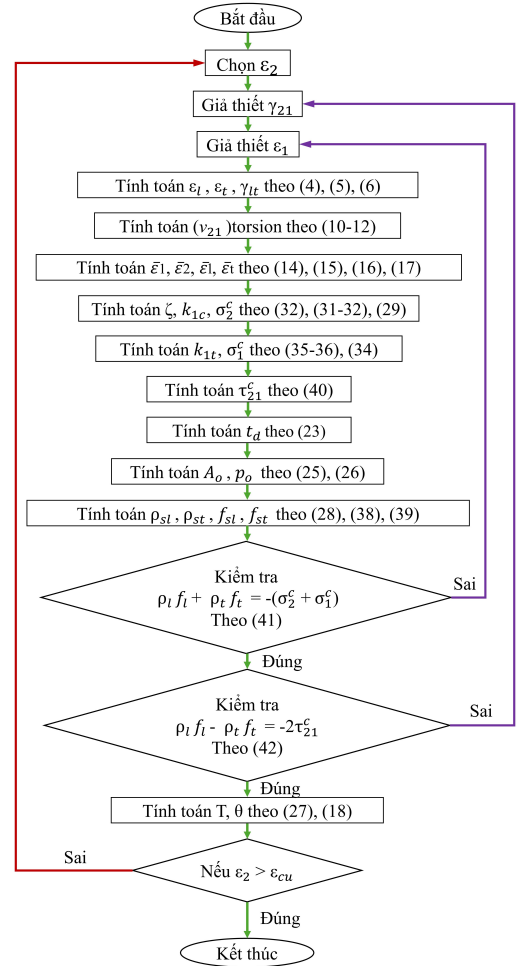
Mô hình tính toán được kiểm chứng với các thí nghiệm đã thực hiện bởi các nghiên cứu [14, 23–27] với tổng 54 mẫu thử được tính toán theo mô hình SMMT và so sánh với tiêu chuẩn TCVN 5574:2018 [17], ACI 318M-19 [16] và EC2 [15] về mô men xoắn cực hạn. Ngoài ra, ứng xử qua các gia đoạn làm việc thể hiện theo mô hình SMMT và thực nghiệm thông qua đường cong quan hệ mô men xoắn – góc xoắn, ảnh hưởng của hệ số khuếch đại Hsu/Zhu cũng được trình bày và thảo luận.

3.1. Mô men xoắn cực hạn

Mô men xoắn cực hạn theo ACI 318M-19 [16] và EC2 [15] không nhỏ hơn một trong ba giá trị tương ứng là khả năng chịu lực của cốt đai, cốt thép dọc và tránh phá hoại nén vỡ thanh chống bê tông:

ACI 318M-19 [16]:

$$T_{u,ACI} = \min \left\{ \frac{2A_oA_vf_{yt}}{s} \cot \alpha; \frac{2A_oA_{sl}f_{yl}}{P_h} \tan \alpha; \frac{17\sqrt{f'_c}A_{oh}^2}{12P_h} \right\} \quad (43)$$

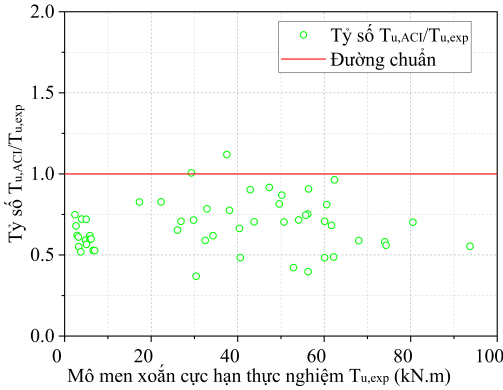


Hình 3. Sơ đồ thuật toán SMMT cho dầm chịu xoắn thuần túy

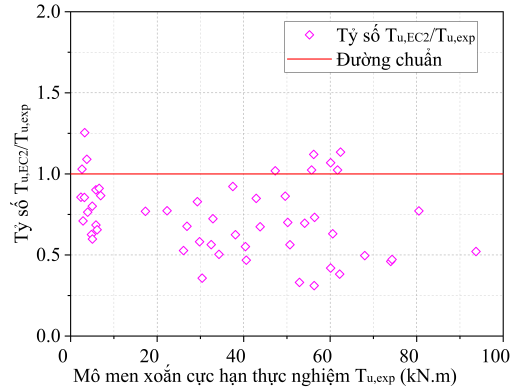
EC2 [15]:

$$T_{u,EC2} = \min \left\{ \frac{2A_k A_v f_{yt}}{s} \cot \alpha; \frac{2A_k A_{sl} f_{yl}}{U_k} \tan \alpha; 2v f'_c A_k t_{ef} \sin \alpha \cos \alpha \right\} \quad (44)$$

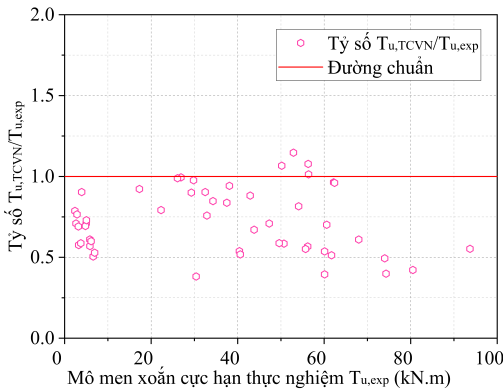
trong đó A_v , f_{yt} tương ứng là diện tích một nhánh đai và cường độ chảy dẻo của cốt thép đai. A_{sl} , f_{yl} là tổng diện tích và cường độ chảy dẻo thép dọc tương ứng. P_h là chu vi lõi được bao bởi cốt đai kín. A_k , U_k tương ứng là diện tích, chu vi trung bình phần ống thành mỏng hiệu dụng. t_{ef} là chiều dày ống thành mỏng hiệu dụng.



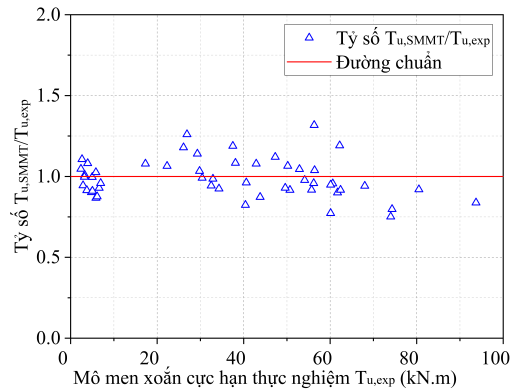
(a) Theo ACI 318-19



(b) Theo EC2



(c) Theo TCVN 5574:2018



(d) Mô hình SMMT

Hình 4. Tỷ số mô men xoắn cực hạn giữa tính toán và thực nghiệm

Với tổng 54 mẫu thử được sử dụng để xác định mô men xoắn cực hạn (T_u), có dạng tiết diện đặc chữ nhật với kích thước, hàm lượng thép dọc và đai, cường độ chịu nén bê tông khác nhau được xem xét. Giá trị mô men xoắn cực hạn T_u tính toán theo SMMT, và các tiêu chuẩn TCVN 5574:2018 [17], ACI 318-19 [16] và EC2 [15] được thể hiện trong Bảng 1. Tỷ số trung bình giữa mô men xoắn cực hạn theo tính toán và mô men xoắn theo tính toán $T_{u,cal}/T_{u,exp}$ theo ACI 318-19 [16] cho giá trị nhỏ nhất (0,69), trong khi đó theo SMMT cho giá trị lớn nhất (0,99). Giá trị này theo TCVN 5574:2018 [17] và EC2 cùng bằng 0,73. Hệ số độ lệch chuẩn COV theo EC2 [15] lại cho hệ số lớn nhất và bằng 0,22; trái lại mô hình SMMT cho hệ số lệch chuẩn nhỏ nhất bằng 0,12; trong khi đó theo mô hình TCVN 5574:2018 [17] và ACI 318-19 [16] nhỏ hơn lần lượt là 0,20 và 0,16. Trên Hình 4 thể hiện sự phân bố của tỷ số $T_{u,cal}/T_{u,exp}$ và giá trị mô men xoắn cực hạn theo thực nghiệm. Trên Hình 4(a)

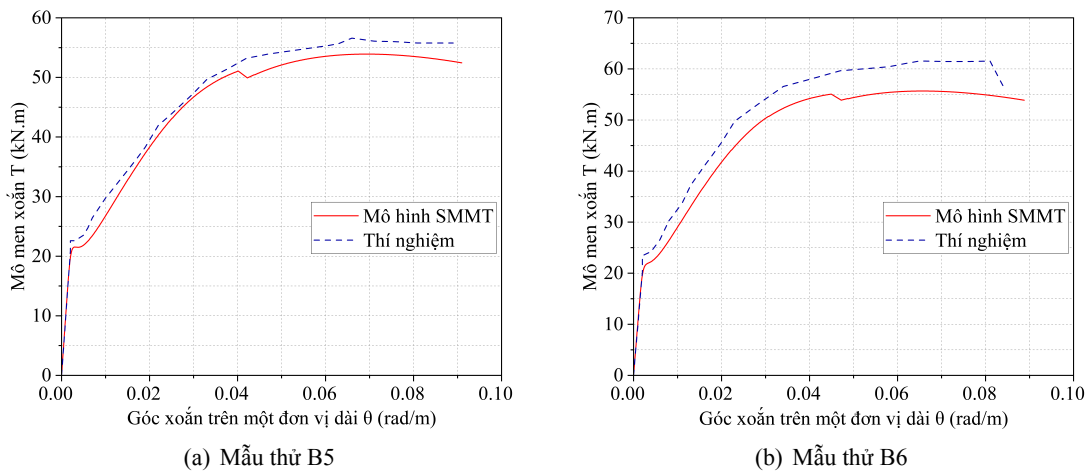
Bảng 1. So sánh mô men xoắn cực hạn giữa thực nghiệm và tính toán

Tham khảo	Mẫu thử	$T_{u,exp}$ (kN.m)	ACI 318M-19 [16]		EC2 [15]		TCVN 5574:2018 [17]		Mô hình SMMT	
			$T_{u,cal}$ (kN.m)	$\frac{T_{u,cal}}{T_{u,exp}}$	$T_{u,cal}$ (kN.m)	$\frac{T_{u,cal}}{T_{u,exp}}$	$T_{u,cal}$ (kN.m)	$\frac{T_{u,cal}}{T_{u,exp}}$	$T_{u,cal}$ (kN.m)	$\frac{T_{u,cal}}{T_{u,exp}}$
[25]	NBS-43-44	60,60	49,13	0,81	38,24	0,63	42,49	0,70	57,94	0,96
	HBS-74-17	62,20	30,33	0,49	23,77	0,38	59,94	0,96	74,09	1,19
	HBS-82-13	56,31	22,35	0,40	17,52	0,31	60,68	1,08	74,16	1,32
	NBS-82-13	52,90	22,35	0,42	17,52	0,33	60,68	1,15	55,28	1,04
	HBS-60-61	93,70	51,87	0,55	48,88	0,52	51,77	0,55	78,53	0,84
[27]	SW12-1	74,00	43,02	0,58	34,05	0,46	36,53	0,49	55,61	0,75
	SW10-1	50,70	35,67	0,70	28,57	0,56	29,65	0,58	46,46	0,92
	SW10-2	68,00	40,01	0,59	33,76	0,50	41,48	0,61	64,02	0,94
	SW10-3	74,30	41,60	0,56	35,10	0,47	29,65	0,40	59,25	0,80
	SW10-4	80,50	56,51	0,70	62,14	0,77	33,97	0,42	74,04	0,92
	SW8-1	40,40	26,83	0,66	22,28	0,55	21,73	0,54	33,27	0,82
	SW8-2	60,10	29,05	0,48	25,21	0,42	23,72	0,39	46,44	0,77
	SW4-1	17,30	14,30	0,83	13,31	0,77	15,96	0,92	18,66	1,08
[23]	B1	22,30	18,46	0,83	17,24	0,77	17,67	0,79	23,74	1,06
	B2	29,30	29,47	1,01	24,27	0,83	26,37	0,90	33,41	1,14
	B3	37,50	41,97	1,12	34,60	0,92	31,41	0,84	44,56	1,19
	B4	47,30	43,36	0,92	48,20	1,02	33,53	0,71	53,00	1,12
	B5	56,20	42,28	0,75	62,96	1,12	31,87	0,57	53,83	0,96
	B6	61,70	42,12	0,68	63,18	1,02	31,64	0,51	55,55	0,90
	B7	26,90	19,04	0,71	18,21	0,68	26,75	0,99	33,90	1,26
	B8	32,50	19,16	0,59	18,32	0,56	29,37	0,90	30,65	0,94
	B9	29,80	21,30	0,71	17,34	0,58	29,10	0,98	30,79	1,03
	B10	34,30	21,24	0,62	17,29	0,50	29,07	0,85	31,70	0,92
	M1	30,40	11,22	0,37	10,86	0,36	11,59	0,38	30,13	0,99
	M2	40,60	19,63	0,48	19,00	0,47	21,03	0,52	39,06	0,96
	M3	43,80	30,87	0,70	29,52	0,67	29,37	0,67	38,22	0,87
	M4	49,60	40,42	0,81	42,79	0,86	29,14	0,59	46,10	0,93
	M5	55,70	41,51	0,75	57,03	1,02	30,73	0,55	51,08	0,92
	M6	60,10	42,52	0,71	64,22	1,07	32,25	0,54	57,00	0,95
[24]	R4-20	2,38	1,78	0,75	2,04	0,86	1,87	0,79	2,49	1,05
	R4-15	2,64	1,79	0,68	2,72	1,03	1,87	0,71	2,92	1,11
	R4-10	3,25	1,79	0,55	4,08	1,25	1,87	0,58	3,28	1,01
	R6-20	2,87	1,78	0,62	2,04	0,71	2,20	0,77	2,71	0,94
	R6-15	3,18	1,94	0,61	2,72	0,85	2,20	0,69	3,17	1,00
	R6-10	3,74	1,94	0,52	4,08	1,09	2,20	0,59	3,42	0,91
[26]	T1-1	32,90	25,82	0,78	23,82	0,72	24,95	0,76	32,42	0,99
	T1-2	42,90	38,72	0,90	36,42	0,85	37,81	0,88	46,26	1,08
	T1-3	54,10	38,72	0,72	37,66	0,70	44,13	0,82	52,88	0,98
	T1-4	62,40	60,13	0,96	70,78	1,13	59,94	0,96	57,19	0,92
	T2-1	26,10	17,06	0,65	13,76	0,53	25,81	0,99	30,77	1,18
	T2-2	38,10	29,53	0,78	23,82	0,63	35,89	0,94	41,28	1,08
	T2-3	50,20	43,62	0,87	35,18	0,70	53,53	1,07	53,45	1,06
	T2-4	56,40	51,19	0,91	41,28	0,73	57,12	1,01	58,56	1,04
[14]	M1-L900	7,17	6,26	0,87	5,42	0,76	6,76	0,94	6,65	0,93
	M2-L900	6,68	6,26	0,94	5,42	0,81	6,76	1,01	6,65	1,00
Trung bình				0,69		0,73		0,73		0,99
Độ lệch chuẩn (COV)				0,16		0,22		0,20		0,12

cho thấy, tỷ số của $T_{u,cat}/T_{u,exp}$ theo [16] có đến 52 mẫu có giá trị nhỏ hơn 1, chiếm 96,3%. Phân bố theo EC2 [15] và TCVN 5574:2018 [17] lần lượt là (45 mẫu thử chiếm 83,3% và 50 mẫu thử chiếm 92,5%) được thể hiện trên Hình 4(c)–(d). Trong khi đó, mô hình SMMT cho sự phân bố khá tốt khi có 32 mẫu thử có tỉ số nhỏ hơn 1 (chiếm 59,3%). Điều này cho thấy, thiết kế theo [16] cho độ an toàn cao hơn so với tiêu chuẩn EC2 và TCVN 5574:2018, trái lại theo SMMT phản ánh gần với thực tế hơn.

3.2. Ứng xử mô men xoắn – góc xoắn

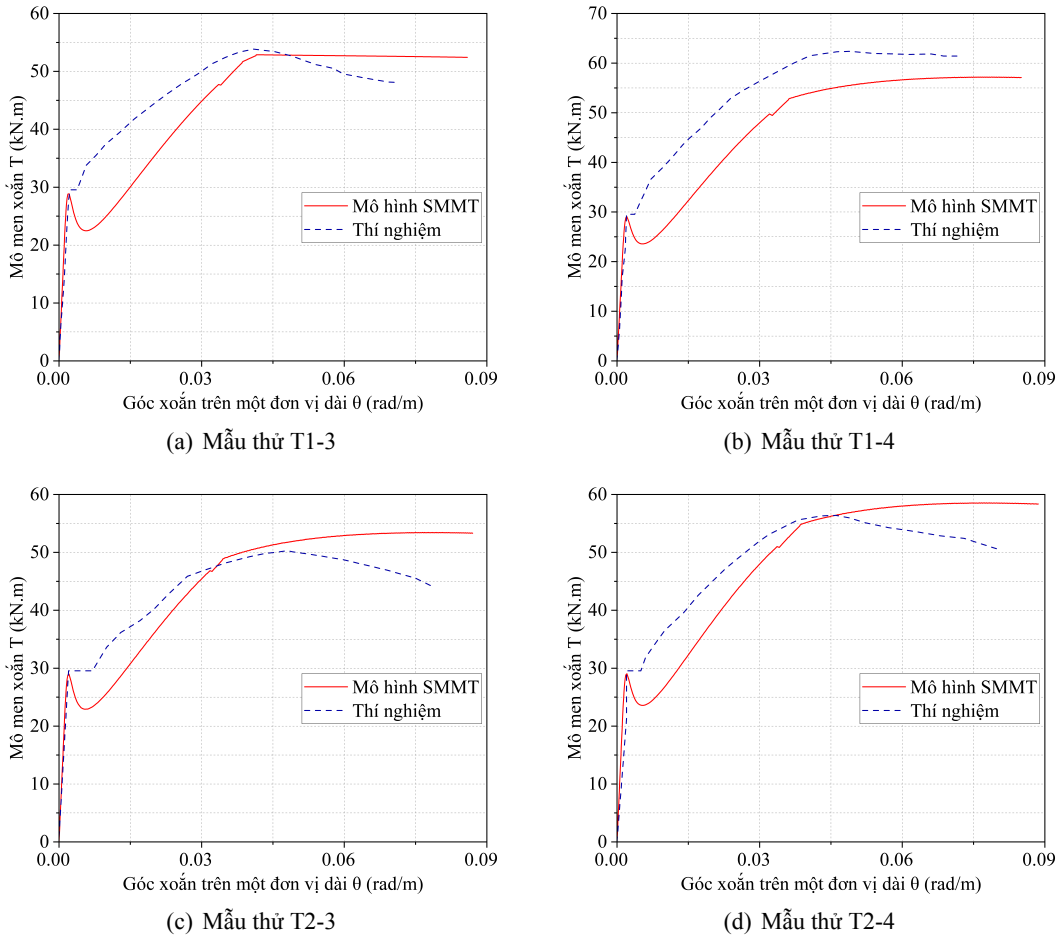
Đường cong quan hệ mô men xoắn (T) – góc xoắn trên một đơn vị dài (θ) của mô hình SMMT và kết quả thí nghiệm mẫu thử B5, B6 của Hsu [23] thể hiện trên Hình 5. Kết quả cho thấy, ở giai đoạn đàn hồi (trước nứt bê tông), ứng xử của mô hình SMMT và thực nghiệm giống hệt nhau. Ở giai đoạn sau nứt bê tông, mô men xoắn giảm đột ngột trong khi góc xoắn tăng nhanh do sự phân bố nội lực từ bê tông sang cốt thép dọc và thép đai. Tiếp đến, dần làm việc phi tuyến, mô men xoắn và góc xoắn liên tục tăng đạt đến cực hạn, sau giai đoạn này mô men suy giảm và góc xoắn tăng nhanh đến khi phá hoại. Hình 5 cho thấy, mô hình SMMT thể hiện ứng xử tốt ở giai đoạn sau nứt đến khi phá hoại mẫu. Hơn nữa, mô hình SMMT dự đoán mô men cực hạn cho hai mẫu thử này khá tốt so với thực nghiệm.



Hình 5. Ứng xử đàn BTCT theo mô hình SMMT và thực nghiệm [23]

Một so sánh khác về đường cong $T-\theta$ được thể hiện cho các mẫu thử T1 và T2 với hàm lượng cốt thép cao theo thực nghiệm của Lee và cs. [26] và mô hình SMMT cũng cho kết quả phù hợp với thực nghiệm ở giai đoạn trước nứt, nhưng ở giai đoạn sau nứt có sự chênh lệch khá nhiều (xem Hình 6). Qua đó, có thể thấy rằng ứng xử sau nứt và mô men xoắn cực hạn phụ thuộc nhiều vào hàm lượng cốt thép. Ví dụ, mẫu thử T1-5 thể hiện trên Hình 6(b) có sự khác nhau nhiều giữa mô hình SMMT và thực nghiệm ở giai đoạn sau nứt. Điều này có thể là do mô hình SMMT trong nghiên cứu này sử dụng đường cong quan hệ ứng suất biến dạng cho cốt thép bằng mô hình hai đoạn thẳng đơn giản không như ứng xử thực tế của cốt thép thông thường ở giai đoạn chảy dẻo và tái bền. Hơn nữa, ảnh hưởng của cốt thép đai dày (hàm lượng cốt đai lớn) tới hiện tượng chống nở hông bê tông làm tăng khả năng chịu nén của thanh chống bê tông, điều này không được xem xét trong mô hình SMMT của nghiên cứu này.

Hơn nữa, khi xem xét đến ảnh hưởng của tỷ lệ kích thước hình học kết cấu dạng tường (vách) [27]. Từ Bảng 1 cho thấy, đối với tường có tỷ lệ chiều cao trên bề rộng lớn (như mẫu thử SW12-1), các lý thuyết tính toán nhỏ hơn khá nhiều so với thực nghiệm, tỷ số của mô hình SMMT với thực nghiệm chỉ bằng 0,75, cao nhất trong các lý thuyết tính toán [15–17]. Đối với mẫu thử, có tỷ lệ hình học nhỏ (mẫu



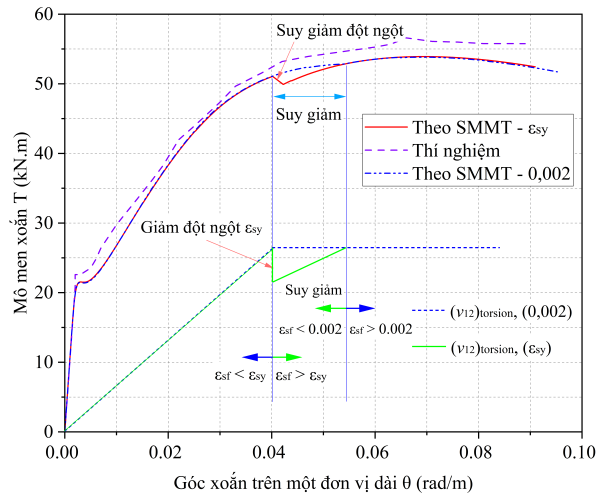
Hình 6. Ứng xử dầm BTCT theo mô hình SMMT và thực nghiệm [26]

SW4-1), lý thuyết tính toán gần với thực nghiệm hơn, tỷ số của mô hình SMMT so với thực nghiệm 1,08 cho mẫu thử này (Bảng 1). Ngoài ra, tỷ số trung bình cho tám mẫu thử dạng tường [27] theo mô hình SMMT là 0,88; trong khi theo ACI 318-19 [16] là 0,64. Tính toán cho thấy, các lý thuyết tính toán cho kết cấu tường chưa được chính xác, còn khá thận trọng khi các dự đoán theo tính toán nhỏ hơn khá nhiều so với thực nghiệm. Ngoài ra, tiêu chuẩn ACI 318-19 [16] cũng khuyến nghị đối với dầm có tỷ số lớn hơn hoặc bằng ba thì đề xuất một quy trình tính toán khác ngoài tiêu chuẩn này.

3.3. Ảnh hưởng của hiệu chỉnh quan hệ giữa biến dạng đơn trục và hai trục

Trên Hình 7 thể hiện quan hệ mô men xoắn – góc xoắn của thực nghiệm mẫu thử B5 của Hsu [23], mô hình SMMT cho điểm phân giới $\varepsilon_{sf} = 0,002$ và mô hình SMMT tại điểm phân giới của $\varepsilon_{sy} = \varepsilon_{sf}$ để đánh giá ảnh hưởng của độ xoắn v_{12} đến mô men xoắn. Biến dạng chảy dẻo đầu tiên của cốt thép ε_{sf} được thể hiện trong phương trình (10)–(12) ở trên, ảnh hưởng của tỉ số Hsu/Zhu đến xoắn thông qua hệ số $(v_{12})_{torsion}$ được chia thành hai giai đoạn thông qua điểm phân giới giả thiết là $\varepsilon_{sf} = 0,002$ theo đề xuất của Luu và cs. [28]. Trong thực tế, 0,002 cũng là biến dạng chảy dẻo điển hình của cốt thép. Nếu ε_{sy} lớn hơn hoặc nhỏ hơn 0,002, cả độ xoắn (v_{12}) và mô men xoắn T sẽ có sự thay đổi đột ngột ở mức $\varepsilon_{sy} = \varepsilon_{sf}$ theo phương trình (11) sử dụng trong SMMT. Hình 7 cho thấy ảnh hưởng của độ xoắn $(v_{12})_{torsion}$ trong mô hình SMMT khi $\varepsilon_{sy} < 0,002$. Nếu sử dụng ε_{sy} được sử dụng làm điểm phân giới ($\varepsilon_{sy} = \varepsilon_{sf}$), độ xoắn v_{12} và mô men xoắn bị suy giảm đột ngột ở điểm phân giới này, và mô

men xoắn cũng nhỏ hơn trong phạm vi $\varepsilon_{sy} < \varepsilon_{sf} < 0,002$. Nếu sử dụng $\varepsilon_{sf} = 0,002$ làm điểm phân giới thì mô men xoắn trong phạm vi $\varepsilon_{sy} < \varepsilon_{sf} < 0,002$ vẫn là một đường cong tròn (xem Hình 7 cho SMMT – 0,002). Hơn nữa, nếu $\varepsilon_{sy} > 0,002$ thì mô men xoắn tại điểm phân giới này sẽ tăng đột ngột.



Hình 7. Ảnh hưởng của hệ số khuếch đại $(v_{12})_{torsion}$ trong mô hình SMMT

4. Kết luận

Nghiên cứu đã trình bày phân tích, dự đoán ứng xử dầm BTCT chịu xoắn theo mô hình SMMT. Giá trị mô men xoắn cực hạn được xác định theo các tiêu chuẩn khác nhau ACI 318-19, EC2 và TCVN 5574:2018 để so sánh với mô hình SMMT. Tổng cộng 54 mẫu thử của các nghiên cứu thực nghiệm để đánh giá mô men xoắn cực hạn có kích thước hình học, tỉ lệ kích thước, hàm lượng cốt thép dọc, hàm lượng cốt đai và cường độ chịu nén bê tông khác nhau được thực hiện để kiểm chứng của các phương pháp, mô hình tính toán về giá trị mô men xoắn cực hạn, đường cong quan hệ T- θ cũng được thể hiện theo SMMT. Hơn nữa, ảnh hưởng của hệ số khuếch đại Hsu/Zhu cũng được xem xét. Từ kết quả phân tích, một số kết luận được rút ra như sau:

- Mô hình SMMT đã cho ứng xử rất tốt trước và sau nứt so với thực nghiệm. Mô hình SMMT cho độ chính xác và tin cậy cao, khi tỷ số tính toán theo SMMT so với thực nghiệm về mô men xoắn cực hạn cho hệ số trung bình 0,99.

- Giá trị mô men xoắn cực hạn T_u tính toán theo SMMT, TCVN 5574:2018, ACI 318M-19 và EC2. Tỷ số trung bình $T_{u,cal}/T_{u,exp}$ theo ACI 318M-19 cho giá trị nhỏ nhất bằng 0,69; trong khi đó theo SMMT cho giá trị lớn nhất (0,99) và với độ lệch chuẩn nhỏ nhất bằng 0,12. Tỷ số trung bình $T_{u,cal}/T_{u,exp}$ theo EC2 và TCVN 5574:2018 cùng bằng 0,73. Các tiêu chuẩn có độ an toàn cao trong thiết kế chịu xoắn và theo ACI 318M-19 cho độ an toàn cao hơn so với tiêu chuẩn EC2 và TCVN 5574:2018, trái lại theo SMMT phản ánh gần với thực tế hơn.

- Ảnh hưởng của hệ số khuếch đại Hsu/Zhu làm thay đổi đột ngột độ xoắn (v_{12}) và mô men xoắn T tại điểm phân giới ε_{sy} . Kiến nghị nên sử dụng điểm phân giới $\varepsilon_{sf} = 0,002$ cho mô hình SMMT tránh sự thay đổi đột ngột tại điểm này.

Tài liệu tham khảo

- [1] Hiếu, N. T., Cường, L. T. (2018). Experimental study on the strengthening efficiency of reinforced concrete beams under torsion using CFRP sheets. *Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ*, 60(3):30–35.
- [2] Hsu, T. T. C. (1988). Softened truss model theory for shear and torsion. *Structural Journal*, 85(6): 624–635.

- [3] Fu, C. C., Tang, Y. (2001). [Torsional analysis for prestressed concrete multiple cell box](#). *Journal of Engineering Mechanics*, 127(1):45–51.
- [4] Mo, Y.-L., Jeng, C.-H., Chang, Y. S. (2000). [Torsional behavior of prestressed concrete box-girder bridges with corrugated steel webs](#). *Structural Journal*, 97(6):849–859.
- [5] Rahal, K. N., Collins, M. P. (1996). [Simple model for predicting torsional strength of reinforced and prestressed concrete sections](#). *Structural Journal*, 93(6):658–666.
- [6] Hsu, T. T. C., Zhu, R. R. H. (2002). [Softened membrane model for reinforced concrete elements in shear](#). *Structural Journal*, 99(4):460–469.
- [7] Jeng, C.-H., Hsu, T. T. C. (2009). [A softened membrane model for torsion in reinforced concrete members](#). *Engineering Structures*, 31(9):1944–1954.
- [8] Zhu, R. R. H., Hsu, T. T. C. (2002). Poisson effect in reinforced concrete membrane elements. *Structural Journal*, 99(5):631–640.
- [9] Jeng, C.-H., Chiu, H.-J., Chen, C.-S. (2010). [Modeling the Initial Stresses in Prestressed Concrete Members under Torsion](#). *Structures Congress 2010*, American Society of Civil Engineers.
- [10] Jeng, C.-H., Peng, X., Wong, Y. L. (2011). [Strain gradient effect in RC elements subjected to torsion](#). *Magazine of Concrete Research*, 63(5):343–356.
- [11] Jeng, C.-H., Chiu, H.-J., Peng, S.-F. (2013). [Design Formulas for Cracking Torque and Twist in Hollow Reinforced Concrete Members](#). *ACI Structural Journal*, 110(3).
- [12] Zojaji, A. R., Kabir, M. Z. (2012). [Analytical approach for predicting full torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with FRP materials](#). *Scientia Iranica*, 19(1):51–63.
- [13] Shen, K., Wan, S., Mo, Y. L., Jiang, Z. (2018). [Theoretical analysis on full torsional behavior of RC beams strengthened with FRP materials](#). *Composite Structures*, 183:347–357.
- [14] Đạt, P. X. (2020). [Nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm ứng xử xoắn thuần túy của dầm bê tông cốt thép](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 14(1V):73–80.
- [15] EC2 (2004). *Design of Concrete Structures, Reinforced Concrete Standards; Reinforced Concrete Construction Standards*. European Committee for Standardization.
- [16] ACI-318-19 (2019). *Building code requirements for structural concrete and commentary*. American Concrete Institute, Farmington Hills, MI.
- [17] TCVN 5574:2018. *Kết cấu bê tông và bê tông cốt thép - Tiêu chuẩn thiết kế*. Viện Khoa học Công nghệ Xây dựng - Bộ Xây dựng.
- [18] Lessing, N. N. (1959). Determination of the bearing capacity of reinforced concrete elements of rectangular cross-section, working in bending with torsion. *Investigation of the Strength of Elements of Reinforced Concrete Structures*, 5:3–28.
- [19] Hsu, T. T. C. (1993). *Unified theory of reinforced concrete*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [20] Wang, J. (2006). *Constitutive relationships of pre-stressed concrete membrane elements*. PhD Thesis, University of Houston.
- [21] Bairan, J. M., Mari, A. R. (2007). [Multiaxial-coupled analysis of RC cross-sections subjected to combined forces](#). *Engineering Structures*, 29(8):1722–1738.
- [22] MATLAB (2023). *MATLAB - R2023a*.
- [23] Hsu, T. T. C. (1968). Torsion of structural concrete-behavior of reinforced concrete rectangular members. *Special Publication*, 18:261–306.
- [24] Chalioris, C. E. (2006). [Behaviour model and experimental study for the torsion of reinforced concrete members](#). *High Performance Structures and Materials III*, WIT Press, 85:459–468.
- [25] Chiu, H.-J., Fang, I.-K., Young, W.-T., Shiau, J.-K. (2007). [Behavior of reinforced concrete beams with minimum torsional reinforcement](#). *Engineering Structures*, 29(9):2193–2205.
- [26] Lee, J.-Y., S.-W., K., Kim, J.-H. (2008). [Torsional strength and failure modes of reinforced concrete beams subjected to pure torsion](#). *Journal of the Korea Concrete Institute*, 20(4):503–511.
- [27] Peng, X.-N., Wong, Y.-L. (2011). [Behavior of reinforced concrete walls subjected to monotonic pure torsion—An experimental study](#). *Engineering Structures*, 33(9):2495–2508.
- [28] Luu, C. H., Mo, Y. L., Hsu, T. T. C. (2017). [Development of CSMM-based shell element for reinforced concrete structures](#). *Engineering Structures*, 132:778–790.