

# DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA DẦM NANO LÀM BẰNG VẬT LIỆU FGM CÓ VẾT NỨT

Trần Văn Liên<sup>a,\*</sup>, Trần Bình Định<sup>a</sup>, Nguyễn Tất Thắng<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 05/4/2024, Sửa xong 29/5/2024, Chấp nhận đăng 12/7/2024

## Tóm tắt

Bài báo trình bày lời giải nghiệm chính xác cho bài toán dao động cưỡng bức của dầm nano có cơ tính biến thiên (FGM) có vết nứt với các điều kiện biên bất kỳ dựa trên lý thuyết đàn hồi không cục bộ (NET) và lý thuyết dầm Timoshenko. Trong đó, NET có xét đến hiệu ứng kích thước của các kết cấu nano, các đặc trưng vật liệu FGM thay đổi phi tuyến theo chiều cao dầm. Mô hình vết nứt gồm hai lò xo đàn hồi với độ cứng phụ thuộc vào độ sâu vết nứt. Phương trình dao động được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton, NET và lý thuyết dầm Timoshenko với các điều kiện biên khác nhau được thiết lập từ dạng yếu của phương trình chuyển động đã khắc phục nghịch lý không cục bộ. Ảnh hưởng của các tham số hình học, kích thước nano, vật liệu, vết nứt đến dao động cưỡng bức của dầm nano FGM được nghiên cứu chi tiết.

*Từ khóa:* vết nứt; FGM; dầm nano; không cục bộ; dạng yếu.

## FORCED VIBRATION OF THE CRACKED NANOBEM MADE OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS

### Abstract

This article presents the exact closed-form solution for the forced vibration of cracked FGM nanobeams with arbitrary boundary conditions based on nonlocal elasticity theory (NET) and Timoshenko beam theory. The NET considering the size effect of nanostructures is applied, and the FGM characteristics. change nonlinearly with beam height. The crack model consists of two elastic springs with the stiffness depending on the crack depth. The vibration equations are established based on the Hamilton principle, NET and Timoshenko beam theory. The nonlocal boundary conditions established from the weak form of the equation of motion overcame the nonlocal paradox. The effect of size-effect, geometrical parameters, materials, and cracks on the forced vibration of FGM cracked nanobeams is studied in detail.

*Keywords:* cracks; FGM; nano beam; nonlocal; weak form.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(3V\)-02](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(3V)-02) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) [1, 2] là một dạng vật liệu composite tiên tiến với các đặc trưng cơ học thay đổi liên tục theo một hoặc hai phương xác định. Đặc tính trơn này làm giảm sự tập trung ứng suất và tăng sự kết dính giữa các lớp vật liệu khác nhau. FGM cũng được sử dụng trong các kết cấu dầm, tấm, vỏ của các thiết bị vi cơ điện tử có kích thước nano hoặc macro. Việc nghiên cứu, tính toán, chế tạo và ứng dụng các thiết bị kích thước nhỏ cỡ micro mét ( $10^{-6}$  m) hoặc nano mét ( $10^{-9}$  m) làm bằng các vật liệu tiên tiến như FGM trong các lĩnh vực khoa học công nghệ cao đang là xu hướng phát triển mạnh mẽ của khoa học công nghệ trên thế giới và trong nước. Hiện nay có khoảng 10 lý thuyết Cơ học môi trường liên tục hiện đại xét đến các hiệu ứng kích thước cho các môi trường có kích thước micro/nano, mỗi lý thuyết có một số tham số xác định [3, 4]. Do chỉ sử dụng một

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [lientv@huce.edu.vn](mailto:lientv@huce.edu.vn) (Liên, T. V.)

tham số kích thước nên các lý thuyết đàn hồi không cục bộ Eringen (NET) [5], lý thuyết cặp ứng suất sửa đổi (Modified Couple Stress Theory) [6], và lý thuyết cặp ứng suất thống nhất (Consistent Couple Stress Theory) [7] đã được nhiều tác giả lựa chọn nghiên cứu cho kết cấu nano. Trong đó, NET được sử dụng rộng rãi trong phân tích dao động kết cấu nano từ vật liệu thuần nhất [8–11] và FGM [12].

Trong kết cấu nano, hư hỏng hoặc vết nứt xuất hiện do ảnh hưởng của nhiệt độ hoặc bị mất nguyên tử, ... ví dụ như việc mất nguyên tử trong dầm nano là do năng lượng biến dạng bị vượt quá một giới hạn nào đó [13]. Kết quả nghiên cứu cơ bản về phân tích dao động của các kết cấu nano nguyên vẹn có rất nhiều so với các kết cấu nano có hư hỏng. Nguyên nhân cơ bản là do các khó khăn của bài toán cơ học phá hủy đối với vật liệu FGM [14–17] và sự phức tạp của bài toán dao động đối với các kết cấu nano có vết nứt. Dùng NET, các tác giả [18–22] đã nghiên cứu dao động dọc của thanh nano đồng nhất có một vết nứt cho các điều kiện biên bất kỳ. Kiani và Zur [23] đã phân tích dao động tự do của hai thanh nano ghép song song với vết nứt cục bộ dùng NET có xét đến hiệu ứng bề mặt. Akbas [24] đã phân tích dao động dọc của thanh nano có vết nứt chịu tải trọng điều hòa. Các tác giả [25–27] đã nghiên cứu dao động xoắn của thanh nano đồng nhất. Dao động tự do của dầm nano đồng nhất có vết nứt đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Các tác giả [28–30] đã nghiên cứu dao động của dầm nano có một vết nứt với một số điều kiện biên. Các tác giả [31–35] đã nghiên cứu tần số dao động tự do của dầm nano nhiều vết nứt và có dạng bậc. Hossain và Lellep [36] đã phân tích sự thay đổi dạng dao động của dầm nano có vết nứt trên nền đàn hồi. Các tác giả [37–40] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm nano có vết nứt trong môi trường nhiệt. Pourtemad và cs. [41] đã nghiên cứu tần số dao động tự do của dầm nano có nhiều vết nứt tiết diện không đều.

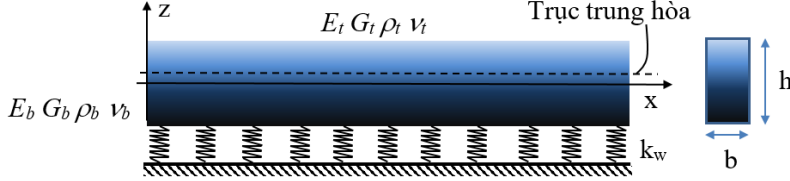
Các nghiên cứu trên đều áp dụng cho thanh, dầm nano bằng vật liệu đồng nhất, chỉ có ít nghiên cứu dưới đây về dao động tự do của dầm FGM có vết nứt dùng NET. Soltanpour và cs. [42] đã phân tích dao động tự do của dầm FGM có vết nứt nằm trên nền đàn hồi polymer. Ghadiri và cs. [13] đã phân tích ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt đến dao động tự do của dầm nano Timoshenko có vết nứt trên nền đàn hồi. Esen và cs. [43] đã phân tích dao động tự do của dầm micro trên nền đàn hồi trong môi trường từ và nhiệt. Toàn bộ các nghiên cứu trên là dành cho dầm nano FGM có một vết nứt cho dầm hai đầu khớp hoặc hai đầu ngàm. Tần số riêng được tính từ định thức của ma trận cấp  $8 \times 8$  bao gồm bốn điều kiện biên và bốn điều kiện liên tục tại tiết diện có vết nứt. Gần đây, Attia và cs. [44] đã phân tích sự thay đổi của tần số dao động riêng cho dầm FGM hai chiều có hai vết nứt bằng phương pháp cầu phương vi phân.

Do việc thiết lập điều kiện biên theo NET từ nguyên lý Hamilton là không chính xác nên gây ra nghịch lý không cục bộ đối với tần số cơ bản hoặc độ võng của dầm công xôn [44–46], điển hình là kết quả bài báo [44] xuất bản năm 2024. Do đó, các báo cáo công bố thường tránh đề cập đến nghiên cứu loại dầm này. Tuy vậy, loại dầm nano công xôn rất hay được dùng trong thực tế, đặc biệt trong các thiết bị thu thập năng lượng. Một số nghiên cứu đã đề xuất các giải pháp khác nhau để khắc phục nghịch lý này. Challamel và cs. [47] đã đề xuất mô hình dầm rời rạc, Khodabakhshi và Reddy [48] đã đề xuất mô hình vi-tích phân thống nhất thay thế cho mô hình không cục bộ. Gần đây, Xu và cs. [49], Aria và Friswell [50], Liên và cs. [51, 52] đã đề xuất dùng dạng yếu của phương trình vi phân chuyển động để thu được điều kiện biên chính xác.

Trong bài báo này, phương trình vi phân dao động của dầm nano Timoshenko FGM đã được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton, NET có xét đến vị trí thực của trục trung hòa. Vết nứt của dầm nano FGM được mô hình hóa bằng hai lò xo đàn hồi có độ cứng phụ thuộc độ sâu vết nứt theo cơ học phá hủy, các lò xo này kết nối hai đoạn dầm nano nguyên vẹn với nhau. Nghiệm chính xác của phương trình vi phân dao động cưỡng bức cho dầm nano FGM có nhiều vết nứt cùng với dạng yếu của điều kiện biên không cục bộ đã được đề xuất. Độ tin cậy của nghiệm đề xuất được kiểm chứng thông qua

so sánh kết quả số với các kết quả đã công bố của các nghiên cứu khác. Từ đó, các tác giả đã nghiên cứu chi tiết dao động cường bức của dầm nano FGM có nhiều vết nứt theo các tham số hình học, vật liệu, vết nứt khác nhau và rút ra các kết luận cần thiết.

## 2. Nghiệm bài toán dao động cường bức của dầm nano FGM nguyên vẹn



Hình 1. Dầm nano FGM trên nền đàn hồi Winkler

Xét dầm nano FGM có tiết diện chữ nhật  $b \times h$ , chiều dài  $L$ , nằm trên nền đàn hồi Winkler với hệ số nền  $K_w$ . Hàm vật liệu FGM có dạng lũy thừa [1]

$$\{E(z), G(z), \rho(z)\}^T = \{E_b, G_b, \rho_b\}^T + \{E_t - E_b, G_t - G_b, \rho_t - \rho_b\}^T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (1)$$

trong đó  $E, G, \rho$  là mô đun đàn hồi Young, mô đun đàn hồi trượt và mật độ khối lượng; chỉ số  $t$  và  $b$  chỉ lớp vật liệu trên và dưới;  $n$  là chỉ số phần thể tích (Hình 1). Dầm chịu tải trọng phân bố  $p(x, t)$  và  $q(x, t)$  theo các trục  $x$  và  $z$  tương ứng. Chuyển vị của dầm Timoshenko được viết dưới dạng:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - (z - h_0)\theta(x, t); \quad w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (2)$$

trong đó  $u_0(x, t)$  là chuyển vị dọc trục;  $w_0(x, t)$  là chuyển vị ngang hoặc độ võng của điểm trên trục trung hòa;  $h_0$  là khoảng cách từ trục trung hòa đến trục  $x$  là trục đặt tại mặt giữa của dầm;  $\theta$  là góc xoay của tiết diện quanh trục. Bỏ qua ảnh hưởng của chuyển vị dọc trục và hiệu ứng kích thước, Eltaher và cs. [53] đã xác định được vị trí trục trung hòa cho dầm nano như sau:

$$h_0 = \frac{nh(R_E - 1)}{2(n + 2)(n + R_E)}; \quad R_E = \frac{E_t}{E_b} \quad (3)$$

Trong nghiên cứu trước [54], các tác giả đã thiết lập được phương trình dao động của dầm nano FGM nguyên vẹn có dạng

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - I_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} \right) &= -p + \mu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ A_{22} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{33} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta \right) - I_{22} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \mu I_{12} \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu I_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial t^2} &= 0 \\ A_{33} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - I_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \mu I_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} - K_w w_0 + \mu K_w \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= -q + \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

và điều kiện biên tương ứng

$$\begin{aligned} u_0 = 0 \text{ or } N &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \theta = 0 \text{ or } M &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{22} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left[ I_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + K_w w_0 - q \right] \\ w_0 = 0 \text{ or } Q &= A_{33} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta \right) + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + K_w \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

với  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  và  $A_{33}$  là các độ cứng;  $I_{11}, I_{12}, I_{22}$  lần lượt là các mô men khối lượng

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}) &= \int_A E(z) [1, z - h_0, (z - h_0)^2] dA; & A_{33} &= \frac{5}{6} \int_A G(z) dA \\ (I_{11}, I_{12}, I_{22}) &= \int_A \rho(z) [1, z - h_0, (z - h_0)^2] dA \end{aligned} \quad (6)$$

$\mu = (e_0 a)^2$  là tham số không cục bộ, trong đó  $e_0$  là hằng số cho mỗi loại vật liệu;  $a$  là chiều dài đặc trưng bên trong của dầm nano [5].

Điều kiện biên (5) dẫn đến nghịch lý không cục bộ trong bài toán dao động của dầm nano theo NET. Để khắc phục, sử dụng phép tính biến phân Liên và cs. [51, 52] đã đề xuất dùng dạng yếu của phương trình chuyển động để thu được điều kiện biên nhất quán biến phân (variational-consistent), còn gọi là điều kiện biên dạng yếu, có dạng sau:

$$\begin{aligned} u_0 = 0 \text{ or } N &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ \theta = 0 \text{ or } M &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{22} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( I_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} - I_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \right) \\ w_0 = 0 \text{ or } Q &= A_{33} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta \right) + \mu \left( I_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + K_w \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Như vậy, điều kiện biên dạng yếu (7) không có số hạng quán tính  $\mu I_{11} \partial^2 w_0 / \partial t^2$  so với điều kiện biên thông thường (5). Kết quả tương tự này đã được Challamel và cs. [47] đề cập đến khi xét dao động của dầm Euler-Bernoulli đồng nhất.

Sử dụng phép biến đổi Fourier:

$$\begin{aligned} \{U, \Theta, W\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{u_0(x, t), \theta(x, t), w_0(x, t)\} e^{-i\omega t} dt \\ \{\bar{P}(x, \omega), \bar{Q}(x, \omega)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \{p(x, t), q(x, t)\} e^{-i\omega t} dt \end{aligned} \quad (8)$$

ta nhận được phương trình vi phân dao động trong miền tần số

$$[\bar{\mathbf{A}}] \left\{ \frac{d^2 \mathbf{z}}{dx^2} \right\} + [\bar{\mathbf{B}}] \left\{ \frac{d\mathbf{z}}{dx} \right\} + [\bar{\mathbf{C}}] \{\mathbf{z}\} = -\{\mathbf{q}\} \quad (9)$$

và điều kiện biên được thiết lập từ dạng yếu

$$(N \quad M \quad Q)^T = [\mathbf{B}_F] \{\mathbf{z}\} - \mu \{\bar{\mathbf{Q}}\} \quad (10)$$

trong đó  $[\bar{\mathbf{A}}]; [\bar{\mathbf{B}}]; [\bar{\mathbf{C}}]; \{\mathbf{z}\}; \{\mathbf{q}\}; \{\bar{\mathbf{Q}}\}$  là các ma trận

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{A}}] &= \begin{pmatrix} A_{11} - \mu I_{11} \omega^2 & -(A_{12} - \mu I_{12} \omega^2) & 0 \\ -(A_{12} - \mu I_{12} \omega^2) & A_{22} - \mu I_{22} \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} - \mu I_{11} \omega^2 + \mu K_w \end{pmatrix}; [\bar{\mathbf{B}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \\ 0 & -A_{33} & 0 \end{pmatrix} \\ [\bar{\mathbf{C}}] &= \begin{pmatrix} I_{11} \omega^2 & -I_{12} \omega^2 & 0 \\ -I_{12} \omega^2 & I_{22} \omega^2 - A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \omega^2 - K_w \end{pmatrix}; \{\mathbf{z}\} = \begin{pmatrix} U \\ \Theta \\ W \end{pmatrix}; \{\mathbf{q}\} = \begin{pmatrix} \bar{P} - \mu \frac{d^2 \bar{P}}{dx^2} \\ 0 \\ \bar{Q} - \mu \frac{d^2 \bar{Q}}{dx^2} \end{pmatrix}; \{\bar{\mathbf{Q}}\} = \begin{pmatrix} d\bar{P}/dx \\ \bar{Q} \\ d\bar{Q}/dx \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$[\mathbf{B}_F]$  là toán tử điều kiện biên dạng yếu

$$[\mathbf{B}_F] = \begin{bmatrix} (A_{11} - \mu I_{11} \omega^2) \partial_x & -(A_{12} - \mu I_{12} \omega^2) \partial_x & 0 \\ (A_{12} - \mu I_{12} \omega^2) \partial_x & -(A_{22} - \mu I_{22} \omega^2) \partial_x & 0 \\ 0 & -A_{33} & (A_{33} - \mu I_{11} \omega^2 + \mu K_w) \partial_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

Phương trình dao động tự do của dầm nano Timoshenko FGM có dạng

$$[\bar{\mathbf{A}}] \left\{ \frac{d^2 \mathbf{z}}{dx^2} \right\} + [\bar{\mathbf{B}}] \left\{ \frac{d\mathbf{z}}{dx} \right\} + [\bar{\mathbf{C}}] \{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (13)$$

Khi đó, biểu thức nghiệm tổng quát cho bài toán dao động tự do của dầm nano Timoshenko FGM nguyên vẹn có dạng

$$\{\mathbf{z}_0(x, \omega)\} = [\mathbf{G}(x, \omega)] \{\mathbf{C}\} \quad (14)$$

trong đó  $\mathbf{G}$  là ma trận

$$[\mathbf{G}(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{k_1 x} & \alpha_2 e^{k_2 x} & \alpha_3 e^{k_3 x} \\ e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ \beta_1 e^{k_1 x} & \beta_2 e^{k_2 x} & \beta_3 e^{k_3 x} \end{bmatrix}; [\mathbf{G}_2(x, \omega)] = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-k_1 x} & \alpha_2 e^{-k_2 x} & \alpha_3 e^{-k_3 x} \\ e^{-k_1 x} & e^{-k_2 x} & e^{-k_3 x} \\ -\beta_1 e^{-k_1 x} & -\beta_2 e^{-k_2 x} & -\beta_3 e^{-k_3 x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\alpha_j$  và  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) là các hệ số

$$\alpha_j = \frac{(A_{12} - \mu I_{12} \omega^2) k_j^2 + I_{12} \omega^2}{[A_{11} - \mu I_{11} \omega^2 + \mu K_u] k_j^2 + I_{11} \omega^2 - K_u}; \quad \beta_j = \frac{A_{33} k_j}{[A_{33} - \mu I_{11} \omega^2 + \mu K_w] k_j^2 + I_{11} \omega^2 - K_w} \quad (16)$$

$k_j$  là số sóng được xác định từ phương trình đặc trưng

$$\det(k^4 [\bar{\mathbf{A}}] + k^2 [\bar{\mathbf{B}}] + [\bar{\mathbf{C}}]) = 0 \quad (17)$$

$\{\mathbf{C}\} = (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)^T$  là các hằng số, được xác định từ điều kiện biên tại 2 đầu dầm. Nghiệm riêng của phương trình (9) liên quan đến tải trọng ngoài  $\{\mathbf{q}\}$  có dạng

$$\{\mathbf{z}_q(x, \omega)\} = \int_0^x [\mathbf{H}(x - \tau, \omega)] \{\mathbf{q}(\tau, \omega)\} d\tau \quad (18)$$

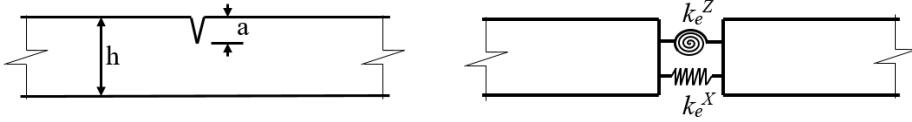
trong đó  $[\mathbf{H}(x, \omega)]$  là ma trận truyền thỏa mãn phương trình

$$[\bar{\mathbf{A}}] \left[ \frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} \right] + [\bar{\mathbf{B}}] \left[ \frac{d\mathbf{H}}{dx} \right] + [\bar{\mathbf{C}}] [\mathbf{H}] = [\mathbf{0}] \quad (19)$$

và điều kiện biên tại đầu trái dầm

$$[\mathbf{H}(0)] = [\mathbf{0}]; \quad [\mathbf{H}'(0)] = [\bar{\mathbf{A}}]^{-1} \quad (20)$$

### 3. Dầm nano FGM có nhiều vết nứt và điều kiện biên



Hình 2. Dầm nano FGM có vết nứt và cặp lò xo đàn hồi tương đương

Đối với dầm nano FGM, vết nứt tại vị trí  $x = e$  được mô hình hóa bằng một lò xo dọc trực với độ cứng  $k_e^X$  và một lò xo xoắn với độ cứng  $k_e^Z$  kết nối hai đoạn thanh nguyên vẹn tại tiết diện có vết nứt (Hình 2). Điều kiện liên tục tại tiết diện có vết nứt là [55]

$$\begin{pmatrix} U(e_+) \\ \Theta(e_+) \\ W'_x(e_+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U(e_-) \\ \Theta(e_-) \\ W'_x(e_-) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U'_x(e) \\ \Theta'_x(e) \\ W'_x(e) \end{pmatrix} \quad (21)$$

với

$$\gamma_1 = A_{11}/k_e^X; \quad \gamma_2 = A_{22}/k_e^Z \quad (22)$$

Các tham số  $\gamma_1, \gamma_2$  được gọi là tham số độ lớn vết nứt, nó phụ thuộc các tham số vật liệu như mô đun đàn hồi Young, hệ số nở ngang Poisson, chỉ phần thể tích và tham số hình học như tỷ số giữa độ sâu vết nứt và chiều cao dầm, ...

$$\gamma_1 = 2\pi(1 - \nu^2)h\phi_1(R_E, n) f_1\left(\frac{a}{h}\right); \quad \gamma_2 = 6\pi(1 - \nu^2)h\phi_2(R_E, n) f_2\left(\frac{a}{h}\right) \quad (23)$$

trong đó  $\phi_1$  và  $\phi_2$  là các hàm của tham số vật liệu FGM;  $f_1$  và  $f_2$  là các hàm thực nghiệm được xác định theo Cơ học phá hủy [55].

Nghiệm riêng của phương trình (13) thỏa mãn điều kiện biên trái tại  $x = 0$  là vế phải của (21) được biểu diễn dưới dạng [52]

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = [\bar{\mathbf{G}}_C(x, \omega)]\{\mathbf{z}'_0(e)\} \quad (24)$$

trong đó  $[\bar{\mathbf{G}}_C(x, \omega)]$  và  $\{\mathbf{z}'_0(e)\}$  là các ma trận

$$[\bar{\mathbf{G}}_C(x, \omega)]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cosh k_1 x & \alpha_2 \cosh k_2 x & \alpha_3 \cosh k_3 x \\ \cosh k_1 x & \cosh k_2 x & \cosh k_3 x \\ \beta_1 \sinh k_1 x & \beta_2 \sinh k_2 x & \beta_3 \sinh k_3 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 k_1 & \beta_2 k_2 & \beta_3 k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

và

$$\{\mathbf{z}'_0(e)\} = (U'_x(e) \quad \Theta'_x(e) \quad W'_x(e))^T \quad (26)$$

Đưa vào ma trận hàm số

$$[\mathbf{G}_C(x, \omega)]_{3 \times 3} = \begin{cases} [\tilde{\mathbf{G}}_C(x, \omega)] & : x > 0 \\ [\mathbf{0}] & : x \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

và áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm, ta nhận được nghiệm phương trình (13) cho dầm nano có một vết nứt như sau

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = \{\mathbf{z}_0(x, \omega)\} + [\mathbf{G}_C(x - e, \omega)] \{\mathbf{z}'_0(e)\} \quad (28)$$

trong đó số hạng đầu tiên là nghiệm phương trình dao động tự do của dầm nano FGM nguyên vẹn, số hạng thứ hai là do vết nứt tại vị trí  $e$ . Dựa trên quan hệ hồi quy trên đây, ta nhận được nghiệm phương trình (4) cho dầm nano có nhiều vết nứt như sau:

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = \left[ [\mathbf{G}(x, \omega)] + \sum_{j=1}^{n_c} [\mathbf{G}_C(x - e_j)] [\tilde{\chi}_j] \right] \{\mathbf{C}\} = [\tilde{\Psi}(x, \omega)] \{\mathbf{C}\} \quad (29)$$

trong đó

$$[\tilde{\Psi}(x, \omega)]_{3 \times 6} = [\mathbf{G}(x, \omega)] + \sum_{j=1}^{n_c} [\mathbf{G}_C(x - e_j)] [\tilde{\chi}_j] \quad (30)$$

và  $[\tilde{\chi}_j]$  là ma trận hằng số

$$[\tilde{\chi}_j]_{3 \times 6} = [\mathbf{G}'(e_j)] + \sum_{k=1}^{j-1} [\mathbf{G}'_C(e_j - e_k)] [\tilde{\chi}_k]; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (31)$$

Nghiệm đầy đủ của phương trình (9) cho dầm nano FGM có nhiều vết nứt chịu tải trọng ngoài có dạng sau:

$$\{\mathbf{z}_c(x, \omega)\} = [\tilde{\Psi}(x, \omega)] \{\mathbf{C}\} - \{\mathbf{z}_q(x, \omega)\} \quad (32)$$

Điều kiện biên (10) có thể viết dưới dạng:

$$\{\mathbf{B}_0(\mathbf{z}_c)|_{x=0}\} = \mu \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\}; \quad \{\mathbf{B}_L(\mathbf{z}_c)|_{x=L}\} = \mu \{\tilde{\mathbf{Q}}_L\} \quad (33)$$

với  $[\mathbf{B}_0]$ ,  $[\mathbf{B}_L]$  là các ma trận toán tử  $3 \times 3$ . Do số hạng thứ hai của (29) và nghiệm riêng (18) thỏa mãn điều kiện biên bằng 0 tại biên trái  $x = 0$  nên khi áp điều kiện biên thứ nhất của (33) vào số hạng thứ nhất của (29), ta có

$$[\mathbf{B}_0] \{\mathbf{z}_0\} = [\mathbf{B}_{01}] \{\mathbf{C}_0\} + [\mathbf{B}_{02}] \{\mathbf{C}_L\} = \mu \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\} \quad (34)$$

với các hằng số  $\{\mathbf{C}_0\} = (C_1, C_2, C_3)^T$ ;  $\{\mathbf{C}_L\} = (C_4, C_5, C_6)^T$  và các ma trận

$$[\mathbf{B}_{01}(\omega)] = [\mathbf{B}_0(\mathbf{G}_1(x, \omega))|_{x=0}]; \quad [\mathbf{B}_{02}(\omega)] = [\mathbf{B}_0(\mathbf{G}_2(x, \omega))|_{x=0}] \quad (35)$$

Khử  $\{\mathbf{C}_0\}$  từ (34) ta nhận được

$$\{\mathbf{C}_0\} = [\mathbf{B}_{01}]^{-1} \mu \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\} - [\mathbf{B}_{01}]^{-1} [\mathbf{B}_{02}] \{\mathbf{C}_L\} \quad (36)$$

Do đó nghiệm  $\{\mathbf{z}_0(x)\}$  có thể viết dưới dạng

$$\{\mathbf{z}_0(x, \omega)\} = [\mathbf{G}_1(x, \omega)] [\mathbf{B}_{01}]^{-1} \mu \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\} + [\mathbf{G}_0(x, \omega)] \{\mathbf{C}_L\} \quad (37)$$

trong đó  $[\mathbf{G}_0(x, \omega)]$  là ma trận

$$[\mathbf{G}_0(x, \omega)] = [\mathbf{G}_2(x, \omega)] - [\mathbf{G}_1(x, \omega)] [\mathbf{B}_{01}]^{-1} [\mathbf{B}_{02}] \quad (38)$$

Từ đó ta nhận được biểu thức nghiệm chính xác của (9) có dạng

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{z}}_c(x, \omega)\} = & \mu [\mathbf{G}_1(x, \omega)] [\mathbf{B}_{01}]^{-1} \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\} + [\mathbf{G}_0(x, \omega)] \{\mathbf{C}_L\} \\ & + \sum_{j=1}^{n_c} [\mathbf{G}_C(x - e_j)] [\bar{\chi}_j] \{\mathbf{C}_L\} - \{\mathbf{z}_q(x, \omega)\} \end{aligned} \quad (39)$$

Biểu thức nghiệm (39) gồm bốn số hạng: số hạng thứ nhất thể hiện ảnh hưởng của điều kiện biên bên trái, số hạng thứ hai thể hiện đáp ứng tần số của dầm nguyên vẹn, số hạng thứ ba là ảnh hưởng của vết nứt, số hạng cuối là nghiệm riêng tương ứng với dạng tải trọng ngoài cho trước.

Áp điều kiện biên bên phải dầm (33) cho nghiệm (39), ta nhận được phương trình xác định các hằng số  $\{\mathbf{C}_L\}$  như sau:

$$\left( [\mathbf{B}_{L0}(\omega)] + \sum_{j=1}^{n_c} [\mathbf{B}_{L\bar{G}}(e_j)] [\chi_j] \right) \{\mathbf{C}_L\} = \{\mathbf{b}_{Lq}(\omega)\} + \mu \left( \{\tilde{\mathbf{Q}}_L\} - [\mathbf{B}_{L1}] [\mathbf{B}_{01}]^{-1} \{\tilde{\mathbf{Q}}_0\} \right) \quad (40)$$

trong đó

$$[\mathbf{B}_{L0}(\omega)] = [\mathbf{B}_L(\mathbf{G}_0(x, \omega))|_{x=L}]; \quad [\mathbf{B}_{L\bar{G}}(e_j)] = \left[ \mathbf{B}_L(\bar{\mathbf{G}}(x - e_j)) \right]_{x=L} \quad (41)$$

và

$$\{\mathbf{b}_{Lq}(\omega)\} = \left\{ \mathbf{B}_L(\mathbf{z}_q(x, \omega)) \right\}_{x=L}; \quad [\mathbf{B}_{L1}] = [\mathbf{B}_L \mathbf{G}_1(x, \omega)|_{x=L}] \quad (42)$$

Giải phương trình (40), ta xác định được hằng số  $\{\mathbf{C}_L\}$ , từ đó ta nhận được nghiệm đầy đủ của phương trình dao động cưỡng bức của dầm nano FGM có nhiều vết nứt.

#### 4. Kết quả số và thảo luận

Dưới đây, ta sẽ sử dụng các đại lượng tần số, độ võng, góc xoay, mô men và lực cắt không thứ nguyên như sau:

$$\lambda_i = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{\rho_m A m}{E_m I}}; I = \frac{bh^3}{12}; \mu^* = \left( \frac{e_0 a}{h} \right)^2; k_w = \frac{K_w L^4}{E_m I}; w^* = \frac{A_{22} w}{q L^4}; \theta^* = \frac{A_{22} \theta}{q L^3}; M^* = \frac{M}{q L^2}; Q^* = \frac{Q}{q L} \quad (43)$$

Bảng 1 là so sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của dầm nano FGM nguyên vẹn có hai đầu ngàm với kết quả số của Aria và Friswell [50] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với 26 phần tử theo các tham số không cục bộ  $\mu^*$ , tham số vật liệu  $n$  và tỷ số chiều dài/chiều cao dầm  $L/h$  khác nhau. Sự trùng hợp hoàn toàn của các kết quả tính cũng thu được với các điều kiện biên khác như hai đầu khớp, công xôn và đầu ngàm - đầu khớp. Bảng 2 là kết quả so sánh ba tần số không thứ nguyên đầu tiên của dầm nano hai đầu khớp có một vết nứt tại tiết diện giữa nhịp với các tham số vết nứt và tham số không cục bộ khác nhau với kết quả đã công bố của Torabi và Dasgerdi [29]. Ta nhận thấy sai số giữa các kết quả là rất bé, chấp nhận được. Các kết quả kiểm chứng trên đây đã khẳng định độ chính xác và tin cậy của nghiệm đề xuất.

Xét dầm nano FGM với các tham số vật liệu [53]: mặt dưới là kim loại với  $E_b = 70$  Gpa,  $G_b = 26$  Gpa,  $\rho_b = 2700$  kg/m<sup>3</sup>; mặt trên là gốm với  $E_t = 393$  Gpa,  $G_t = 157$  Gpa,  $\rho_t = 3960$  kg/m<sup>3</sup>; hệ số



Bảng 1. So sánh tần số cơ bản không thứ nguyên của dầm nano FGM

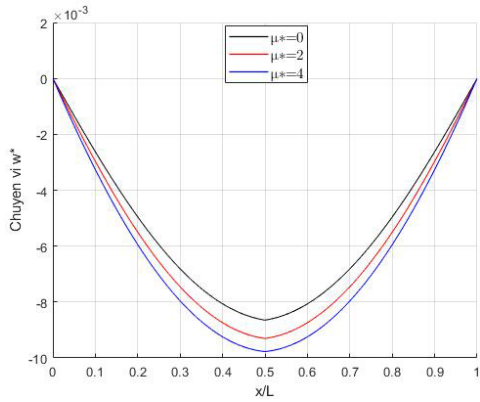
$\mu^*$	$n = 0,1$		$n = 0,5$		$n = 1$		$n = 2$		$n = 5$	
	Bài báo	Tài liệu [50]	Bài báo	Tài liệu [50]	Bài báo	Tài liệu [50]	Bài báo	Tài liệu [50]	Bài báo	Tài liệu [50]
$L/h = 20$										
0	7,4477	7,4477	8,8199	8,8199	9,4292	9,4292	10,0175	10,0175	10,7850	10,7850
1	7,3363	7,3363	8,6877	8,6877	9,2878	9,2878	9,8673	9,8673	10,6233	10,6233
2	7,2295	7,2295	8,5611	8,5611	9,1524	9,1524	9,7234	9,7234	10,4685	10,4685
3	7,1271	7,1271	8,4396	8,4396	9,0225	9,0225	9,5855	9,5855	10,3201	10,3201
4	7,0288	7,0288	8,3231	8,3231	8,8979	8,8979	9,4530	9,4530	10,1776	10,1776
5	6,9344	6,9344	8,2111	8,2111	8,7781	8,7781	9,3258	9,3258	10,0406	10,0406
$L/h = 100$										
0	7,5736	7,5736	8,9527	8,9527	9,5628	9,5628	10,1555	10,1555	10,9378	10,9378
1	7,5689	7,5689	8,9472	8,9472	9,5569	9,5569	10,1493	10,1493	10,9311	10,9311
2	7,5643	7,5643	8,9417	8,9417	9,5511	9,5511	10,1431	10,1431	10,9243	10,9243
3	7,5596	7,5596	8,9363	8,9363	9,5452	9,5452	10,1369	10,1369	10,9176	10,9176
4	7,5550	7,5550	8,9308	8,9308	9,5394	9,5394	10,1307	10,1307	10,9110	10,9110
5	7,5504	7,5504	8,9253	8,9253	9,5335	9,5335	10,1245	10,1245	10,9043	10,9043

Bảng 2. So sánh 3 tần số không thứ nguyên đầu tiên của dầm nano hai đầu khớp có 1 vết nứt tại giữa nhịp

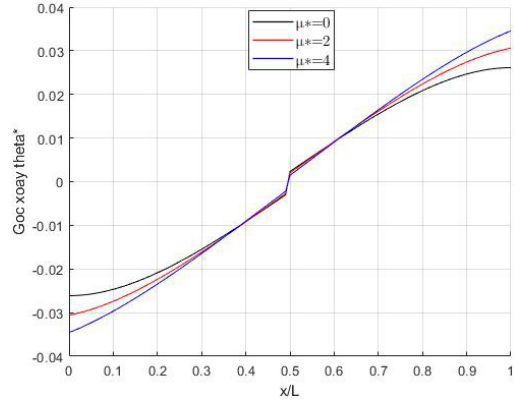
$\mu^*$	$\lambda_i$	Bài báo	Tài liệu [29]	Bài báo	Tài liệu [29]	Bài báo	Tài liệu [29]	Bài báo	Tài liệu [29]
		$K = 0$		$K = 0,065$		$K = 0,35$		$K = 2$	
0,0	1	3,1252	3,1252	2,9379	2,9379	2,3533	2,3533	1,3055	1,3055
	2	6,1583	6,1583	6,1583	6,1583	6,1583	6,1583	6,1583	6,1583
	3	9,0327	9,0328	8,5535	8,5536	7,3534	7,3535	6,3927	6,3928
2,0	1	2,8795	2,8795	2,729	2,729	2,2387	2,2387	1,2842	1,2842
	2	4,9225	4,9225	4,9225	4,9225	4,9225	4,9225	4,9225	4,9225
	3	6,4221	6,4222	6,1819	6,182	5,586	5,5861	5,2077	5,2078
4,0	1	2,4744	2,4744	2,3682	2,3682	2,0091	2,0091	1,2293	1,2293
	2	3,8024	3,8024	3,8024	3,8024	3,8024	3,8024	3,8024	3,8024
	3	4,6086	4,6087	4,4652	4,4653	4,2535	4,2536	3,9264	3,9265
6,0	1	2,1494	2,1494	2,0679	2,0679	1,7907	1,7907	1,1586	1,1586
	2	3,1755	3,1755	3,1755	3,1755	3,1755	3,1755	3,1755	3,1755
	3	3,9211	3,9212	3,8037	3,8038	3,5114	3,5115	3,2633	3,2634

Poisson không đổi  $\nu = 0,3$  các tham số hình học:  $h = 1 \text{ nm}$ ,  $b = h$ ,  $L = 10h$ . Dầm chịu tải trọng phân bố đều với tần số lực kích động là 1000 Hz.

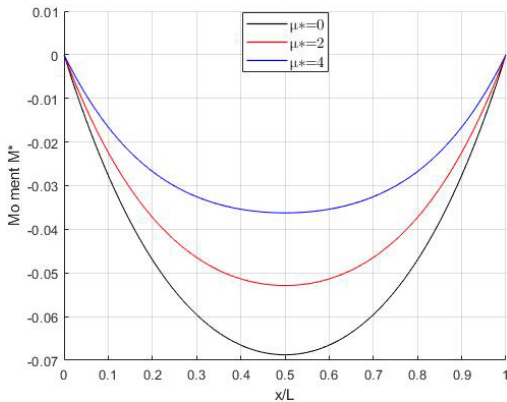
Hình 3 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với  $k_w = 25$  và các hệ số  $\mu^* = 0, 2, 4$ . Dầm có vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Từ các hình vẽ, ta nhận thấy độ võng và góc xoay của dầm tăng lên (khoảng 15% tại giữa nhịp) trong khi mô men và lực cắt giảm khi hệ số không cục bộ tăng. Nếu không có nền đàn hồi thì mô men và lực cắt không thay đổi theo  $\mu^*$ . Hình 4 thể hiện độ võng của dầm nano FGM với các điều kiện biên gối tựa – gối tựa (a), ngàm – ngàm (b), ngàm – tự do (công xôn) (c) và ngàm – gối tựa (d) chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn



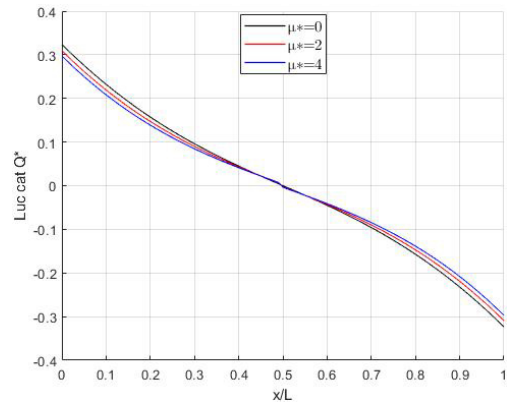
(a) Biểu đồ chuyển vị



(b) Biểu đồ góc xoay



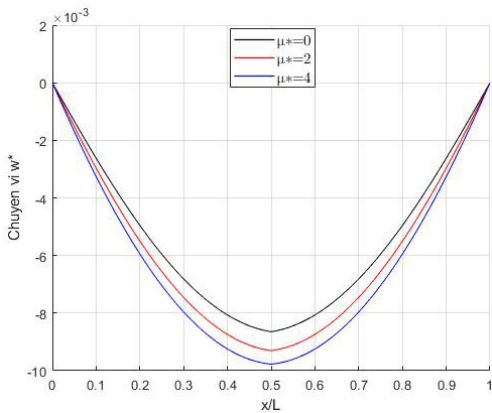
(c) Biểu đồ mô men



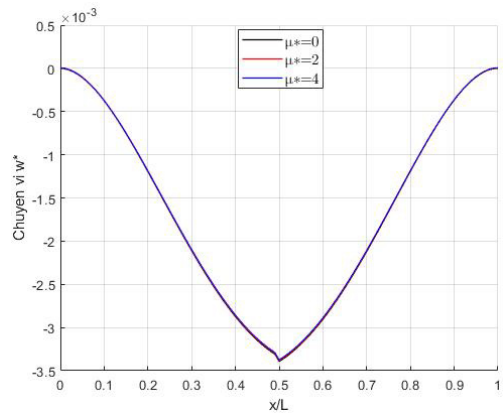
(d) Biểu đồ lực cắt

Hình 3. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với các hệ số không cục bộ khác nhau  $\mu^* = 0, 2, 4$

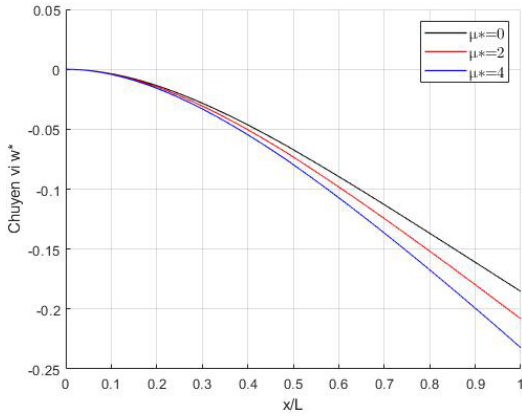
hồi  $k_w = 25$  với các hệ số không cục bộ khác nhau  $\mu^* = 0, 2, 4$ . Dầm có vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Từ các hình vẽ, ta nhận thấy độ võng của dầm tăng lên khi hệ số không cục bộ tăng ngay cả đối với dầm công xôn. Điều đó thể hiện rằng điều kiện biên dạng yếu đề xuất (7) đã khắc phục được nghịch lý không cục bộ. Trong các khảo sát tiếp theo, ta chỉ xét trường hợp điều kiện biên dầm gối tựa hai đầu cho đơn giản.



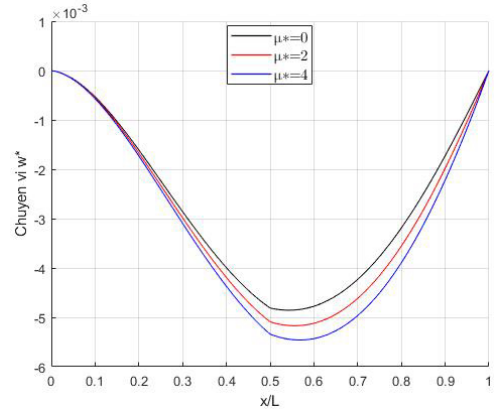
(a) Gối tựa - gối tựa



(b) Ngàm - ngàm

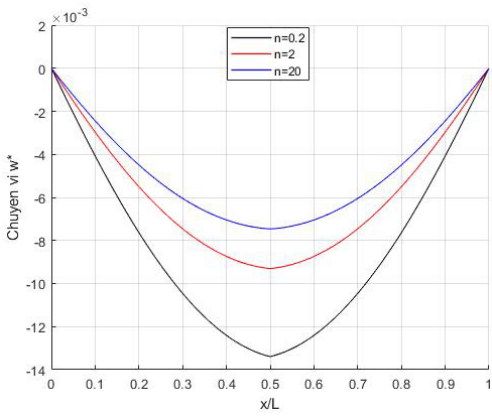


(c) Ngàm - tự do

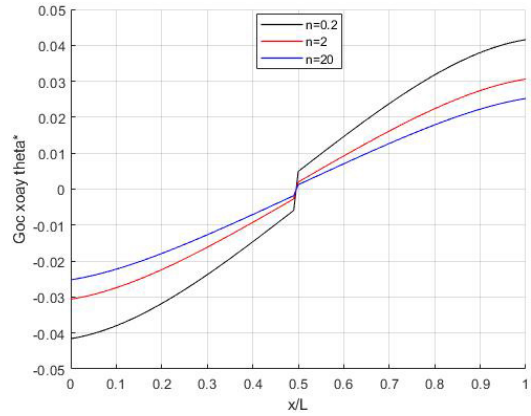


(d) Ngàm - gối tựa

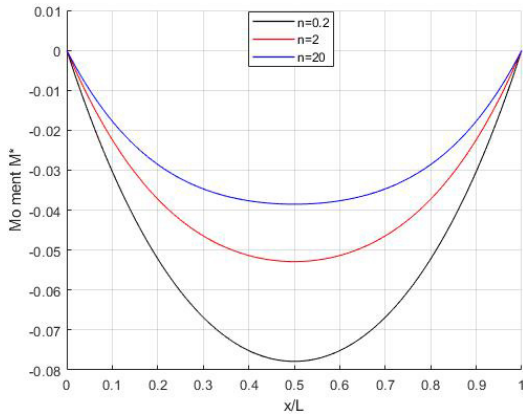
Hình 4. Độ võng của dầm nano FGM với các điều kiện biên khác nhau chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với các hệ số không cục bộ khác nhau  $\mu^* = 0, 2, 4$



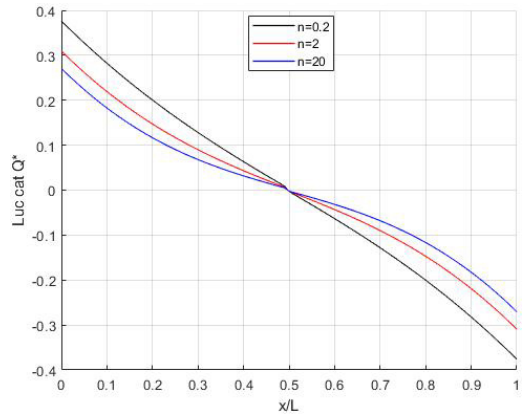
(a) Biểu đồ chuyển vị



(b) Biểu đồ góc xoay



(c) Biểu đồ mô men

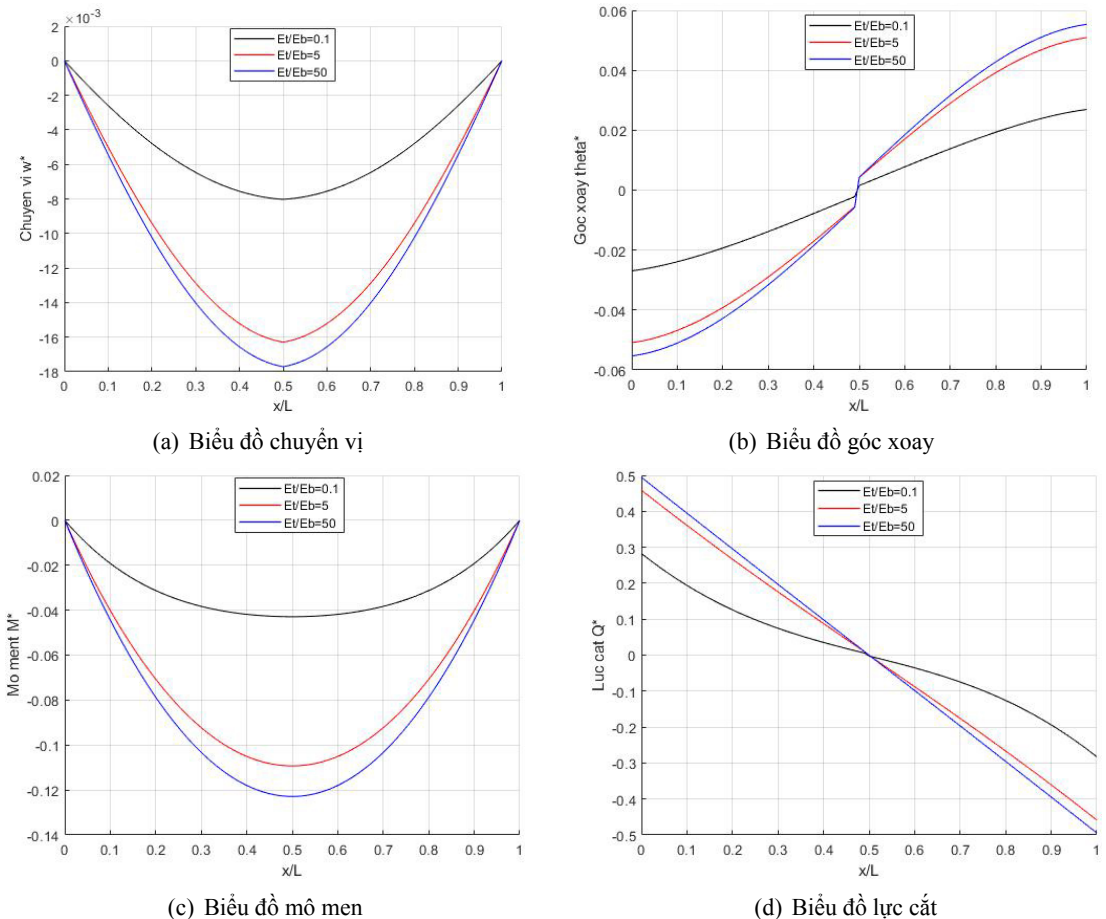


(d) Biểu đồ lực cắt

Hình 5. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa có một vết nứt chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với các hệ số chỉ phần thể tích  $n = 0,2; 2; 20$

Hình 5 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với  $k_w = 25$  và các

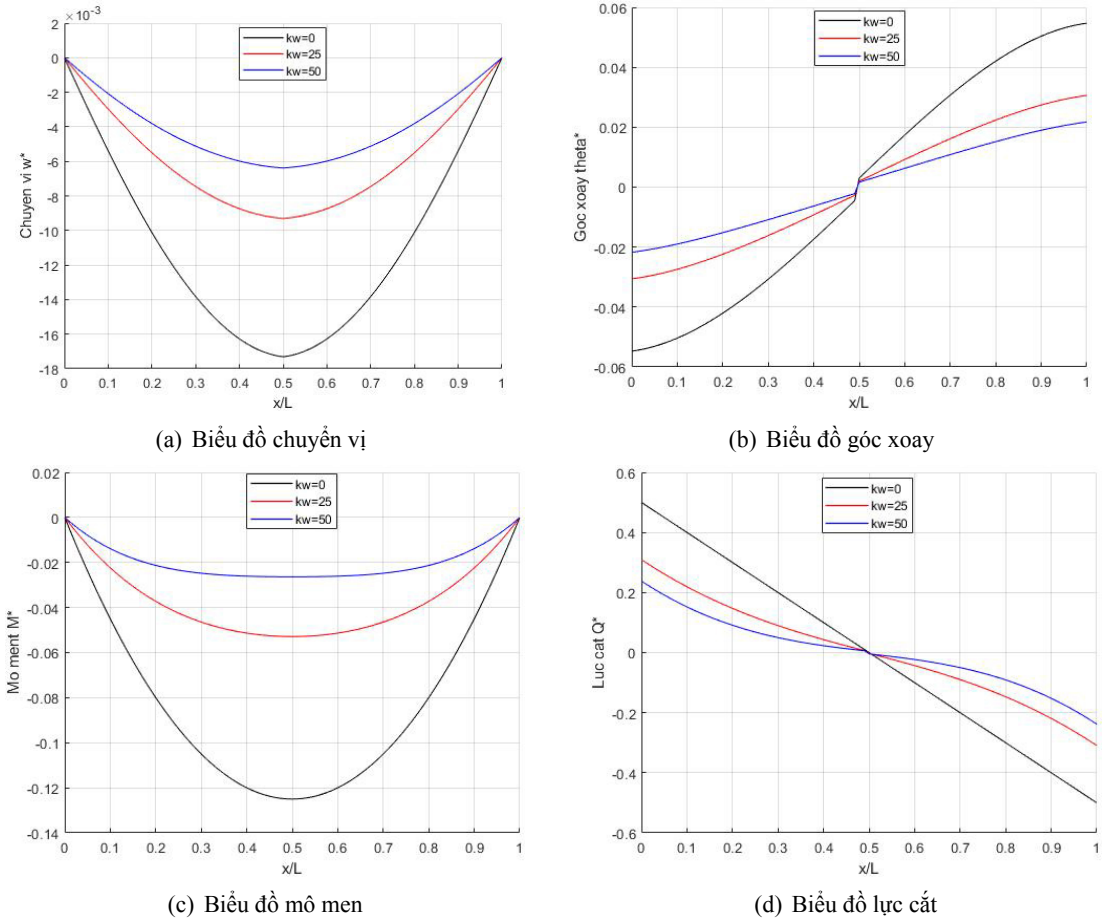
hệ số chỉ phần thể tích  $n = 0,2; 2; 20$ . Dầm có vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Có thể thấy độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt của dầm đều giảm đi rõ rệt (khoảng 70% tại giữa nhịp) khi hệ số chỉ phần thể tích tăng. Nếu không có nền đàn hồi thì mô men và lực cắt không thay đổi theo  $n$ . Hình 6 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hệ số chỉ phần thể tích  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với  $k_w = 25$  và các tỷ số mô đun đàn hồi mặt trên và dưới  $E_t/E_b = 0,1; 5; 50$ . Dầm có vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Ta thấy độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt của dầm đều tăng lên rõ rệt (gấp hai lần tại giữa nhịp) khi tỷ số mô đun đàn hồi trên và mặt dưới tăng. Nếu không có nền đàn hồi thì mô men và lực cắt không thay đổi theo tỷ số  $E_t/E_b$ .



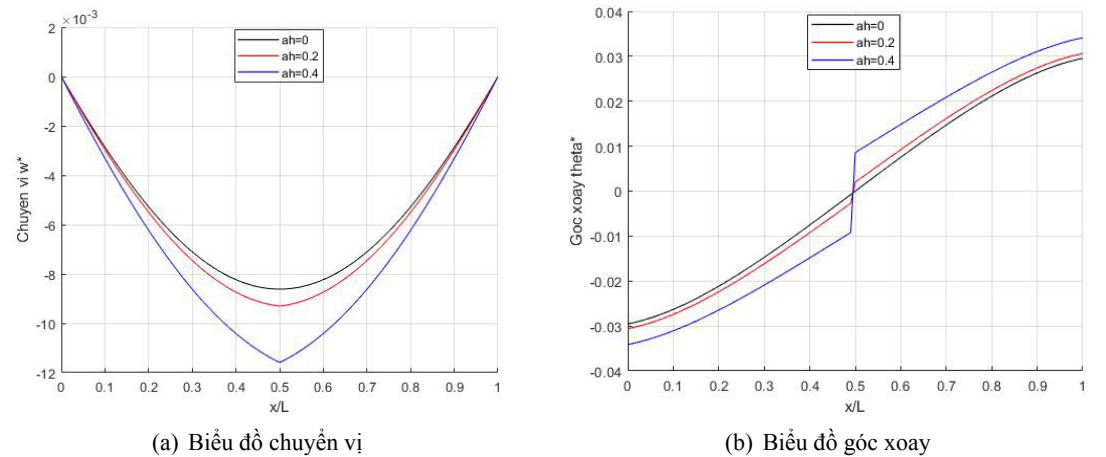
Hình 6. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa có 1 vết nứt chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với tỷ số mô đun đàn hồi mặt dưới và trên  $E_b/E_t = 0,1; 5; 50$

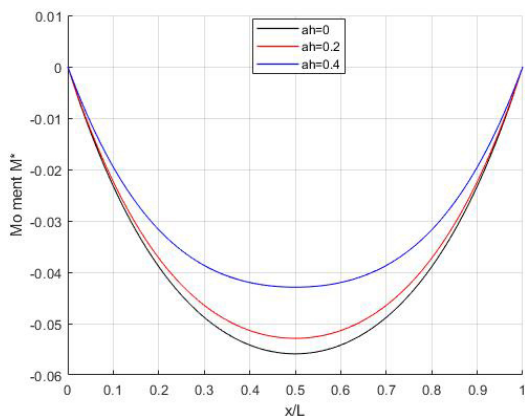
Hình 7 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hệ số chỉ phần thể tích  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với các hệ số nền  $k_w = 0, 25, 50$ . Dầm có vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Ta nhận thấy độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt của dầm đều giảm đi rõ rệt (hơn một nửa tại giữa nhịp) khi hệ số nền đàn hồi tăng lên. Hình 8 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hệ số chỉ phần thể tích  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với 1 vết nứt tại giữa nhịp với

các tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm thay đổi  $a/h = 0, 20\%, 40\%$ . Ta nhận thấy độ võng, góc xoay của dầm tăng lên rõ rệt (khoảng 35% tại giữa nhịp) trong khi mô men uốn và lực cắt giảm khi độ sâu vết nứt tăng lên. Nếu không có nền đàn hồi thì mô men và lực cắt không thay đổi theo độ sâu vết nứt. Hình 9 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hệ số chỉ phần thể tích  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi

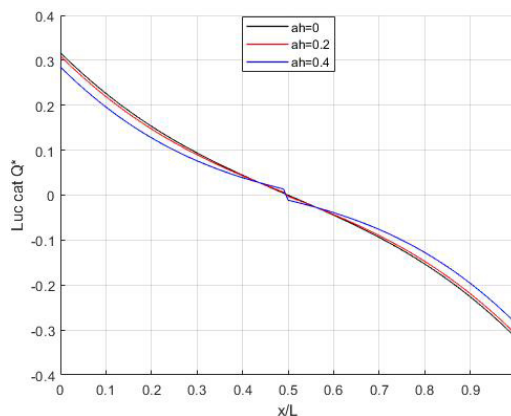


Hình 7. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa có 1 vết nứt chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với hệ số nền đàn hồi không thứ nguyên  $k_w = 0; 25; 50$



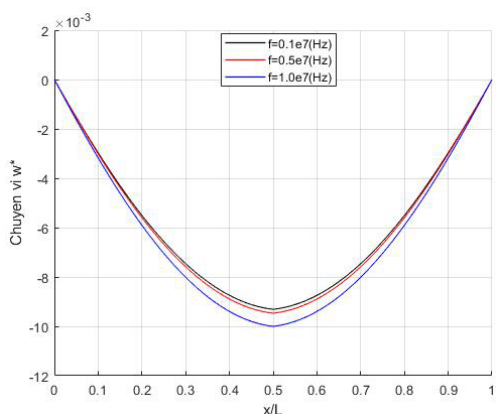


(c) Biểu đồ mô men

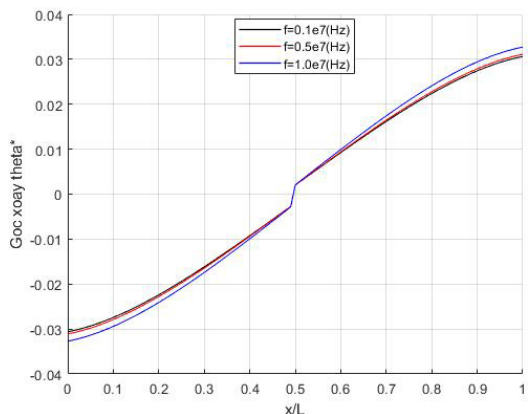


(d) Biểu đồ lực cắt

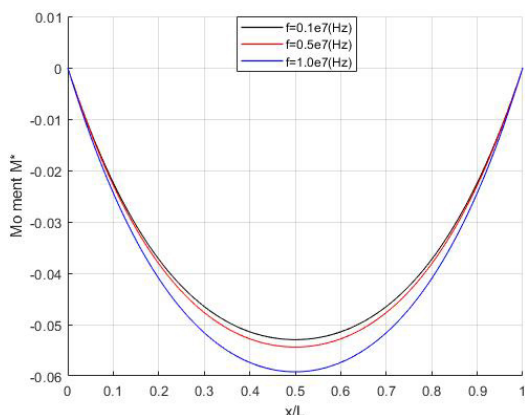
Hình 8. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi có 1 vết nứt tại giữa nhịp, độ sâu vết nứt thay đổi:  $a/h = 0; 20\%; 40\%$



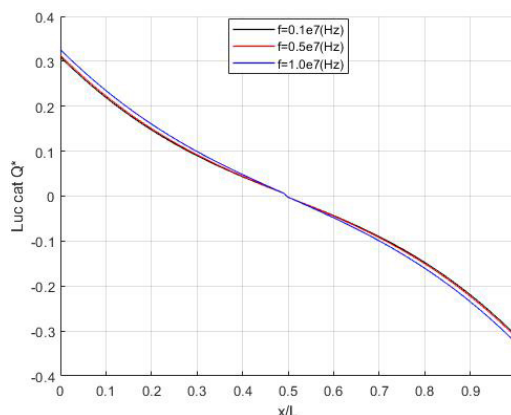
(a) Biểu đồ chuyển vị



(b) Biểu đồ góc xoay



(c) Biểu đồ mô men

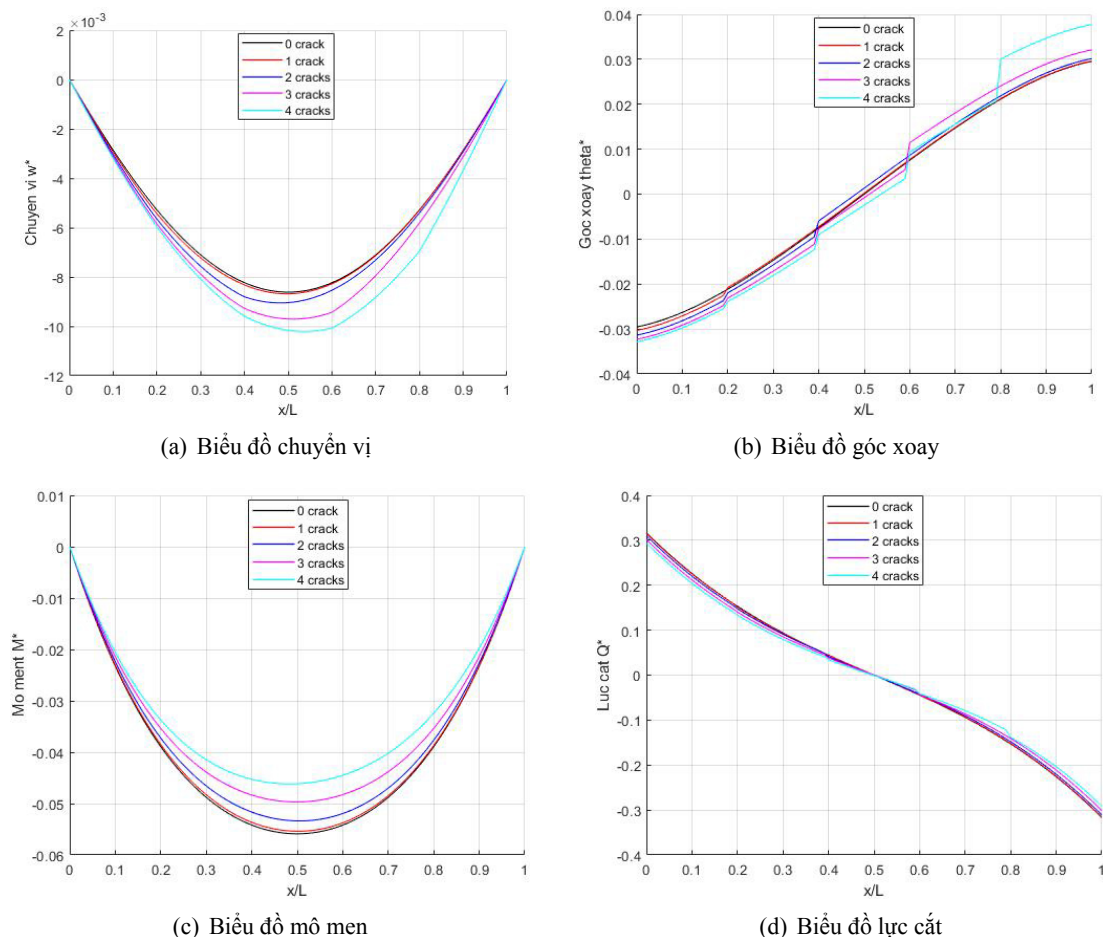


(d) Biểu đồ lực cắt

Hình 9. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa có 1 vết nứt tại giữa nhịp, độ sâu 20% chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với các tần số kích động khác nhau với các tần số thay đổi  $f = (0,1; 0,5; 1) \times 10^7$  Hz, dầm có 1 vết nứt tại vị trí giữa nhịp với tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Ta nhận thấy độ võng và mô men uốn tăng lên (khoảng 10% tại giữa

nhip) trong khi góc xoay và lực cắt của dầm tăng chậm hơn khi tần số lực tác động tăng lên.

Hình 10 thể hiện độ võng (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM có hệ số không cục bộ  $\mu^* = 2$ , hệ số chỉ phần thể tích  $n = 2$ , hai đầu gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với số lượng 4 vết nứt tại các vị trí  $x/L = 0,2; 0,4; 0,5; 0,8$  tỷ lệ độ sâu/chiều cao dầm  $a/h = 20\%$ . Ta nhận thấy độ võng, góc xoay tăng lên (khoảng 17% tại giữa nhịp) trong khi mô men uốn và lực cắt của dầm giảm đi hơn khi số lượng vết nứt tăng lên.



Hình 10. Chuyển vị (a), góc xoay (b), mô men (c) và lực cắt (d) của dầm nano FGM hai đầu gối tựa chịu tải trọng phân bố đều trên nền đàn hồi với số lượng vết nứt từ 0 đến 4, độ sâu các vết nứt đều là 0,2

## 5. Kết luận

Bài báo đã trình bày lời giải nghiệm chính xác cho bài toán dao động cưỡng bức của dầm nano FGM có nhiều vết nứt với các điều kiện biên bất kỳ. Mô hình vết nứt gồm hai lò xo đàn hồi có độ cứng phụ thuộc độ sâu vết nứt. Phương trình dao động được thiết lập dựa trên nguyên lý Hamilton, NET và lý thuyết dầm Timoshenko với các điều kiện biên khác nhau được thiết lập từ dạng yếu của phương trình vi phân dao động đã khắc phục được nghịch lý không cục bộ. So sánh kết quả số với các kết quả đã công bố của các tác giả khác đã khẳng định độ tin cậy của nghiệm đề xuất. Từ đó, các tác giả đã nghiên cứu chi tiết dao động cưỡng bức của dầm nano FGM có nhiều vết nứt theo các tham số hình học, vật liệu, vết nứt khác nhau và rút ra các kết luận:

Độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt của dầm nano FGM tăng lên khi tham số chỉ số phần thể tích  $n$ , tỷ số mô đun đàn hồi mặt trên và mặt dưới  $E_t/E_b$ , tần số kích động tăng lên. Ngược lại độ võng và góc xoay tăng lên trong khi mô men uốn và lực cắt giảm đi khi tham số không cục bộ, độ sâu vết nứt, tần số tải trọng ngoài tăng lên. Đồng thời nền đàn hồi làm giảm độ võng, góc xoay, mô men uốn và lực cắt trong dầm.

Nếu không có nền đàn hồi thì mô men và lực cắt không thay đổi theo các tham số không cục bộ  $\mu^*$ , chỉ phần thể tích  $n$ , tỷ số  $E_t/E_b$  và độ sâu vết nứt. Đối với các điều kiện biên ngàm 2 đầu hoặc công xôn ta cũng nhận được kết luận tương tự.

Các nhận xét trên đây rất hữu ích cho bài toán nhận dạng vết nứt trong các kết cấu nano FGM thông qua đo đặc các phản ứng động của kết cấu chịu tải trọng cưỡng bức. Nghiên cứu này là bước đầu cho các nghiên cứu tiếp theo về các kết cấu nano FGM khác như dầm liên tục, khung nano phức tạp hơn.

### Tài liệu tham khảo

- [1] Shen, H.-S. (2016). *Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press.
- [2] Mahamood, R. M., Akinlabi, E. T. (2017). *Functionally Graded Materials*. Springer International Publishing.
- [3] Shaat, M., Abdelkefi, A. (2016). [On a second-order rotation gradient theory for linear elastic continua](#). *International Journal of Engineering Science*, 100:74–98.
- [4] Ceballes, S., Larkin, K., Rojas, E., Ghaffari, S. S., Abdelkefi, A. (2021). [Nonlocal elasticity and boundary condition paradoxes: a review](#). *Journal of Nanoparticle Research*, 23(3).
- [5] Eringen, A. C. *Nonlocal Continuum Field Theories*. Springer Science & Business Media, New York, US.
- [6] Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., Tong, P. (2002). [Couple stress based strain gradient theory for elasticity](#). *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2731–2743.
- [7] Hadjesfandiari, A. R., Dargush, G. F. (2011). [Couple stress theory for solids](#). *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2496–2510.
- [8] Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S., McCarthy, M. (2015). *Non-local structural mechanics*. John Wiley & Sons.
- [9] Polizzotto, C. (2001). [Nonlocal elasticity and related variational principles](#). *International Journal of Solids and Structures*, 38(42–43):7359–7380.
- [10] Eltaher, M. A., Khater, M. E., Emam, S. A. (2016). [A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations, and wave propagation of nanoscale beams](#). *Applied Mathematical Modelling*, 40(5–6):4109–4128.
- [11] Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S. A., de Sciarra, F. M. (2021). *Size-Dependent Continuum Mechanics Approaches: Theory and Applications*. Springer International Publishing.
- [12] Salehipour, H., Shahidi, A. R., Nahvi, H. (2015). [Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials](#). *International Journal of Engineering Science*, 90:44–57.
- [13] Ghadiri, M., Soltanpour, M., Yazdi, A., Safi, M. (2016). [Studying the influence of surface effects on vibration behavior of size-dependent cracked FG Timoshenko nanobeam considering nonlocal elasticity and elastic foundation](#). *Applied Physics A*, 122(5).
- [14] Jin, Z., Batra, R. (1996). [Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials](#). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(8):1221–1235.
- [15] Erdogan, F., Wu, B. H. (1997). [The Surface Crack Problem for a Plate With Functionally Graded Properties](#). *Journal of Applied Mechanics*, 64(3):449–456.
- [16] Gu, P., Asaro, R. J. (1997). [Cracks in functionally graded materials](#). *International Journal of Solids and Structures*, 34(1):1–17.
- [17] Pan, F., Li, W., Wang, B., Zhang, X. (2009). [Viscoelastic fracture of multiple cracks in functionally graded materials](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33–36):2643–2649.
- [18] Hsu, J.-C., Lee, H.-L., Chang, W.-J. (2011). [Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory](#). *Current Applied Physics*, 11(6):1384–1388.



- [19] Özgür Yaylı, M., Erdem Çerçevik, A. (2015). Axial vibration analysis of cracked nanorods with arbitrary boundary conditions. *Journal of Vibroengineering*, 17(6):2907–2921.
- [20] Hosseini, A. H., Rahmani, O., Nikmehr, M., Golpayegani, I. F. (2016). [Axial Vibration of Cracked Nanorods Embedded in Elastic Foundation Based on a Nonlocal Elasticity Model](#). *Sensor Letters*, 14 (10):1019–1025.
- [21] Loghmani, M., Hairi Yazdi, M. R., Nikkhab Bahrami, M. (2017). [Longitudinal vibration analysis of nanorods with multiple discontinuities based on nonlocal elasticity theory using wave approach](#). *Microssystem Technologies*, 24(5):2445–2461.
- [22] Numanoğlu, H. M., Cıvlek, Ö. (2022). [Novel size-dependent finite element formulation for modal analysis of cracked nanorods](#). *Materials Today Communications*, 31:103545.
- [23] Kiani, K., Žur, K. K. (2021). [Vibrations of double-nanorod-systems with defects using nonlocal-integral-surface energy-based formulations](#). *Composite Structures*, 256:113028.
- [24] Akbaş, Ş. D. (2019). Axially forced vibration analysis of cracked a nanorod. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 50(1):63–68.
- [25] Loya, J. A., Aranda-Ruiz, J., Fernández-Sáez, J. (2014). [Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model](#). *Journal of Physics D: Applied Physics*, 47(11):115304.
- [26] Rahmani, O., Hosseini, S. A. H., Noroozi Moghaddam, M. H., Fakhari Golpayegani, I. (2015). [Torsional Vibration of Cracked Nanobeam Based on Nonlocal Stress Theory with Various Boundary Conditions: An Analytical Study](#). *International Journal of Applied Mechanics*, 07(03):1550036.
- [27] Yaylı, M. Ö., Kandemir, S. Y., Çerçevik, A. E. (2018). [Torsional vibration of cracked carbon nanotubes with torsional restraints using Eringen’s nonlocal differential model](#). *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 38(1):70–87.
- [28] Loya, J., López-Puente, J., Zaera, R., Fernández-Sáez, J. (2009). [Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model](#). *Journal of Applied Physics*, 105(4).
- [29] Torabi, K., Nafar Dastgerdi, J. (2012). [An analytical method for free vibration analysis of Timoshenko beam theory applied to cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model](#). *Thin Solid Films*, 520(21): 6595–6602.
- [30] Roostai, H., Haghpanahi, M. (2014). [Vibration of nanobeams of different boundary conditions with multiple cracks based on nonlocal elasticity theory](#). *Applied Mathematical Modelling*, 38(3):1159–1169.
- [31] Loghmani, M., Hairi Yazdi, M. R. (2018). [An analytical method for free vibration of multi cracked and stepped nonlocal nanobeams based on wave approach](#). *Results in Physics*, 11:166–181.
- [32] Hossain, M., Lellep, J. (2020). [The effect of rotatory inertia on natural frequency of cracked and stepped nanobeam](#). *Engineering Research Express*, 2(3):035009.
- [33] Lellep, J., Lenbaum, A. (2018). Free vibrations of stepped nano-beams. *Computational and Experimental Studies*, page 95.
- [34] Lellep, J., Lenbaum, A. (2016). Natural vibrations of a nano-beam with cracks. *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1(1):247–252.
- [35] Lellep, J., Lenbaum, A. (2019). [Natural vibrations of stepped nanobeams with defects](#). *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 23(1):143–158.
- [36] Hossain, M. M., Lellep, J. (2021). [Mode shape analysis of dynamic behaviour of cracked nanobeam on elastic foundation](#). *Engineering Research Express*, 3(4):045003.
- [37] Ebrahimi, F., Mahmoodi, F. (2018). Vibration analysis of carbon nanotubes with multiple cracks in thermal environment. *Advances in nano research*, 6(1):57.
- [38] Aria, A. I., Friswell, M. I., Rabczuk, T. (2019). [Thermal vibration analysis of cracked nanobeams embedded in an elastic matrix using finite element analysis](#). *Composite Structures*, 212:118–128.
- [39] Abdullah, S. S., H. Hashemi, S., A. Hussein, N., Nazemnezhad, R. (2021). [Effect of thermal axial load on vibration of cracked single-walled carbon nanotubes modelled as Timoshenko nanobeams using nonlocal theory](#). *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 21(3):860–871.
- [40] Karličić, D., Jovanović, D., Kozić, P., Cajić, M. (2015). [Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium](#). *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(1):43–62.

- [41] Pouretmad, A., Torabi, K., Afshari, H. (2019). [DQEM analysis of free transverse vibration of rotating non-uniform nanobeams in the presence of cracks based on the nonlocal Timoshenko beam theory](#). *SN Applied Sciences*, 1(9).
- [42] Soltanpour, M., Ghadiri, M., Yazdi, A., Safi, M. (2016). [Free transverse vibration analysis of size dependent Timoshenko FG cracked nanobeams resting on elastic medium](#). *Microsystem Technologies*, 23(6): 1813–1830.
- [43] Esen, I., Özarpa, C., Eltaher, M. A. (2021). [Free vibration of a cracked FG microbeam embedded in an elastic matrix and exposed to magnetic field in a thermal environment](#). *Composite Structures*, 261:113552.
- [44] Attia, M. A., Shanab, R. A. (2023). [Dynamic analysis of 2DFGM porous nanobeams under moving load with surface stress and microstructure effects using Ritz method](#). *Acta Mechanica*, 235(1):1–27.
- [45] Li, X.-F., Wang, B.-L. (2009). [Vibrational modes of Timoshenko beams at small scales](#). *Applied Physics Letters*, 94(10).
- [46] Ghavanloo, E., Rafii-Tabar, H., Fazelzadeh, S. A. (2019). *Computational Continuum Mechanics of Nanoscopic Structures: Nonlocal Elasticity Approaches*. Springer International Publishing.
- [47] Challamel, N., Zhang, Z., Wang, C. M., Reddy, J. N., Wang, Q., Michelitsch, T., Collet, B. (2014). [On nonconservativeness of Eringen's nonlocal elasticity in beam mechanics: correction from a discrete-based approach](#). *Archive of Applied Mechanics*, 84(9–11):1275–1292.
- [48] Khodabakhshi, P., Reddy, J. N. (2015). [A unified integro-differential nonlocal model](#). *International Journal of Engineering Science*, 95:60–75.
- [49] Xu, X.-J., Deng, Z.-C., Zhang, K., Xu, W. (2016). [Observations of the softening phenomena in the nonlocal cantilever beams](#). *Composite Structures*, 145:43–57.
- [50] Aria, A. I., Friswell, M. I. (2019). [A nonlocal finite element model for buckling and vibration of functionally graded nanobeams](#). *Composites Part B: Engineering*, 166:233–246.
- [51] Tran, L. V., Tran, D. B., Phan, P. T. T. (2023). [Free vibration analysis of stepped FGM nanobeams using nonlocal dynamic stiffness model](#). *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 42(3): 997–1017.
- [52] Lien, T. V., Dinh, T. B., Thang, N. T. (2023). [Exact closed-form solutions for the free vibration analysis of multiple cracked FGM nanobeams](#). *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 238(8):3373–3390.
- [53] Eltaher, M. A., Abdelrahman, A. A., Al-Nabawy, A., Khater, M., Mansour, A. (2014). [Vibration of non-linear graduation of nano-Timoshenko beam considering the neutral axis position](#). *Applied Mathematics and Computation*, 235:512–529.
- [54] Liên, T. V., Định, T. B., Thắng, N. T. (2012). [Nghiệm chính xác cho bài toán dao động cưỡng bức của dầm nano FGM với các điều kiện biên khác nhau](#). *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI*, Hà Nội, 1:24–34.
- [55] Khiem, N. T., Huyen, N. N. (2016). [A method for crack identification in functionally graded Timoshenko beam](#). *Nondestructive Testing and Evaluation*, 32(3):319–341.