

PHÂN TÍCH ỨNG XỬ UỐN VÀ ỔN ĐỊNH CỦA TẤM NANO FGM CÓ VI BỌT RỖNG CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG ĐỒNG THỜI CỦA HIỆU ỨNG PHI CỤC BỘ VÀ HIỆU ỨNG BỀ MẶT

Nguyễn Văn Long^{a,*}, Trần Minh Tú^a, Đặng Xuân Hùng^a, Đặng Xuân Trung^b

^aKhoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

^bCục Giám định Nhà nước về chất lượng công trình xây dựng, Bộ Xây dựng, 37 Lê Đại Hành, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 05/3/2024, Sửa xong 10/4/2024, Chấp nhận đăng 03/5/2024

Tóm tắt

Đối với tấm nano, do tỷ số diện tích bề mặt trên thể tích vật thể lớn, ứng suất bề mặt có ảnh hưởng lớn đến ứng xử cơ học của kết cấu. Bài báo xây dựng lời giải giải tích phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM có vi bọt rỗng, sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, trong đó có xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt. Các phương trình cân bằng cho tấm nano trên nền đàn hồi Pasternak, theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy được thiết lập dựa trên nguyên lý thế năng cực tiểu. Tải trọng tới hạn trong phân tích ổn định và độ võng của tấm nano chịu uốn được xác định bằng nghiệm Navier với trường hợp tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến. Ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt, tham số phi cục bộ, các tham số kích thước, vật liệu và nền đàn hồi lên ứng xử uốn và ổn định của tấm FGM nano sẽ được thể hiện qua các ví dụ số.

Từ khóa: tấm nano; lý thuyết đàn hồi phi cục bộ; năng lượng bề mặt; vật liệu FGM có vi bọt rỗng; phân tích tĩnh.

BENDING AND BUCKLING ANALYSIS OF FGM NANOPlates WITH POROSITIES BASED ON NON-LOCAL ELASTICITY INCORPORATING THE SURFACE EFFECTS

Abstract

For nanoplate, due to the large surface area to volume ratio, surface stress has a strong influence on the mechanical behaviour of the structure. This paper presented an analytical solution to analyze the bending and buckling response of FGM nanoplate with porosities, using non-local elasticity theory incorporating the surface effects. The equilibrium equations for nanoplate resting on the Pasternak elastic foundation have been derived based on the principle of minimum potential energy within the framework of Reddy's third-order shear deformation theory. The critical buckling load in the buckling analysis and deflection in the bending analysis of nanoplates are predicted by using the Navier solution for simply supported rectangular nanoplate. The influence of surface effects, non-local, size-dependent parameters, material and elastic foundation on the bending and buckling behaviour of FGM nanoplate with porosities will be demonstrated through numerical examples.

Keywords: nanoplate; non-local elasticity theory; surface energy; FGM with porosities; static analysis.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(2V\)-12](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(2V)-12) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Một trong những lĩnh vực nghiên cứu mới nổi và phát triển nhanh, có ảnh hưởng sâu rộng đến các ngành công nghiệp, các hoạt động kinh tế và đời sống xã hội hiện nay có thể nói đó là công nghệ nano. Công nghệ này đã từng bước mở đường cho việc tạo ra một thế hệ vật liệu mới với các đặc tính vượt trội và tiềm năng ứng dụng cao. Một trong các ứng dụng đó có thể kể ra là các hệ thống vi cơ điện, vi cơ điện tử (NEMS), các cảm biến điện dung, công tắc điện tử, và các hệ thống truyền động

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: longnv@huce.edu.vn (Long, N. V.)

vi cơ, v.v., tất cả chúng đều hoạt động ở kích thước nano. Tuy nhiên, kích thước nhỏ của các kết cấu nano đã đặt ra thách thức không hề nhỏ cho các nhà khoa học trong lĩnh vực cơ học nano và công nghệ nano này. Lý thuyết đàn hồi cổ điển đã bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, dẫn đến sự thiếu chính xác trong tính toán cho kết cấu ở kích thước nano. Do đó, các lý thuyết đàn hồi cải tiến cho các kết cấu ở kích cỡ nano đã được đề xuất, chẳng hạn: lý thuyết đàn hồi phi cục bộ (nonlocal elasticity theory) [1, 2], lý thuyết cặp ứng suất (couple stress theory) [3], lý thuyết cặp ứng suất cải tiến (modified couple stress theory) [4, 5], lý thuyết gradien biến dạng (strain gradient theory) [6]; lý thuyết gradien biến dạng phi cục bộ (nonlocal strain gradient theory), lý thuyết năng lượng bề mặt (surface energies theory) [7], ... Trong các nghiên cứu về kết cấu có kích thước nano, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ của Eringen là một trong những lý thuyết được áp dụng rộng rãi nhất. Theo Eringen, ứng suất tại một điểm không chỉ phụ thuộc vào biến dạng tại điểm đang xem xét mà còn phụ thuộc vào biến dạng tại các điểm lân cận xung quanh.

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) là một loại vật liệu composite thể hệ mới, có tính chất vật liệu thay đổi trơn và liên tục từ bề mặt này sang bề mặt khác của kết cấu, do đó khắc phục được sự tập trung ứng suất, sự bong tách các pha vật liệu thành phần như thường xảy ra với vật liệu composite thông thường. Vật liệu FGM điển hình thường được tạo thành từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại, đây là loại vật liệu không đồng nhất, đẳng hướng. Do kết hợp được khả năng chịu nhiệt cao của gốm, độ bền dẻo của kim loại nên vật liệu FGM thường được sử dụng để chế tạo những bộ phận cơ khí, cấu kiện công trình làm việc trong môi trường nhiệt độ cao. Trong quá trình sản xuất, các vi bọt rỗng có thể xuất hiện bên trong vật liệu FGM. Hiện tượng này chủ yếu phát sinh từ quá trình nhiệt hóa rắn khác nhau của các vật liệu cấu thành.

Trong chế tạo bộ phận của các thiết bị vi cơ, vật liệu tiên tiến nói chung và vật liệu FGM, FGM có vi bọt rỗng nói riêng được sử dụng khá phổ biến. Các nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của các kết cấu dầm, tấm, vỏ FGM nano vì thế được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm. Sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ, nhiều nghiên cứu về uốn, dao động và ổn định của tấm FGM đã được thực hiện [8–11]. Với dầm, tấm, vỏ nano FGM có vi bọt rỗng, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ cũng được sử dụng trong nhiều khảo sát. Kê và Hồng [12] phân tích dao động tự do của dầm cong, cơ tính biến thiên, có lỗ rỗng, kích thước nano, đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Mechab và cs. [13] đã nghiên cứu ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến dao động tự do của tấm nano FGM đặt trên nền đàn hồi Pasternak dựa trên lý thuyết tấm cải tiến hai ẩn số chuyển vị. Daikh và cs. [14] sử dụng lời giải Navier và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để phân tích dao động tự do của tấm nano sandwich FGM. Hadji và cs. [15] đã thiết lập lời giải giải tích để phân tích dao động tự do của tấm nano FGM với các điều kiện biên khác nhau bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết đàn hồi phi cục bộ được cải tiến, Vinh và cs. [16] đã khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến tần số dao động riêng của vỏ mỏng hai độ cong FGM có vi bọt rỗng. Slimane và cs. [17] khảo sát động tự do của tấm nano FGM có vi bọt rỗng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn số chuyển vị bằng phương pháp giải tích. Phung-Van và cs. [18] theo tiếp cận đẳng hình học, phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm nano FGM có vi bọt rỗng với 2 dạng phân bố: đều và không đều - đối xứng.

Khi kết cấu giảm kích thước, tỷ lệ diện tích bề mặt so với tổng thể tích kết cấu trở nên đáng kể. Do đó, đặc tính vật liệu của các lớp bề mặt bao quanh môi trường đàn hồi khác với đặc tính của vật liệu phần thân. Tỷ lệ diện tích bề mặt trên thể tích của các kết cấu nano lớn dẫn đến ảnh hưởng không thể bỏ qua của ứng suất bề mặt so với các kết cấu ở kích thước thông thường. Trong lý thuyết hiệu ứng bề mặt do Gurtin và Murdoch [19, 20] đề xuất, lớp bề mặt kết cấu được coi như một lớp mỏng với các đặc tính vật liệu riêng biệt so với vật liệu lớp bên trong kết cấu. Sử dụng lý thuyết này, nhiều

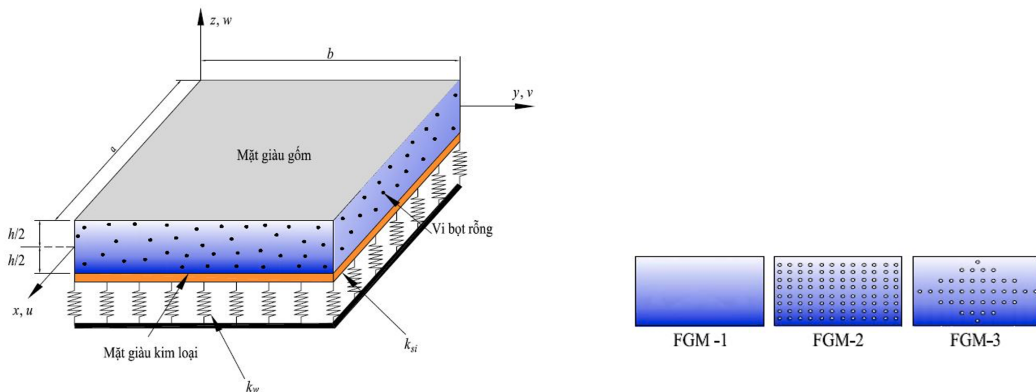
nghiên cứu đã được tiến hành để nghiên cứu ứng xử cơ học của kết cấu nano. Sử dụng lý thuyết tấm Mindlin và phương pháp vi phân cầu phương, Ansari và cs. [21] đã xác định tải trọng tới hạn của tấm nano đẳng hướng, độ võng lớn nhất của tấm nano chịu tải trọng ngang phân bố đều khi có kể và không kể đến hiệu ứng bề mặt. Dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp với lý thuyết tấm cổ điển, Ansari và Sahmani [22] đã phát triển lời giải giải tích để phân tích dao động tự do của tấm nano đẳng hướng có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt. Karimi và cs. [23] đã sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước đến các đặc trưng dao động tự do của tấm nano chữ nhật đẳng hướng có xét đến hiệu ứng ứng suất bề mặt. Yang và cs. [24] đã cho thấy ảnh hưởng lớn của hiệu ứng bề mặt đối với kết cấu nano thông qua khảo sát ứng xử dao động riêng và uốn đối xứng tâm của tấm nano tròn với các điều kiện biên khác nhau theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Norouzzadeh và Ansari [25] nghiên cứu về dao động tự do của tấm nano FGM sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp đẳng hình học. Trong nghiên cứu này của họ, cả hiệu ứng phi cục bộ và hiệu ứng bề mặt đã cùng được xét đến.

Từ nghiên cứu tổng quan ở trên, có thể thấy rằng, để khảo sát hiệu ứng kích thước của kết cấu nano, lý thuyết đàn hồi phi cục bộ là một trong những lý thuyết được sử dụng rộng rãi, tuy nhiên lý thuyết này lại chưa kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng của ứng suất bề mặt điều không thể bỏ qua đối với các kết cấu ở kích cỡ nano. Do vậy, trong bài báo này, lần đầu tiên, ứng xử tĩnh và ổn định của tấm nano FGM có vi bọt rỗng sẽ được khảo sát khi xét đến ảnh hưởng đồng thời của hiệu ứng phi cục bộ và hiệu ứng ứng suất bề mặt. Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy được sử dụng để thiết lập lời giải giải tích của độ võng và lực mất ổn định, từ đó tiến hành khảo sát ảnh hưởng đồng thời của hai hiệu ứng này, cũng như ảnh hưởng của kích thước tấm, các tham số vật liệu và nền đàn hồi đến độ võng và tải trọng tới hạn của tấm nano FGM có vi bọt rỗng.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Mô hình tấm nano bằng vật liệu FGM có vi bọt rỗng

Xét tấm chữ nhật nano bằng vật liệu P-FGM có vi bọt rỗng chiều dày h , kích thước theo phương các trục x, y là a (chiều dài), b (chiều rộng). Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số nền: k_w - hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness), k_{si} ($i = x, y$) - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Tấm nano FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Pasternak

Các tính chất hiệu dụng (mô đun đàn hồi, hệ số Poisson) của vật liệu FGM thay đổi theo tọa độ chiều dày từ bề mặt dưới (ký hiệu S^- , với $z = -h/2$) giàu kim loại tới bề mặt trên (ký hiệu S^+ , với $z = h/2$) giàu ceramic, bao gồm các trường hợp: FGM hoàn hảo [26] và không hoàn hảo [27, 28] (có vi bọt rỗng phân bố theo các quy luật khác nhau) như sau:

- Vật liệu FGM hoàn hảo (FGM-1):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m \quad (1)$$

- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố đều (FGM-2):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{e}{2} (P_c + P_m) \quad (2)$$

- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố không đều - đối xứng (FGM-3):

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{e}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3)$$

trong đó p là chỉ số tỷ lệ thể tích các vật liệu thành phần cấu thành FGM ($p \geq 0$); e là tỷ lệ thể tích của lỗ rỗng ($0 \leq e \ll 1$).

Hai lớp bề mặt rất mỏng có các tham số đàn hồi, bao gồm [21, 22]: $\lambda^{s\pm}, \mu^{s\pm}$ là các hằng số Lamé bề mặt (surface Lamé constant); $\tau^{s\pm}$ là ứng suất dư bề mặt (denotes the residual surface stress).

2.2. Các hệ thức cơ bản - Hệ phương trình chủ đạo của tấm nano

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, các thành phần chuyển vị (u, v, w) của điểm bất kỳ trong không gian tấm được xác định bởi [29]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) - \kappa z^3 \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) - \kappa z^3 \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó $\kappa = \frac{4}{3h^2}$; u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z ; θ_x, θ_y là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh hai trục y, x .

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = (1 - 3\kappa z^2) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}; & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; & \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; & \kappa_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \kappa_x^* &= -\kappa \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right); & \kappa_y^* &= -\kappa \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right); & \kappa_{xy}^* &= -\kappa \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x; & \gamma_{yz}^0 &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{aligned}$$

Sử dụng lý thuyết đàn hồi phi cục bộ [30, 31] và lý thuyết bề mặt Gurtin–Murdoch [19, 20], các phương trình liên tục cho vật liệu phần thân (bulk material) của tấm nano được viết dưới dạng:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + (\sigma_z^0 + z\sigma_z^*) Q_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} t_{xz} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

trong đó $\mu = e_0 l$ là tham số phi cục bộ (tham số kích thước) phản ánh ảnh hưởng của kích thước nhỏ lên đặc trưng cơ học của vật liệu; e_0 là hằng số phụ thuộc vật liệu, l là đặc trưng nội kích thước (internal characteristic length);

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ là toán tử Laplace}$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}; \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu^2(z)}$$

$$Q_{66} = Q_{55} = Q_{44} = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} = G(z)$$

$$Q_0 = \frac{\nu(z)}{1 - \nu(z)}; \quad \sigma_z^0 = \frac{\tau_b}{2} \nabla^2 w_0; \quad \sigma_z^* = \frac{\tau_t}{h} \nabla^2 w_0$$

Các phương trình liên tục cho hai lớp bề mặt:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2 \nabla^2) t_x^{s\pm} &= \tau^{s\pm} + (\lambda^{s\pm} + 2\mu^{s\pm}) \varepsilon_x^{s\pm} + (\lambda^{s\pm} + \tau^{s\pm}) \varepsilon_y^{s\pm} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) t_y^{s\pm} &= \tau^{s\pm} + (\lambda^{s\pm} + \tau^{s\pm}) \varepsilon_x^{s\pm} + (\lambda^{s\pm} + 2\mu^{s\pm}) \varepsilon_y^{s\pm} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) t_{xy}^{s\pm} &= (\mu^{s\pm} - \tau^{s\pm}) \gamma_{xy}^{s\pm} + \tau^{s\pm} \frac{\partial u^{s\pm}}{\partial y} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) t_{yx}^{s\pm} &= (\mu^{s\pm} - \tau^{s\pm}) \gamma_{xy}^{s\pm} + \tau^{s\pm} \frac{\partial v^{s\pm}}{\partial x} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) t_{xz}^{s\pm} &= \tau^{s\pm} \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad (1 - \mu^2 \nabla^2) t_{yz}^{s\pm} = \tau^{s\pm} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

Nguyên lý thế năng cực tiểu [32] được sử dụng để thiết lập các phương trình cân bằng của tấm nano:

$$0 = \delta U_P + \delta U_F + \delta V \quad (8)$$

Biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của tấm:

$$\delta U_P = \int_V t_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{S^+} t_{ij}^{s+} \delta \varepsilon_{ij} dS + \int_{S^-} t_{ij}^{s-} \delta \varepsilon_{ij} dS \quad (9)$$

Biến phân thế năng của phản lực nền:

$$\delta U_F = \int_A (f_e \delta w|_{z=-h/2}) dA = \int_A \left(k_w w_0 - k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 dA \quad (10)$$

Biến phân thế năng của tải trọng tác dụng:

$$\delta V = - \int_A q \delta w_0 dA + \int_A \left(N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA \quad (11)$$

với q là tải trọng tác dụng vuông góc với bề mặt trên của tấm; (N_x^0, N_{xy}^0, N_y^0) là các thành phần lực dọc màng.

Thay các biểu thức (9), (10) và (11) vào (8), sau đó tích phân từng phần; hệ phương trình cân bằng thu được có dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \kappa \left(\frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_x^s}{\partial x} + \frac{\partial R_y^s}{\partial y} \\ -k_w w_0 + k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0 \quad (12) \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - \kappa \left(\frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - R_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \kappa \left(\frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial M_y^*}{\partial y} \right) - R_y &= 0 \end{aligned}$$

Các thành phần nội lực được định nghĩa:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} dz + \begin{Bmatrix} t_x^{s+} + t_x^{s-} \\ t_y^{s+} + t_y^{s-} \\ t_{xy}^{s+} + t_{yx}^{s+} + t_{xy}^{s-} + t_{yx}^{s-} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z dz + \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} t_x^{s+} - t_x^{s-} \\ t_y^{s+} - t_y^{s-} \\ t_{xy}^{s+} + t_{yx}^{s+} - t_{xy}^{s-} - t_{yx}^{s-} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz + \frac{h^3}{8} \begin{Bmatrix} t_x^{s+} - t_x^{s-} \\ t_y^{s+} - t_y^{s-} \\ t_{xy}^{s+} + t_{yx}^{s+} - t_{xy}^{s-} - t_{yx}^{s-} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_{xz} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} (1 - 3\kappa z^2) dz; & \begin{Bmatrix} R_x^s \\ R_y^s \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} t_{xz}^{s+} + t_{xz}^{s-} \\ t_{yz}^{s+} + t_{yz}^{s-} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Kết hợp các biểu thức (5)–(7) và (13), ta được liên hệ giữa nội lực và biến dạng:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= A \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + B \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + D \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} + \varphi_1(w_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau_t \\ \tau_t \\ 0 \end{Bmatrix} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= B \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + E \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} + \varphi_2(w_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} \tau_b \\ \tau_b \\ 0 \end{Bmatrix} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} &= D \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + E \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + G \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} + \varphi_3(w_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{h^3}{8} \begin{Bmatrix} \tau_b \\ \tau_b \\ 0 \end{Bmatrix} \\ (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= A^s \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}; & (1 - \mu^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} R_x^s \\ R_y^s \end{Bmatrix} &= \tau_t \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \varphi_1(w_0) &= A_0\sigma_z^0 + A_1\sigma_z^*; & \varphi_2(w_0) &= A_1\sigma_z^0 + A_2\sigma_z^*; & \varphi_3(w_0) &= A_3\sigma_z^0 + A_4\sigma_z^* \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^* \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & 0 \\ B_{21}^* & B_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^* \end{bmatrix}; & C &= \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & 0 \\ D_{21}^* & D_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^* \end{bmatrix}; & E &= \begin{bmatrix} E_{11}^* & E_{12}^* & 0 \\ E_{21}^* & E_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & E_{66}^* \end{bmatrix}; & G &= \begin{bmatrix} G_{11}^* & G_{12}^* & 0 \\ G_{21}^* & G_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & G_{66}^* \end{bmatrix}; & A^s &= \begin{bmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Các hệ số A_{ij}^* , B_{ij}^* , C_{ij}^* , D_{ij}^* , E_{ij}^* , G_{ij}^* , A_s và A_i được trình bày trong [Phụ lục A](#).

Áp dụng toán tử $(1 - \mu^2 \nabla^2)$ lên hệ phương trình (12) với chú ý sử dụng các quan hệ (5) và (14), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$\begin{aligned} &A_{11}^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66}^* \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{11}^* \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\ &+ \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{12}^* - 2\kappa D_{66}^* \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{11}^* - \kappa D_{11}^*) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\ &+ (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (B_{12}^* + B_{66}^* - \kappa D_{12}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} = 0 \\ &(A_{21}^* + A_{66}^*) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66}^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22}^* \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ &+ \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{21}^* - 2\kappa D_{66}^* \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{22}^* \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\ &+ (B_{21}^* + B_{66}^* - \kappa D_{21}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{22}^* - \kappa D_{22}^*) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} = 0 \\ &\kappa D_{11}^* \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \kappa (D_{21}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \kappa (D_{12}^* + 2D_{66}^*) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \kappa D_{22}^* \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ &+ \left(\kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} + \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} - \kappa^2 G_{11}^* \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \left(\kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} + \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} - \kappa^2 G_{22}^* \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ &+ \left(2\kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} + 2\kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} - \kappa^2 G_{12}^* - \kappa^2 G_{21}^* - 4\kappa^2 G_{66}^* \right) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+ A^s \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A^s \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \tau_t \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \tau_t \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &+ \kappa (E_{11}^* - \kappa G_{11}^*) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \kappa (E_{21}^* + 2E_{66}^* - \kappa G_{21}^* - 2\kappa G_{66}^*) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + A^s \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ &+ \kappa (E_{12}^* + 2E_{66}^* - \kappa G_{12}^* - 2\kappa G_{66}^*) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \kappa (E_{22}^* - \kappa G_{22}^*) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + A^s \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ &+ (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[\begin{aligned} &q - k_w w_0 + k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &+ N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{aligned} \right] = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 & (B_{11}^* - \kappa D_{11}^*) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + [(B_{12}^* - \kappa D_{12}^*) + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*)] \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
 & + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - (\kappa E_{11}^* - \kappa^2 G_{11}^*) \right] \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - A^s \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 & + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) \right. \\
 & \quad \left. - (\kappa E_{12}^* - \kappa^2 G_{12}^*) - 2(\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*) \right] \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & + [(C_{11}^* - \kappa E_{11}^*) - (\kappa E_{11}^* - \kappa^2 G_{11}^*)] \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\
 & + [(C_{66}^* - \kappa E_{66}^*) - (\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*)] \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A^s \theta_x \\
 & + [(C_{12}^* - \kappa E_{12}^*) - (\kappa E_{12}^* - \kappa^2 G_{12}^*) + (C_{66}^* - \kappa E_{66}^*) - (\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*)] \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} = 0 \\
 & [(B_{21}^* - \kappa D_{21}^*) + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*)] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{22}^* - \kappa D_{22}^*) \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - (\kappa E_{21}^* - \kappa^2 G_{21}^*) - 2(\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*) \right] \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - (\kappa E_{22}^* - \kappa^2 G_{22}^*) \right] \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - A^s \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 & + [(C_{21}^* - \kappa E_{21}^*) - (\kappa E_{21}^* - \kappa^2 G_{21}^*) + (C_{66}^* - \kappa E_{66}^*) - (\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*)] \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \\
 & + [(C_{66}^* - \kappa E_{66}^*) - (\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*)] \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \\
 & + [(C_{22}^* - \kappa E_{22}^*) - (\kappa E_{22}^* - \kappa^2 G_{22}^*)] \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - A^s \theta_y = 0
 \end{aligned}$$

2.3. Lời giải Navier

Giả thiết tấm nano chịu tác dụng của tải trọng ngang q và tải trọng nén theo hai phương: $N_x^0 = -\gamma_1 N_0$, $N_y^0 = -\gamma_2 N_0$, $N_{xy}^0 = 0$.

Điều kiện biên khớp trên các cạnh của tấm chữ nhật có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
 \text{Tại } x = 0 \text{ và } x = a: \quad v_0 = w_0 = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x^* = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, M_x = 0 \\
 \text{Tại } y = 0 \text{ và } y = b: \quad u_0 = w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y^* = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, M_y = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Chọn dạng nghiệm Navier để thỏa mãn các điều kiện biên trên (16):

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y); \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\
 w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\
 \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y); \quad \theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)
 \end{aligned} \tag{17}$$

trong đó $\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}; m, n = 1, 2, 3, \dots; u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}$ là các hệ số cần xác định.

Tải trọng phân bố q cũng được khai triển dưới dạng chuỗi lượng giác kép tương tự:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (18)$$

trong đó

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (19)$$

Thay (17) và (18) vào hệ phương trình (15), nhóm các hệ số để được hệ phương trình đại số tuyến tính dưới dạng ma trận, $\forall(m, n)$:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{pmatrix} - N_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Hay dưới dạng ma trận thu gọn:

$$([K] - N_0 [K_g]) \{Q\} = \{F\} \quad (21)$$

trong đó $k_{33} = \xi(\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2)$; $\xi = 1 + \mu^2(\alpha^2 + \beta^2)$. Các hệ số s_{ij} của ma trận độ cứng kết cấu $[K]$ được trình bày trong Phụ lục B.

Trong bài toán phân tích ổn định, đặt q bằng không, tải trọng mất ổn định được xác định từ phương trình trị riêng:

$$([K] - N_0 [K_g]) \{Q\} = \{0\} \quad (22)$$

Nghiệm của phương trình này là N_{0mn} : tải trọng mất ổn định ứng với dạng mất ổn định (m, n) ; tải trọng tới hạn là giá trị nhỏ nhất trong các tải trọng mất ổn định:

$$N_{th} = \min \{N_{0mn}\} \quad (23)$$

Trong bài toán phân tích uốn, cho $N_0 = 0$, véc tơ chuyển vị $\{Q\}$ được xác định từ phương trình:

$$[K] \{Q\} = \{F\} \quad (24)$$

Từ đó các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực của tấm cũng được xác định.

3. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Các ví dụ kiểm chứng độ tin cậy của lời giải được thực hiện cho một số trường hợp riêng bao gồm: (1) ổn định của tấm nano FGM có xét ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ; (2) độ võng của tấm nano đẳng hướng có xét ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt. Tiếp đến là các khảo sát số cho tấm chữ nhật kích thước nano $a \times b \times h$, liên kết khớp 4 cạnh đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các hệ số nền k_w, k_{sx}, k_{sy} . Vật liệu FGM chứa vi bọt rỗng, hai vật liệu thành phần là Si và Al có các đặc trưng cơ học và tham số bề mặt [33, 34]:

Si: $E = 107 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$, $\mu^s = -2,7779 \text{ N/m}$, $\lambda^s = -4,4939 \text{ N/m}$, $\tau^s = 0,6056 \text{ N/m}$;
 Al: $E = 90 \text{ GPa}$, $\nu = 0,23$, $\mu^s = -0,54251 \text{ N/m}$, $\lambda^s = 3,4939 \text{ N/m}$, $\tau^s = 0,5689 \text{ N/m}$.
 Để thuận tiện các công thức không thứ nguyên được sử dụng [35–37]:

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \quad \bar{N} = N_{th} \frac{a^2}{E_m h^3}; \quad (25)$$

$$K_0 = \frac{k_w a^4}{E_0 h^3}; \quad J_0 = \frac{k_{sx} a^2}{\nu_m E_0 h^3} = \frac{k_{sy} b^2}{\nu_m E_0 h^3}; \quad E_0 = 1,0 \text{ GPa}$$

trong đó q_0 là cường độ của tải trọng phân bố đều, có phương vuông góc với bề mặt tấm. Để đảm bảo tính hội tụ của nghiệm Navier cho bài toán uốn, sau khi kiểm tra, số số hạng được lấy là $m_{\max} = n_{\max} = 20$ khi tính toán.

Lưu ý rằng: N_{SN}, W_{SN} tương ứng là tải trọng tới hạn và độ võng tại tâm tấm nano khi xét ảnh hưởng đồng thời của hiệu ứng bề mặt và hiệu ứng kích thước. Khi cho tham số kích thước $\mu = 0$, ta có mô hình đàn hồi bề mặt với các giá trị tương ứng là N_S, W_S . Nếu chỉ bỏ qua hiệu ứng bề mặt ($\mu^s = \lambda^s = \tau^s = 0$) ta có mô hình đàn hồi phi cục bộ với các giá trị tương ứng là N_N, W_N . Khi bỏ qua cả hiệu ứng bề mặt ($\mu^s = \lambda^s = \tau^s = 0$) và hiệu ứng kích thước ($\mu = 0$) ta có mô hình đàn hồi truyền thống với các giá trị tương ứng là N_L, W_L .

3.1. Ví dụ kiểm chứng

Ví dụ 1. Kiểm chứng ổn định của tấm nano FGM có xét ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ.

Tấm vuông nano bằng vật liệu FGM (Al/Al₂O₃): $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0,3$; $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu_c = 0,3$, $h = 1 \text{ nm}$, $a/h = 20$, $b/a = 1$, liên kết khớp trên chu tuyến. Tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm với các chỉ số tỷ lệ thể tích p khác nhau cho hai trường hợp: tấm chịu nén theo một phương ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) và tấm chịu nén đồng thời theo cả hai phương ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$) được thể hiện trong Bảng 1. Trong ví dụ này, hiệu ứng phi cục bộ được xét tới với $\mu/a = 0,1$; và trong trường hợp $\mu/a = 0$ ta có kết quả cho bài toán phân tích ổn định theo lý thuyết đàn hồi truyền thống. Nghiệm giải tích trong bài báo được so sánh với cùng nghiệm giải tích sử dụng dạng nghiệm Navier, nhưng theo lý thuyết biến dạng cắt 5 ẩn số với hàm e -mũ của Khorshidi và Fallah [11]. Các kết quả tính toán tải trọng tới hạn trong Bảng 1 chỉ ra rằng nghiệm Navier cho bài toán ổn định tĩnh của tấm nano khi xét đến ảnh

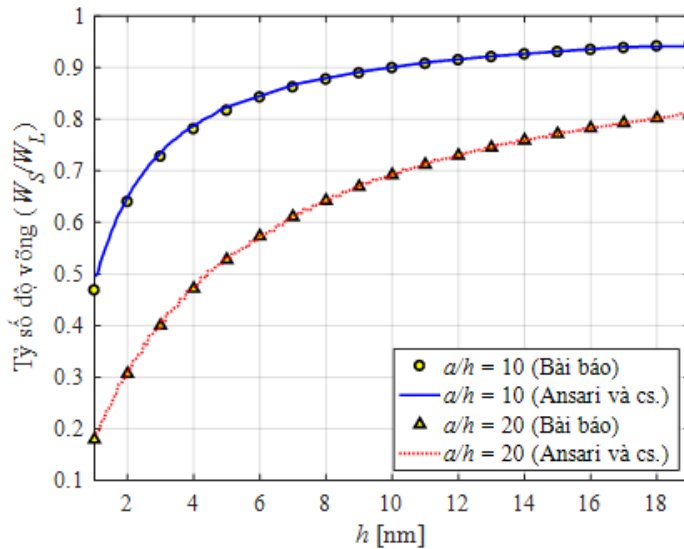
Bảng 1. Tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N} = N_{th} \frac{a^2}{E_m h^3}$ của tấm nano FGM

μ/a	Nguồn	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$
$(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0)$					
0	Khorshidi và Fallah [11]	19,3544	9,6682	7,5372	6,3434
	Bài báo	19,3528	9,6675	7,5371	6,3448
0,1	Khorshidi và Fallah [11]	16,1638	8,0743	6,2948	5,2976
	Bài báo	16,1624	8,0738	6,2946	5,2988
$(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1)$					
0	Khorshidi và Fallah [11]	9,6772	4,8341	3,7686	3,1717
	Bài báo	9,6764	4,8337	3,7686	3,1724
0,1	Khorshidi và Fallah [11]	8,0819	4,0372	3,1474	2,6488
	Bài báo	8,0812	4,0369	3,1473	2,6494

hưởng của hiệu ứng phi cục bộ phù hợp với kết quả của Khorshidi và Fallah với tất cả các trường hợp của tham số vật liệu, tải trọng và tham số phi cục bộ μ .

Ví dụ 2. Kiểm chứng độ võng của tấm nano đẳng hướng có xét ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt.

Tấm vuông nano bằng vật liệu đẳng hướng, liên kết khớp trên chu tuyến với: $E = 177,3$ GPa; $\nu = 0,27$; $\tau^s = 1,7$ N/m; $\mu^s = 2,5$ N/m; $\lambda^s = -8$ N/m. Tỷ số độ võng lớn nhất tại tâm tấm khi xét đến hiệu ứng bề mặt so với khi bỏ qua hiệu ứng bề mặt: W_S/W_L được tính toán và thể hiện qua đồ thị trên Hình 2. Nghiệm Navier trong bài báo được so sánh với nghiệm theo phương pháp vi phân cầu phương tổng quát, sử dụng mô hình tấm Mindlin của Ansari và cs. [21]. Các đường cong quan hệ giữa tỷ số độ võng W_S/W_L và chiều dày tấm h trong bài báo và kết quả tương ứng của Ansari và cs. hoàn toàn tiệm cận nhau, cho thấy độ tin cậy của nghiệm chuyên vị cho bài toán phân tích uốn khi xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt.



Hình 2. So sánh biến thiên của tỷ số độ võng W_S/W_L của tấm nano theo chiều dày h

Qua các kết quả kiểm chứng ở Bảng 1 và Hình 2, có thể thấy rằng, nghiệm giải tích xây dựng trong bài báo và code chương trình máy tính đã thiết lập cho bài toán ổn định và bài toán uốn của tấm nano có độ tin cậy.

3.2. Khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước, hiệu ứng bề mặt và các tham số kích thước, vật liệu và tham số nền đàn hồi

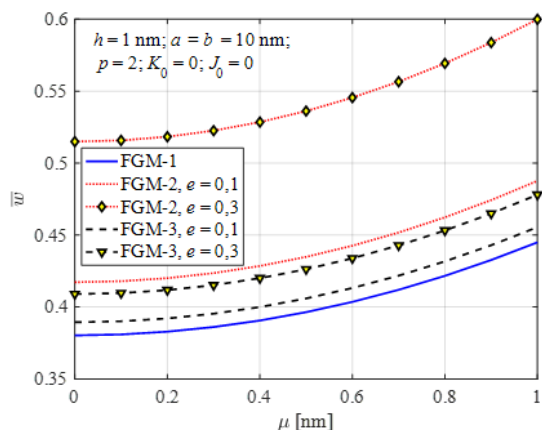
Trong các nghiên cứu dưới đây, tấm nano chữ nhật FGM (Si/Al) có vi bọt rỗng, liên kết khớp trên chu tuyến với: $h = 1$ nm; $b/a = 1$; $p = 2$ sẽ được xem xét dưới hai dạng bài toán sau đây:

- Phân tích uốn: Tính toán độ võng tại tâm tấm dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0$ vuông góc với bề mặt.

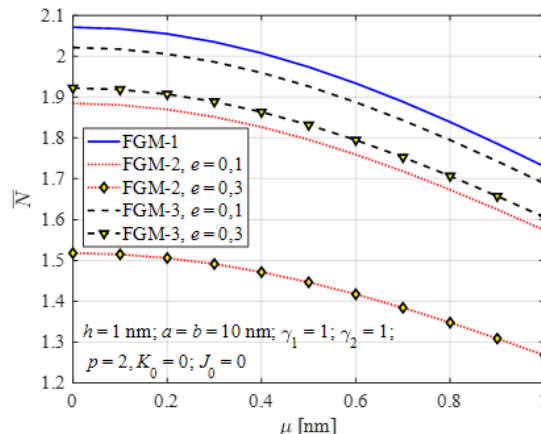
- Phân tích ổn định: Tính toán tải trọng tới hạn của tấm khi chịu tác dụng của tải nén trong mặt trung bình, đồng thời theo hai phương x, y : $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$.

Hình 3 là đồ thị so sánh ảnh hưởng của quy luật phân bố vi bọt rỗng và tham số phi cục bộ μ lên ứng xử uốn và ổn định của tấm nano. Các kết quả cho thấy:

- Tấm FGM hoàn hảo (FGM-1) có độ cứng uốn tốt nhất do đó độ võng không thứ nguyên \bar{w} nhỏ nhất và tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} lớn nhất trong số ba quy luật phân bố vật liệu được xem xét. Khi có vi bọt rỗng, rõ ràng là độ cứng uốn của tấm giảm, dẫn đến \bar{w} tăng và \bar{N} giảm. Với quy



(a) Biến thiên của độ võng không thứ nguyên \bar{w}



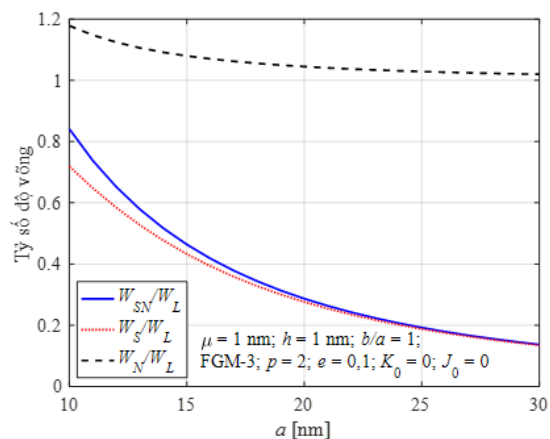
(b) Biến thiên của tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N}

Hình 3. Ảnh hưởng của quy luật phân bố vi bột rỗng và tham số phi cục bộ μ lên ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM

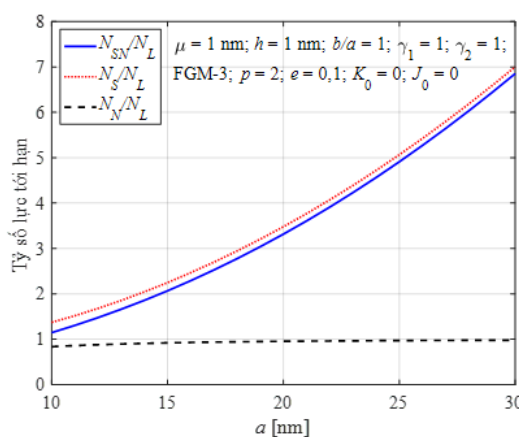
luật phân bố vi bột rỗng đều (FGM-2) độ cứng của tấm sẽ bé hơn so với quy luật phân bố vi bột rỗng không đều - đối xứng (FGM-3), điều này thể hiện ở việc tấm FGM-3 có \bar{w} bé hơn và \bar{N} lớn hơn đáng kể so với tấm FGM-2 tương ứng.

- Về ảnh hưởng của tham số phi cục bộ μ lên ứng xử uốn và ổn định của tấm: với cả ba dạng FGM được xét, khi $\mu = 0$ tấm nano có độ cứng uốn cao nhất, giá trị của μ tăng lên làm cho độ cứng uốn của tấm giảm, độ võng \bar{w} tăng và tải trọng tới hạn \bar{N} giảm.

- Về ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích của lỗ rỗng: với cả 2 quy luật phân bố vi bột rỗng (FGM-2 và FGM-3) khi tăng e từ 0,1 lên 0,3, độ cứng uốn của tấm giảm, dẫn đến độ võng \bar{w} tăng và tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} giảm. Các đường chấm - chấm màu đỏ (gồm đường có hình thoi và đường không có hình thoi) xa nhau hơn so với các đường gạch - đứt màu đen (gồm đường có hình tam giác và đường không có hình tam giác) cho thấy khi tăng e làm cho tấm FGM-2 giảm nhanh độ cứng uốn hơn so với tấm FGM-3.



(a) Biến thiên của độ võng



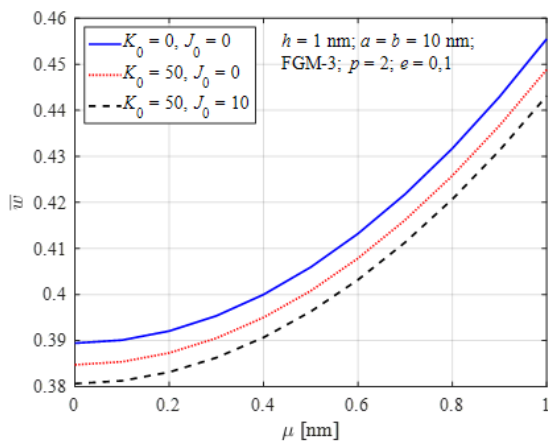
(b) Biến thiên của tải trọng tới hạn

Hình 4. So sánh ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ, hiệu ứng bề mặt lên ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM-3 khi kích thước tấm a thay đổi

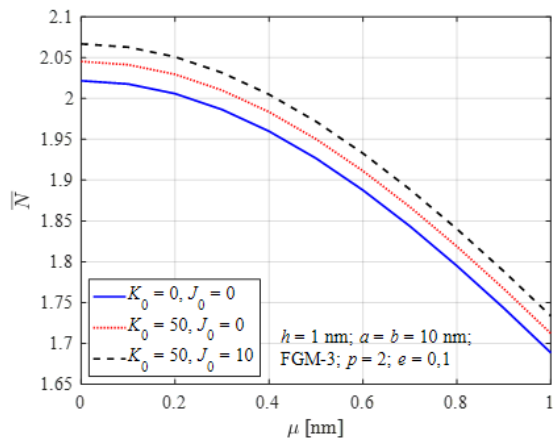
Hình 4 là đồ thị so sánh ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ, hiệu ứng bề mặt lên ứng xử tĩnh của tấm nano FGM-3 khi kích thước tấm a thay đổi. Có thể thấy rằng, với việc giữ nguyên chiều dày h , khi tăng kích thước các cạnh của tấm nano thì độ cứng uốn của tấm giảm, tấm nano làm việc giống như một phần tử màng; thế năng đàn hồi bề mặt trở nên đáng kể so với thế năng của tấm. Vì vậy, các kết quả như mong đợi:

- Ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ là đáng kể (làm tăng độ võng và giảm tải trọng tới hạn so với lý thuyết đàn hồi cổ điển) khi kích thước của tấm nhỏ. Tuy nhiên có thể bỏ qua hiệu ứng kích thước khi kích thước tấm đủ lớn, điều này được thể hiện qua việc các đường màu đen - nét đứt tiệm cận dần tới giá trị 1 và các đường màu xanh - nét liền tiệm cận dần với đường màu đỏ - chấm chấm khi tăng a .

- Ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt có thể làm giảm rõ rệt độ võng và tăng tải trọng tới hạn tùy thuộc kích thước của tấm. Khi kích thước tấm đủ lớn, ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt thậm chí là rất lớn. Nhìn chung, cần kể đến ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt trong cả trường hợp tấm có kích thước nhỏ và kích thước lớn.



(a) Biến thiên của độ võng không thứ nguyên \bar{w}



(b) Biến thiên của tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N}

Hình 5. Ảnh hưởng của tham số phi cục bộ μ và các hệ số nền (K_0, J_0) lên ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM-3

Cuối cùng, Hình 5 là đồ thị thể hiện ảnh hưởng tham số phi cục bộ μ lên ứng xử tĩnh của tấm nano FGM-3 với hệ số nền đàn hồi (K_0, J_0) khác nhau. Tùy thuộc vào giá trị của các tham số nền đàn hồi, ba trường hợp khác nhau của nền được xét tới bao gồm: tấm không có nền đàn hồi ($K_0 = J_0 = 0$), tấm trên nền đàn hồi Winkler ($K_0 = 50, J_0 = 0$), tấm trên nền đàn hồi Pasternak ($K_0 = 50, J_0 = 10$). Ảnh hưởng của tham số phi cục bộ μ lên ứng xử của tấm trên nền đàn hồi cũng như đối với tấm không trên nền đàn hồi, khi tăng μ làm cho độ võng \bar{w} của tấm tăng và tải trọng tới hạn \bar{N} giảm. Rõ ràng là, việc tăng các tham số nền góp phần làm tăng độ cứng tổng thể của tấm, dẫn đến giảm độ võng và tăng tải trọng tới hạn. Mô hình nền Pasternak cho kết quả độ võng \bar{w} bé hơn và tải trọng tới hạn \bar{N} lớn hơn so với mô hình Winkler tương ứng.

4. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình giải tích để phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm nano FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Pasternak, trong đó ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ và hiệu ứng bề mặt được xét đến đồng thời. Tấm FGM hoàn hảo và hai dạng phân bố vi bọt rỗng của tấm FGM không hoàn hảo được xét tới bao gồm: phân bố đều và phân bố không đều - đối xứng. Nghiệm Navier được áp dụng cho tấm chữ nhật, liên kết khớp trên các cạnh, cùng với chương trình tính tự viết bằng

phần mềm Matlab được kiểm chứng cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số đã được thực hiện cho phép đánh giá ảnh hưởng tham số phi cục bộ, hiệu ứng bề mặt, các tham số kích thước và nền đàn hồi lên độ võng và tải trọng tới hạn của tấm. Một số kết quả chính bao gồm:

- Tấm nano FGM hoàn hảo có khả năng chịu tải uốn và khả năng ổn định cao hơn so với khi có vi bột rỗng. Tấm nano FGM-3 có độ cứng uốn cao hơn so FGM-2 tương ứng.

- Ảnh hưởng của hiệu ứng phi cục bộ làm giảm độ cứng uốn của tấm, cần xét tới khi kích thước của tấm nhỏ.

- Ảnh hưởng của hiệu ứng bề mặt luôn cần kể đến, ngay cả trường hợp tấm có kích thước nhỏ và kích thước lớn. Hiệu ứng bề mặt có thể làm giảm rõ rệt độ võng và tăng tải trọng tới hạn của tấm nano FGM.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2022-XDA-04.

Tài liệu tham khảo

- [1] Pradhan, S. C., Phadikar, J. K. (2009). [Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates](#). *Journal of Sound and Vibration*, 325(1–2):206–223.
- [2] Aghababaei, R., Reddy, J. N. (2009). [Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates](#). *Journal of Sound and Vibration*, 326(1–2):277–289.
- [3] Zozulya, V. V. (2018). [Higher order couple stress theory of plates and shells](#). *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 98(10):1834–1863.
- [4] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2013). [A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 45(1):1636–1645.
- [5] Tsiatas, G. C. (2009). [A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory](#). *International Journal of Solids and Structures*, 46(13):2757–2764.
- [6] Mohammadi, M., Fooladi Mahani, M. (2015). [An analytical solution for buckling analysis of size-dependent rectangular micro-plates according to the modified strain gradient and couple stress theories](#). *Acta Mechanica*, 226(10):3477–3493.
- [7] Shaat, M., Mahmoud, F. F., Gao, X.-L., Faheem, A. F. (2014). [Size-dependent bending analysis of Kirchhoff nano-plates based on a modified couple-stress theory including surface effects](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 79:31–37.
- [8] Sobhy, M. (2015). [A comprehensive study on FGM nanoplates embedded in an elastic medium](#). *Composite Structures*, 134:966–980.
- [9] Liu, J. C., Zhang, Y. Q., Fan, L. F. (2017). [Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between](#). *Physics Letters A*, 381(14):1228–1235.
- [10] Bentabet, R., Attia, A., Selim, M. M., Chikh, A., Bourada, F., Bousahla, A. A., Ghazwani, M. H., Tounsi, A. (2023). [Bending and Buckling Responses of FGM Nanoplates Embedded in an Elastic Medium](#). *Physical Mesomechanics*, 26(3):313–328.
- [11] Khorshidi, K., Fallah, A. (2016). [Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 113:94–104.
- [12] Kế, T. V., Hồng, N. T. (2022). Phân tích dao động riêng của dầm Nano cong FG nằm trên nền đàn hồi sử dụng phương pháp Rayleigh-Ritz. *Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Thủy lợi và Môi trường*, 79:96–103.
- [13] Mechab, I., Mechab, B., Benaissa, S., Serier, B., Bouiadjra, B. B. (2016). [Free vibration analysis of FGM nanoplate with porosities resting on Winkler Pasternak elastic foundations based on two-variable refined plate theories](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(8):2193–2211.
- [14] Daikh, A. A., Draï, A., Bensaid, I., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2020). [On vibration of functionally graded sandwich nanoplates in the thermal environment](#). *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23(6):2217–2244.

- [15] Hadji, L., Avcar, M., Civalek, O. (2021). [An analytical solution for the free vibration of FG nanoplates](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43(9).
- [16] Van Vinh, P., Tounsi, A., Belarbi, M.-O. (2022). [On the nonlocal free vibration analysis of functionally graded porous doubly curved shallow nanoshells with variable nonlocal parameters](#). *Engineering with Computers*, 39(1):835–855.
- [17] Slimane, M., Hadj Mostefa, A., Boutaleb, S., Hellal, H. (2020). [Free Vibration Analysis of Functionally Graded FG Nano-Plates with Porosities](#). *Journal of Nano Research*, 64:61–74.
- [18] Phung-Van, P., Thai, C. H., Nguyen-Xuan, H., Abdel-Wahab, M. (2019). [An isogeometric approach of static and free vibration analyses for porous FG nanoplates](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 78:103851.
- [19] Gurtin, M. E., Ian Murdoch, A. (1975). [A continuum theory of elastic material surfaces](#). *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 57(4):291–323.
- [20] Gurtin, M. E., Ian Murdoch, A. (1978). [Surface stress in solids](#). *International Journal of Solids and Structures*, 14(6):431–440.
- [21] Ansari, R., Shahabodini, A., Faghih Shojaei, M., Mohammadi, V., Gholami, R. (2014). [On the bending and buckling behaviors of Mindlin nanoplates considering surface energies](#). *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 57:126–137.
- [22] Ansari, R., Sahmani, S. (2011). [Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates](#). *International Journal of Engineering Science*, 49(11):1204–1215.
- [23] Karimi, M., Shokrani, M. H., Shahidi, A. R. (2015). Size-dependent free vibration analysis of rectangular nanoplates with the consideration of surface effects using finite difference method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 1(3):122–133.
- [24] Yang, Y., Hu, Z.-L., Li, X.-F. (2021). [Axisymmetric bending and vibration of circular nanoplates with surface stresses](#). *Thin-Walled Structures*, 166:108086.
- [25] Norouzzadeh, A., Ansari, R. (2018). [Isogeometric vibration analysis of functionally graded nanoplates with the consideration of nonlocal and surface effects](#). *Thin-Walled Structures*, 127:354–372.
- [26] Bao, G., Wang, L. (1995). [Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings](#). *International Journal of Solids and Structures*, 32(19):2853–2871.
- [27] Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V. (2014). [Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities](#). *Aerospace Science and Technology*, 32(1):111–120.
- [28] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). [Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
- [29] Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.
- [30] Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. (1972). [On nonlocal elasticity](#). *International Journal of Engineering Science*, 10(3):233–248.
- [31] Eringen, A. C. (1983). [On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves](#). *Journal of Applied Physics*, 54(9):4703–4710.
- [32] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [33] Miller, R. E., Shenoy, V. B. (2000). [Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements](#). *Nanotechnology*, 11(3):139–147.
- [34] Shenoy, V. B. (2005). [Atomistic calculations of elastic properties of metallic fcc crystal surfaces](#). *Physical Review B*, 71(9):094104.
- [35] Zenkour, A. M. (2009). [The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11–12):869–880.
- [36] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). [A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation](#). *Composites Science and Technology*, 71(16):1850–1858.
- [37] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2012). [An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates](#). *Applied Mathematical Modelling*, 36(3):1008–1022.

Phụ lục A. Các hệ số trong hệ phương trình (14)

$$\begin{aligned}
 A_{11}^* &= A_{22}^* = A_{11} + \lambda_t + 2\mu_t; & A_{12}^* &= A_{21}^* = A_{12} + \lambda_t + \tau_t; & A_{66}^* &= A_{66} + 2\mu_t - \tau_t \\
 B_{11}^* &= B_{22}^* = B_{11} + \frac{h}{2}(\lambda_b + 2\mu_b); & B_{12}^* &= B_{21}^* = B_{12} + \frac{h}{2}(\lambda_b + \tau_b); & B_{66}^* &= B_{66} + \frac{h}{2}(2\mu_b - \tau_b) \\
 C_{11}^* &= C_{22}^* = C_{11} + \frac{h^2}{4}(\lambda_t + 2\mu_t); & C_{12}^* &= C_{21}^* = C_{12} + \frac{h^2}{4}(\lambda_t + \tau_t); & C_{66}^* &= C_{66} + \frac{h^2}{4}(2\mu_t - \tau_t) \\
 D_{11}^* &= D_{22}^* = D_{11} + \frac{h^3}{8}(\lambda_b + 2\mu_b); & D_{12}^* &= D_{21}^* = D_{12} + \frac{h^3}{8}(\lambda_b + \tau_b); & D_{66}^* &= D_{66} + \frac{h^3}{8}(2\mu_b - \tau_b) \\
 E_{11}^* &= E_{22}^* = E_{11} + \frac{h^4}{16}(\lambda_t + 2\mu_t); & E_{12}^* &= E_{21}^* = E_{12} + \frac{h^4}{16}(\lambda_t + \tau_t); & E_{66}^* &= E_{66} + \frac{h^4}{16}(2\mu_t - \tau_t) \\
 G_{11}^* &= G_{22}^* = G_{11} + \frac{h^6}{64}(\lambda_t + 2\mu_t); & G_{12}^* &= G_{21}^* = G_{12} + \frac{h^6}{64}(\lambda_t + \tau_t); & G_{66}^* &= G_{66} + \frac{h^6}{64}(2\mu_t - \tau_t) \\
 \mu_t &= \mu^{s+} + \mu^{s-}; & \mu_b &= \mu^{s+} - \mu^{s-}; & \lambda_t &= \lambda^{s+} + \lambda^{s-}; & \lambda_b &= \lambda^{s+} - \lambda^{s-}; & \tau_t &= \tau^{s+} + \tau^{s-} \\
 \tau_b &= \tau^{s+} - \tau^{s-}; & (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, & (ij &= 11, 12, 22, 66) \\
 A_s &= \int_{-h/2}^{h/2} G(z)(1 - 3\kappa z^2)^2 dz; & A_i &= \int_{-h/2}^{h/2} z^i Q_0(z) dz; & (i &= 0, 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

Phụ lục B. Các hệ số s_{ij} của ma trận độ cứng kết cấu $[K]$ trong hệ phương trình (21)

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= A_{11}^* \alpha^2 + A_{66}^* \beta^2; & s_{12} &= (A_{12}^* + A_{66}^*) \alpha \beta \\
 s_{13} &= \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{11}^* \right) \alpha^3 + \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{12}^* - 2\kappa D_{66}^* \right) \alpha \beta^2; \\
 s_{14} &= (B_{11}^* - \kappa D_{11}^*) \alpha^2 + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \beta^2; & s_{15} &= (B_{12}^* + B_{66}^* - \kappa D_{12}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha \beta \\
 s_{21} &= (A_{21}^* + A_{66}^*) \alpha \beta; & s_{22} &= A_{66}^* \alpha^2 + A_{22}^* \beta^2 \\
 s_{23} &= \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{21}^* - 2\kappa D_{66}^* \right) \alpha^2 \beta + \left(A_0 \frac{\tau_b}{2} + A_1 \frac{\tau_t}{h} - \kappa D_{22}^* \right) \beta^3 \\
 s_{24} &= (B_{21}^* + B_{66}^* - \kappa D_{21}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha \beta; & s_{25} &= (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha^2 + (B_{22}^* - \kappa D_{22}^*) \beta^2 \\
 s_{31} &= -\kappa D_{11}^* \alpha^3 - \kappa (D_{21}^* + 2D_{66}^*) \alpha \beta^2; & s_{32} &= -\kappa (D_{12}^* + 2D_{66}^*) \alpha^2 \beta - \kappa D_{22}^* \beta^3 \\
 s_{33} &= \left(\kappa^2 G_{11}^* - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) \alpha^4 + \left(\kappa^2 G_{22}^* - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) \beta^4 \\
 &+ \left(\kappa^2 G_{12}^* + \kappa^2 G_{21}^* + 4\kappa^2 G_{66}^* - 2\kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - 2\kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) \alpha^2 \beta^2 \\
 &+ (A^s + \tau_t) \alpha^2 + (A^s + \tau_t) \beta^2 + \xi (k_w + k_{sx} \alpha^2 + k_{sy} \beta^2) \\
 s_{34} &= A^s \alpha - (\kappa E_{11}^* - \kappa^2 G_{11}^*) \alpha^3 - (\kappa E_{21}^* + 2\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{21}^* - 2\kappa^2 G_{66}^*) \alpha \beta^2 \\
 s_{35} &= A^s \beta - (\kappa E_{12}^* + 2\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{12}^* - 2\kappa^2 G_{66}^*) \alpha^2 \beta - (\kappa E_{22}^* - \kappa^2 G_{22}^*) \beta^3 \\
 s_{41} &= (B_{11}^* - \kappa D_{11}^*) \alpha^2 + (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \beta^2; & s_{42} &= (B_{12}^* + B_{66}^* - \kappa D_{12}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha \beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{43} &= \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - (\kappa E_{11}^* - \kappa^2 G_{11}^*) \right] \alpha^3 + A^s \alpha \\
 &\quad + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - (\kappa E_{12}^* - \kappa^2 G_{12}^*) - 2(\kappa E_{66}^* - \kappa^2 G_{66}^*) \right] \alpha \beta^2 \\
 s_{44} &= (C_{11}^* - 2\kappa E_{11}^* + \kappa^2 G_{11}^*) \alpha^2 + (C_{66}^* - 2\kappa E_{66}^* + \kappa^2 G_{66}^*) \beta^2 + A^s \\
 s_{45} &= (C_{12}^* + C_{66}^* - 2\kappa E_{12}^* - 2\kappa E_{66}^* + \kappa^2 G_{12}^* + \kappa^2 G_{66}^*) \alpha \beta; \quad s_{51} = (B_{21}^* + B_{66}^* - \kappa D_{21}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha \beta \\
 s_{52} &= (B_{66}^* - \kappa D_{66}^*) \alpha^2 + (B_{22}^* - \kappa D_{22}^*) \beta^2 \\
 s_{53} &= \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - \kappa E_{21}^* - 2\kappa E_{66}^* + \kappa^2 G_{21}^* + 2\kappa^2 G_{66}^* \right] \alpha^2 \beta \\
 &\quad + \left[\left(A_1 \frac{\tau_b}{2} + A_2 \frac{\tau_t}{h} - \kappa A_3 \frac{\tau_b}{2} - \kappa A_4 \frac{\tau_t}{h} \right) - \kappa E_{22}^* + \kappa^2 G_{22}^* \right] \beta^3 + A^s \beta \\
 s_{54} &= (C_{21}^* + C_{66}^* - 2\kappa E_{21}^* - 2\kappa E_{66}^* + \kappa^2 G_{21}^* + \kappa^2 G_{66}^*) \alpha \beta \\
 s_{55} &= (C_{66}^* - 2\kappa E_{66}^* + \kappa^2 G_{66}^*) \alpha^2 + (C_{22}^* - 2\kappa E_{22}^* + \kappa^2 G_{22}^*) \beta^2 + A^s
 \end{aligned}$$