

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN TÍNH DẦM CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN HAI CHIỀU TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

Nguyễn Văn Chinh^{a,*}

^aKhoa Cơ khí, Học viện Kỹ thuật quân sự, 236 đường Hoàng Quốc Việt, quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 27/11/2023, Sửa xong 19/01/2024, Chấp nhận đăng 23/4/2024

Tóm tắt

Bài báo này tập trung phân tích ứng xử phi tuyến tính của dầm có cơ tính biến đổi theo hai phương (2D-FG), đặt trên nền đàn hồi và chịu tác dụng của lực phân bố đều hoặc phân bố dạng hình sin bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Vật liệu dầm bao gồm hai thành phần chính là gốm và kim loại, với các đặc trưng cơ học biến đổi liên tục theo chiều cao và chiều dài của dầm. Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao với ba ẩn chuyển vị, có kể đến phi tuyến hình học Von Kármán. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke. Phần tử dầm hai điểm nút với các hàm nội suy tuyến tính và bậc ba được sử dụng để rời rạc và xây dựng hệ phương trình cân bằng tĩnh phi tuyến cho dầm. Hệ phương trình cân bằng phi tuyến tính được giải trên cơ sở phương pháp lặp Newton–Raphson. Độ tin cậy của mô hình được kiểm chứng qua kết quả so sánh với các tác giả đã công bố. Ảnh hưởng của một số yếu tố hình học, vật liệu và điều kiện biên đến độ võng của dầm được khảo sát và thảo luận chi tiết.

Từ khoá: phân tích phi tuyến; phân tích tĩnh; dầm; 2D-FGM; sandwich; phần tử hữu hạn.

NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF BIDIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED BEAMS ON AN ELASTIC FOUNDATION

Abstract

This paper focuses on analyzing the nonlinear static behavior of beams with mechanical properties varying in two directions (2D-FG), resting on an elastic foundation and subjected to uniform distributed or sinusoidally distributed forces by finite element method. Beam materials include two components, ceramic and metal, with mechanical properties that continuously change according to the thickness and length directions of the beam. The relationship between deformation and displacement is built based on the theory of high-order shear deformation with three unknown displacements, and includes Von Kármán geometric nonlinearity. The relationship between stress and strain obeys Hooke's law. Two-nodal beam elements with linear and cubic interpolation functions are used to discretize the domain and establish static nonlinear equilibrium equations for the beam. The nonlinear equilibrium equations are solved by using the Newton–Raphson iterative method. The reliability of the model is verified through comparison results with data in literature. The influences of geometric parameters, materials parameters and boundary conditions on the deflection of beams are investigated and discussed in detail.

Keywords: nonlinear; static analysis; beam; 2D-FGM; sandwich; FEM.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(3V\)-11](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(3V)-11) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (function graded materials - FGMs) đã được các nhà khoa học Nhật bản nghiên cứu lần đầu tiên vào năm 1984 [1], đây là loại vật liệu được tạo nên từ hai hay nhiều vật liệu thành phần, thường là gốm và kim loại. FGMs có cơ tính biến đổi trơn, liên tục trong không gian kết cấu theo một phương (1D-FG), hai phương (2D-FG), thậm chí đa phương, và có nhiều ưu điểm nổi trội so với vật liệu composite thông thường, như chịu được nhiệt độ cao nhờ mặt giàu gốm, tăng

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: chinhnguyenvan@lqdtu.edu.vn (Chinh, N. V.)

tính dẻo nhờ tỉ phần kim loại cao, khắc phục được hiện tượng bong, tách lớp, do vậy nó được ứng dụng nhiều trong kỹ thuật như động cơ đốt trong trong hàng không vũ trụ, vít cố định xương trong y học, xe đạp, vợt tennis trong thể thao [2].

Nghiên cứu ứng xử cơ học của các kết cấu được làm từ FGMs đã và đang nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học khắp nơi trên thế giới, điển hình là các cấu kiện cơ bản như dầm, tấm, vỏ. Có nhiều nghiên cứu phân tích tuyến tính hoặc phi tuyến về ứng xử tĩnh, dao động riêng, dao động cưỡng bức cho các kết cấu này với hai phương pháp tính toán chủ yếu được sử dụng là giải tích và lời giải số. Một số nghiên cứu tuyến tính đã tập trung phân tích về ứng xử của kết cấu 1D-FG như Vo [3, 4], Chinh [5] và Yarasca [6] đã phân tích uốn và ổn định tĩnh cho dầm sandwich, sử dụng lý thuyết bậc cao, phương pháp giải tích và phần tử hữu hạn (PTHH). Về ứng xử của dầm trên nền đàn hồi đã được một số tác giả nghiên cứu, Phuong [7] sử dụng phương pháp giải tích phân tích uốn tĩnh cho dầm có lỗ rỗng, Tossapanon [8] phân tích ổn định tĩnh và dao động riêng cho dầm 1D-FG sandwich với mô hình nền đàn hồi hai hệ số, Su [9] đã phân tích tĩnh và dao động riêng cho dầm sandwich với việc sử dụng khai triển chuỗi Fourier và các điều kiện biên khác nhau. Bên cạnh đó, ứng xử phi tuyến của dầm FG cũng đã được một số nhà khoa học quan tâm nghiên cứu, Zhang [10], Kien [11] và Srikarun [12] đã phân tích uốn tĩnh phi tuyến cho dầm 1D-FG, dầm sandwich có lỗ rỗng, có xét đến vị trí của mặt trung hoà. Kien [13, 14] đã phân tích phi tuyến tĩnh của dầm Euler-Bernoulli. Hung [15] đã sử dụng phương pháp không lưới để phân tích uốn tĩnh phi tuyến cho dầm sandwich có lỗ rỗng.

Các kết cấu 1D-FG có nhiều ưu điểm và đã được ứng dụng nhiều trong thực tế kỹ thuật [2], tuy nhiên để đáp ứng đầy đủ hơn các yêu cầu của ứng dụng, cần có các kết cấu có nhiều ưu điểm hơn nữa, như kết cấu có cơ tính biến đổi theo hai phương hoặc nhiều phương. Trong nhiều trường hợp, việc này trở thành yếu tố quyết định giữa thành công và thất bại trong triển khai công nghệ. Mặc dù đã có những nghiên cứu tiên tiến về FGMs, tuy nhiên, còn nhiều tiềm năng chưa được khám phá đầy đủ. Sự mở rộng phạm vi nghiên cứu đến kết cấu 2D-FG không chỉ là một bước quan trọng để hiểu sâu hơn về tính chất của vật liệu mà còn là chìa khóa mở ra các ứng dụng rộng lớn trong thực tế. Gần đây việc nghiên cứu về ứng xử cho kết cấu 2D-FG cũng đã nhận được sự quan tâm nhiều nhà khoa học. Karamanlı [16] đã phân tích ứng xử uốn tĩnh của dầm sandwich có cơ tính biến đổi hai phương theo quy luật lũy thừa. Şimşek [17] đã phân tích ổn định tĩnh của dầm có cơ tính biến đổi theo hai phương với các điều kiện biên khác nhau. Le [18] đã phân tích dao động riêng và ổn định của dầm 2D-FG sandwich, sử dụng phương pháp PTHH với phần tử được làm giàu. Cong Ich [19] đã phân tích dao động riêng cho dầm 2D-FG sandwich tựa một phần trên nền đàn hồi với lý thuyết biến dạng trượt bậc cao dạng lượng giác. Le [20] đã phân tích dao động riêng phi tuyến của dầm sandwich có cơ tính biến đổi theo hai phương với ba thành phần vật liệu, đặt trên nền đàn hồi không liên tục.

Dựa trên nghiên cứu tổng quan và kiến thức cũng như sự hiểu biết của tác giả, cho thấy hiện nay vẫn chưa có nghiên cứu nào tập trung vào phân tích phi tuyến tĩnh của dầm 2D-FG trên đàn hồi chịu tải trọng phân bố với các quy luật khác nhau. Do đó, trong nghiên cứu này, một mô hình phần tử dầm hai điểm nút, mỗi nút năm bậc tự do được đề xuất để để phân tích các đặc tính phi tuyến hình học của dầm 2D-FG trên nền đàn hồi. Ứng xử phi tuyến tĩnh của dầm 2D-FG được khảo sát thông qua đường cong tải trọng - độ võng. Các ví dụ so sánh được thực hiện để khẳng định tính chính xác và độ tin cậy của mô hình. Bên cạnh đó, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học và điều kiện biên đến ứng xử phi tuyến tĩnh của dầm 2D-FGM cũng được khảo sát. Các nhận xét, đánh giá và kết luận được rút ra từ kết quả của bài báo sẽ có ý nghĩa trong việc nghiên cứu trên cùng lĩnh vực.

2. Mô hình dầm 2D-FG

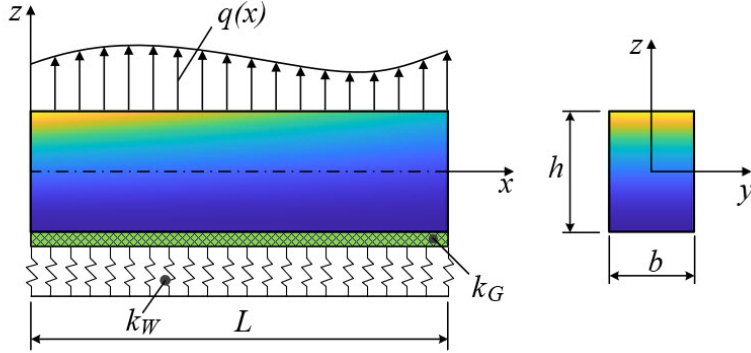
Trong bài báo này, xét dầm 2D-FG có chiều dài L , chiều rộng b và chiều cao h như trên Hình 1. Dầm nằm hoàn toàn trên nền đàn hồi, được liên kết tại hai đầu của dầm và chịu tác dụng của lực phân

bổ $q(x)$ vuông góc với trục của dầm. Sử dụng mô hình nền đàn hồi Pasternak hai hệ số, bao gồm hệ số nền Winkler là k_W và hệ số nền Pasternak là k_G .

Vật liệu của dầm được cấu tạo từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại. Tỷ phần thể tích V_c, V_m của các vật liệu thành phần trong các lớp biến đổi theo hai phương z và x theo quy luật lũy thừa như sau [16]:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{p_z} \left(1 - \frac{x}{2L} \right)^{p_x}, V_m = 1 - V_c \quad (1)$$

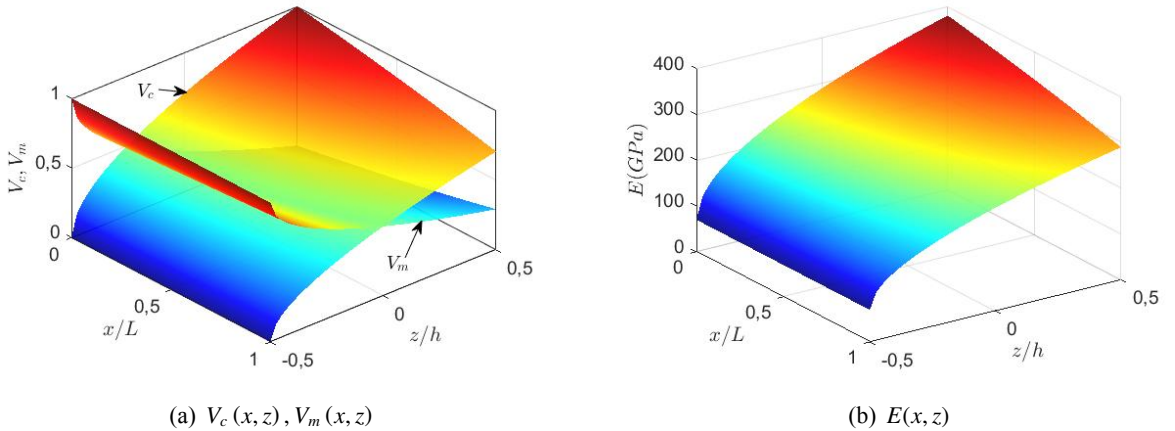
trong đó, p_x và p_z có giá trị không âm là số mũ của quy luật phân bố vật liệu. Các chỉ số c, m lần lượt là ký hiệu cho vật liệu gốm và kim loại.



Hình 1. Mô hình dầm 2D-FG trên nền đàn hồi

Ký hiệu $P(x, z)$ đại diện chung cho các đặc trưng cơ học của vật liệu dầm 2D-FG, bao gồm mô đun đàn hồi $E(x, z)$, hệ số Poisson $\nu(x, z)$ và được xác định theo mô hình Voigt bởi biểu thức sau:

$$P(x, z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (2)$$



Hình 2. Sự biến thiên tỷ phần thể tích và mô đun đàn hồi của dầm 2D-FG

Trên Hình 2 là sự biến thiên của các tỷ phần thể tích $V_c(x, z)$, $V_m(x, z)$ và mô đun đàn hồi $E(x, z)$ của dầm 2D-FG theo hai phương x và z . Ở đây, $p_x = p_z = 0,5$ và vật liệu gốm là Al_2O_3 có $E_c = 380 \text{ GPa}$, vật liệu kim loại là Al có $E_m = 70 \text{ GPa}$.

3. Các hệ thức cơ bản

3.1. Biểu diễn toán học

Trường chuyển vị trong dầm tại điểm có tọa độ (x, z) được xác định theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao của Shimpi [21]:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 - zw_{b,x} - f(z)w_{s,x} \\ w_b + w_s \end{Bmatrix} \quad (3)$$

trong đó, u và w là các thành phần chuyển vị theo phương x và z , w_b và w_s là các thành phần chuyển vị theo phương z do biến dạng uốn và biến dạng trượt. Các thành phần đạo hàm $w_{b,x} = \frac{\partial w_b}{\partial x}$, $w_{s,x} = \frac{\partial w_s}{\partial x}$ và $f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}$.

Trường biến dạng trong dầm khi kể đến tính phi tuyến hình học Von Kármán được xác định theo biểu thức:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^T, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

Thay biểu thức (3) vào biểu thức (4) nhận được:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} \quad (5)$$

ở đây, $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ và $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ lần lượt là các thành phần biến dạng tuyến tính và phi tuyến và được xác định bởi biểu thức sau:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_L &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ 0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{b,xx} \\ 0 \end{Bmatrix} - f \begin{Bmatrix} w_{s,xx} \\ 0 \end{Bmatrix} + g \begin{Bmatrix} 0 \\ w_{s,x} \end{Bmatrix}, \quad g = 1 - f' \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_{b,x} + w_{s,x})^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Trường ứng suất được xác định theo định luật Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} E(x, z) & 0 \\ 0 & \frac{E(x, z)}{2[1 + \vartheta(x, z)]} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

Hệ phương trình cân bằng của dầm được xác định theo nguyên lý cực tiểu thế năng toàn phần:

$$\delta U + \delta U^f - \delta W = 0 \quad (8)$$

trong đó δU , δU^f và δW lần lượt là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, biến phân thế năng biến dạng của nền và công của lực ngoài $q(x)$, được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \quad \delta W = \int_L q(x) \delta w dx \\ \delta U^f &= \int_L (k_W w \delta w + k_G w_{s,x} \delta w_{s,x}) dx \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó Ω là thể tích của dầm.

3.2. Công thức phần tử hữu hạn

Sử dụng phần tử dầm hai điểm nút với 5 bậc tự do mỗi nút, bao gồm u_0 , w_b , w_s , $w_{b,x}$ và $w_{s,x}$ như trên Hình 3. Véc tơ chuyển vị nút $\mathbf{d}_e$ của phần tử có dạng:

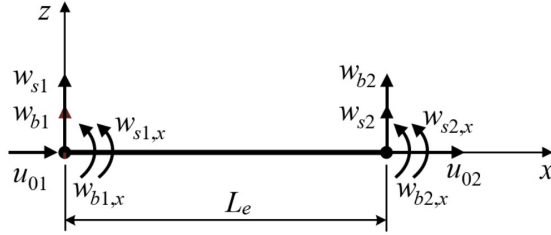
$$\mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_m^T & \mathbf{d}_b^T & \mathbf{d}_s^T \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

10×1

trong đó,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_m &= \begin{Bmatrix} u_{01} & u_{02} \end{Bmatrix}^T, & \mathbf{d}_b &= \begin{Bmatrix} w_{b1} & w_{b1,x} & w_{b2} & w_{b2,x} \end{Bmatrix}^T \\ \mathbf{d}_s &= \begin{Bmatrix} w_{s1} & w_{s1,x} & w_{s2} & w_{s2,x} \end{Bmatrix}^T \end{aligned} \quad (11)$$

2×1 4×1 4×1



Hình 3. Mô hình phần tử dầm hai điểm nút với 10 bậc tự do

Các thành phần chuyển vị trên mặt trung bình của dầm được xấp xỉ theo chuyển vị nút phần tử thông qua các hàm dạng bởi công thức sau:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbf{N} \mathbf{d}_m, & w_b &= \mathbf{H} \mathbf{d}_b, & w_s &= \mathbf{H} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}, & \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi, & N_2 &= \xi, & H_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ H_2 &= 1 - 2\xi + \xi^2, & H_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & H_4 &= -\xi + \xi^2 \end{aligned} \quad (13)$$

ở đây, $\xi = \frac{\tilde{x}}{L_e}$ là toạ trong hệ toạ độ tự nhiên của phần tử, $\xi \in [0; 1]$, $\tilde{x}$ là toạ độ trong hệ toạ độ địa phương của phần tử và L_e là chiều dài của phần tử.

Thay biểu thức (12) vào biểu thức (3), trường chuyển vị của điểm bất kỳ trong phần tử dầm được xác định theo chuyển vị nút của phần tử như sau:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & -z\mathbf{H}_{,x} & -f\mathbf{H}_{,x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_m \\ \mathbf{d}_b \\ \mathbf{d}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_w \end{Bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N}_u \mathbf{d}_e \quad (14)$$

Thay các thành phần chuyển vị trong biểu thức (12) vào biểu thức (6) chúng ta nhận được các véc tơ biến dạng tuyến tính ϵ_L :

$$\epsilon_L = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} & -z\mathbf{H}_{,xx} & -f\mathbf{H}_{,xx} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (1-f_{,z})\mathbf{H}_{,x} \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{B}_L \mathbf{d}_e \quad (15)$$

và các véc tơ biến dạng phi tuyến ϵ_{NL} :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{b,x} + w_{s,x} \\ 0 \end{Bmatrix} (w_{b,x} + w_{s,x}) = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{d}_e \quad (16)$$

trong đó, $\mathbf{B}_{NL}$ được xác định bởi:

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{d}_e \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H}_{,x} & \mathbf{H}_{,x} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Thay biểu thức (15) và (16) vào biểu thức (5) chúng ta nhận được:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \right] \mathbf{q}_e \quad (18)$$

Thay biểu thức (18) và biểu thức (7) vào biểu thức (9), nhận được biến phân thế năng biến dạng của phần tử như sau:

$$\delta U_e = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{Q} \left(\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \right) dV \quad (19)$$

trong đó $\mathbf{K}_e$ là ma trận độ cứng của phần tử, phụ thuộc vào véc tơ chuyển vị nút $\mathbf{d}_e$ của phần tử thông qua ma trận $\mathbf{B}_{NL}$.

Thay biểu thức (14) vào biểu thức (9), nhận được biến phân thế năng của phần tử nền đàn hồi như sau:

$$\delta U_e^f = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^f \mathbf{d}_e, \quad \mathbf{K}_e^f = \int_{L_e} \left(k_w \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + k_G \mathbf{N}_{w,x}^T \mathbf{N}_{w,x} \right) dx \quad (20)$$

và biến phân công của lực ngoài tác dụng lên phần tử:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e, \quad \mathbf{F}_e = \int_{L_e} q(x) \mathbf{N}_w^T dx \quad (21)$$

trong đó, $\mathbf{K}_e^f$ và $\mathbf{F}_e$ lần lượt là ma trận độ cứng của phần tử nền đàn hồi và véc tơ tải trọng nút của phần tử dầm.

Thay các biểu thức (19), (20) và (21) vào biểu thức (8), nhận được hệ phương trình cân bằng phi tuyến tính của phần tử dầm như sau:

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_e) = (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^f) \mathbf{d}_e - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (22)$$

viết lại công thức (22) dưới dạng:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{d}_e) &= \mathbf{F}_e^{in}(\mathbf{d}_e) - \mathbf{F}_e^{out} = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_e^{in}(\mathbf{d}_e) &= (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^f) \mathbf{d}_e, \mathbf{F}_e^{out} = \mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (23)$$

trong đó, $\mathbf{R}(\mathbf{d}_e)$ được gọi là véc tơ lực dư, $\mathbf{F}_e^{in}(\mathbf{d}_e)$ và $\mathbf{F}_e^{out}$ lần lượt là véc tơ lực trong và véc tơ lực ngoài của phần tử.

Sau khi tập hợp các phần tử dầm, hệ phương trình cân bằng phi tuyến tính của toàn bộ dầm có dạng:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) = \mathbf{F}^{in}(\mathbf{D}) - \lambda \mathbf{F}^{out} = \mathbf{0} \quad (24)$$

trong đó, $\mathbf{D}$ là véc tơ chuyển vị nút tổng thể của dầm, $\mathbf{F}^{in} = \sum_{e=1}^{nEl} \mathbf{F}_e^{in}$ và $\mathbf{F}^{out} = \sum_{e=1}^{nEl} \mathbf{F}_e^{out}$ lần lượt là các

véc tơ lực trong và lực ngoài tổng thể của dầm, λ là tham số tải trọng, nhận giá trị trong đoạn $[0; 1]$ và nEl là số phần tử dầm được chia.

Hệ phương trình (24) được giải trên cơ sở thuật toán lặp Newton–Rapshon [22]. Theo đó, tải trọng ngoài được chia thành các cấp tải trọng khác nhau bởi tham số λ_n ($n = 1; 2; 3 \dots$), thuật toán lặp được thực hiện cho mỗi cấp tải trọng này. Giả sử trong cấp tải trọng n , đã xác định được véc tơ $\mathbf{D}_n^i$ ở bước lặp thứ i ($i = 0; 1; 2; 3 \dots$), ở đây $\mathbf{D}_n^0$ là giá trị khởi tạo của $\mathbf{D}_n^i$. Véc tơ chuyển vị nút trong bước lặp thứ $i + 1$ được xác định theo thuật toán sau:

$$\mathbf{D}_n^{i+1} = \mathbf{D}_n^i + \Delta \mathbf{D}_n^{i+1} \quad (25)$$

với $\Delta \mathbf{D}_n^{i+1}$ là số gia của chuyển vị, được xác định bởi biểu thức:

$$\Delta \mathbf{D}_n^{i+1} = - [\mathbf{K}_T (\mathbf{D}_n^i)]^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{D}_n^i, \lambda_n) \quad (26)$$

trong đó $\mathbf{K}_T = \sum_{e=1}^{nEL} \mathbf{K}_{eT}$ là ma trận độ cứng tiếp tuyến tổng thể, $\mathbf{K}_{eT}$ là ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử được xác định theo các công thức dưới đây

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eT} &= \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{d}_e)}{\partial \mathbf{d}_e} = \frac{\partial \mathbf{F}_e^{in}(\mathbf{d}_e)}{\partial \mathbf{d}_e} = \mathbf{K}_e^L + \mathbf{K}_e^{NL} + \mathbf{K}_e^f + \mathbf{K}_e^\sigma \\ \mathbf{K}_e^L &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_L^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_L d\Omega, \quad \mathbf{K}_e^\sigma = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \sigma_x \mathbf{G} d\Omega \\ \mathbf{K}_e^{NL} &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_L^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}_{NL}) d\Omega \end{aligned} \quad (27)$$

và véc tơ lực dư $\mathbf{R}(\mathbf{D}_n^i, \lambda_n)$ được xác định theo biểu thức (24).

Trong thuật toán trên, cần phải biết trước giá trị khởi tạo của véc tơ chuyển vị trong mỗi cấp tải trọng, thông thường được cho bởi $\mathbf{D}_1^0 = \mathbf{0}$ và $\mathbf{D}_n^0 = \mathbf{D}_{n-1}$. Trong quá trình tính, điều kiện hội tụ luôn được kiểm tra sau mỗi vòng lặp theo công thức sau:

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{D}_n^i, \lambda_n)\| \leq \psi \|\lambda_n \mathbf{F}^{out}\| \quad (28)$$

ở đây ψ là sai số, được chọn bằng 10^{-4} .

Véc tơ số gia chuyển vị $\Delta \mathbf{D}_n^{i+1}$ trong công thức (26) được xác định với điều kiện biên cho trước. Trong bài báo này, xét dầm được liên kết tại hai đầu ($x = 0$ và $x = L$) với hai điều kiện biên được sử dụng là liên kết tựa đơn (SS) với $u_0 = w_b = w_s = 0$ và liên kết ngàm (CC) với $u_0 = w_b = w_s = w_{b,x} = w_{s,x} = 0$.

4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, xét dầm 2D-FG được cấu tạo từ các vật liệu thành phần là Al_2O_3 có $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0,3$ và Al có $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0,3$. Dầm được chia thành 20 phần tử có cùng độ dài, đảm bảo sự hội tụ của kết quả tính toán. Hai trường hợp dầm SS và CC, chịu lực phân bố đều, $q(x) = q_0$ và phân bố dạng hàm sin, $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ được khảo sát. Các tham số không thứ nguyên được định nghĩa như sau [10, 16]:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{100 E_m h^3 w_{\max}}{q_0 L^4}, \quad \bar{w}_{NL} = \frac{w_{\max}}{h} \\ w_{\max} &= w\left(\frac{L}{2}\right), \quad \bar{P} = \frac{q_0 b L^4}{E_m h^4} \\ \bar{K}_W &= \frac{k_W L^4}{E_m I}, \quad \bar{K}_G = \frac{k_G L^2}{E_m I}, \quad I = \frac{bh^3}{12} \end{aligned} \quad (29)$$

4.1. Kết quả so sánh

Bảng 1 là kết quả so sánh của bài báo với Karamali [16] về tham số độ võng tuyến tính $\bar{w}$ của dầm 2D-FG khi thay đổi chỉ số mũ của quy luật phân bố vật liệu. Trong đó, Karamali đã sử dụng lý thuyết Quasi 3D và phương pháp giải tích để tính cho dầm có liên kết SS, chịu tải trọng phân bố đều, vật liệu dầm được cấu tạo từ Al_2O_3 và Al có tỉ phần thể tích được xác định theo công thức (1).

Bảng 1. Tham số độ võng tĩnh tuyến tính $\bar{w}$ của dầm 2D-FG tựa đơn ($L = 20h$)

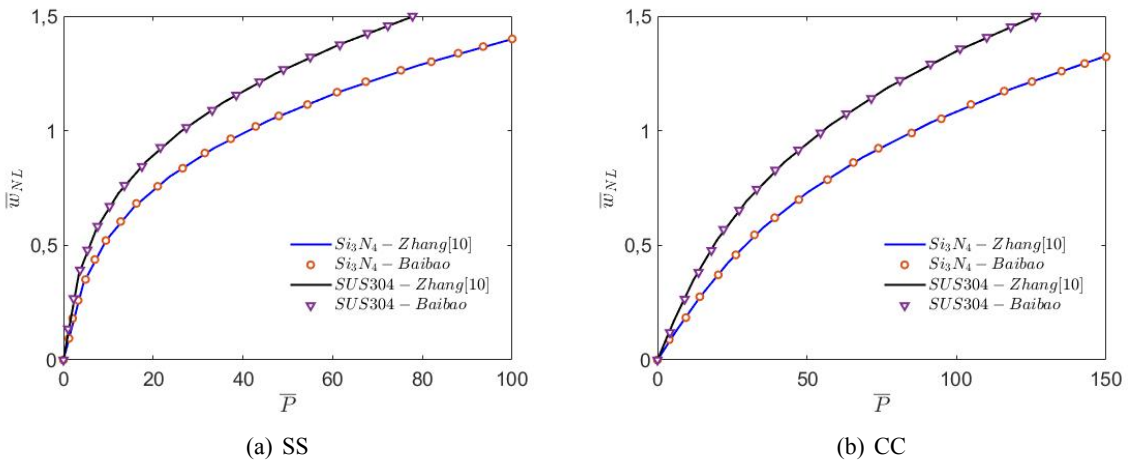
p_z	Nguồn	p_x				
		0	0,1	0,5	1	2
0	Karamali [16]	2,9455	3,0177	3,3215	3,7333	4,6555
	Bài báo	2,9438	3,0155	3,3171	3,7282	4,6569
0,1	Karamali [16]	3,2622	3,3401	3,6655	4,1031	5,0682
	Bài báo	3,2567	3,3339	3,6578	4,0962	5,0733
0,5	Karamali [16]	4,5015	4,5957	4,9843	5,4912	6,5521
	Bài báo	4,4946	4,5882	4,9753	5,4840	6,5614
1	Karamali [16]	5,8035	5,9040	6,3124	6,8297	7,8657
	Bài báo	5,8014	5,9016	6,3090	6,8296	7,8858
2	Karamali [16]	7,3967	7,4891	7,8588	8,3170	9,2137
	Bài báo	7,3937	7,4855	7,8547	8,3183	9,2396

Bảng 2. Tham số độ võng tĩnh tuyến tính $\bar{w}$ của dầm có vật liệu đồng nhất

Tham số nền đàn hồi		$\frac{L}{h} = 120$		$\frac{L}{h} = 5$	
$\bar{K}_W$	$\bar{K}_G$	Phuong [7]	Bài báo	Phuong [7]	Bài báo
0	0	1,3023	1,3023	1,4321	1,4320
10	0	1,1806	1,1806	1,2855	1,2855
	10	0,6133	0,6133	0,6387	0,6387
	25	0,3557	0,3557	0,3631	0,3631
100	0	0,6401	0,6401	0,6671	0,6671
	10	0,4256	0,4256	0,4362	0,4362
	25	0,2828	0,2828	0,2869	0,2869

Bảng 2 là kết quả so sánh của bài báo với Phuong [7] về tham số độ võng tuyến tính $\bar{w}$ của dầm có vật liệu đồng nhất trên nền đàn hồi. Ở đây, Phuong đã sử dụng lý thuyết dầm Timosenko và phương pháp giải tích để tính cho dầm có liên kết SS, chịu lực phân bố đều, sử dụng mô hình vật liệu có tỷ phần thể tích xác định theo công thức (1) với các chỉ số mũ $p_x = p_z = 0$.

Hình 4 là các kết quả so sánh của đường cong tải - độ võng với bài báo của Zhang [10] cho dầm đồng nhất. Trong đó, Zhang đã sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao và phương pháp Ritz, hai loại vật liệu được xem xét là Si_3O_4 ; SUS304 với mô đun đàn hồi lần lượt là 322,27 GPa; 200,79 GPa và có cùng hệ số Poisson 0,3, sử dụng mô hình vật liệu có tỷ phần thể tích xác định theo công thức (1) với các chỉ số mũ $p_x = p_z = 0$.



Hình 4. Đường cong tải-độ võng của dầm đồng nhất ($L = 30h$)

Các kết quả so sánh cho thấy sai số giữa kết quả tính toán bằng phương pháp của bài báo và của các tác giả khác là rất nhỏ, giá trị sai số trong Bảng 1 và Bảng 2 đều nhỏ hơn 1%, điều này khẳng định độ tin cậy của phương pháp nghiên cứu trong bài báo.

4.2. Kết quả số và thảo luận

Bảng 3 và Bảng 4 lần lượt là sự biến thiên độ võng tĩnh phi tuyến $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG theo chỉ số mũ của quy luật phân bố vật liệu p_x và p_z cho hai trường hợp của tải trọng $q(x)$ là phân bố đều và phân bố hình sin. Trong đó, p_x và p_z có giá trị thay đổi từ 0 đến 5, tham số cấp độ tải trọng $\bar{P} = 300$, tham số hệ số nền $\bar{K}_W = 10$, $\bar{K}_G = 10$, tỉ số giữa chiều dài và chiều cao của dầm là $\frac{L}{h} = 20$, hai điều kiện liên kết được khảo sát là SS và CC. Trong tất cả các trường hợp khảo sát về điều kiện biên và dạng phân bố của tải trọng $q(x)$, khi tăng p_x hoặc p_z hoặc tăng đồng thời cả p_x và p_z đều làm cho $\bar{w}_{NL}$ tăng lên, điều này được giải thích là do theo công thức (1), khi tăng p_x hoặc p_z hoặc cả p_x và p_z , tỷ phần thể tích V_c của vật liệu gốm giảm, V_m của vật liệu kim loại tăng lên, làm cho độ cứng của tấm 2D-FG giảm, do vậy độ võng tăng lên.

Hơn nữa, với giá trị của p_z càng nhỏ, ảnh hưởng của sự thay đổi p_x đến sự thay đổi của $\bar{w}_{NL}$ càng lớn. Cụ thể trong Bảng 3, với liên kết SS, khi $p_z = 0$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ bằng 1,3080 ($p_x = 0$) và 1,8641 ($p_x = 5$), tăng 42,52%, còn khi $p_z = 5$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ bằng 1,8095 ($p_x = 0$) và 2,1490 ($p_x = 5$), tăng 18,76%. Cũng tương tự như vậy, với giá trị của p_x càng nhỏ, ảnh hưởng của sự thay đổi p_z đến sự thay đổi của $\bar{w}_{NL}$ càng lớn. Cụ thể trong Bảng 4, với liên kết CC, khi $p_x = 0$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ bằng 0,9040 ($p_z = 0$) và 1,5665 ($p_z = 5$), tăng 73,29%, còn khi $p_x = 5$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ bằng 1,4184 ($p_z = 0$) và 1,8240 ($p_z = 5$), tăng 28,6%. Ngoài ra, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ khi dầm chịu tải trọng $q(x)$ phân bố đều lớn hơn so với khi dầm chịu tải trọng phân bố hình sin, cụ thể với trường hợp dầm có liên kết SS và $p_x = p_z = 1$, $\bar{w}_{NL}$ nhận giá trị lần lượt bằng 1,5974 và 1,4911 tương ứng với $q(x)$ phân bố phân bố đều và hình sin, lớn hơn 6,65%.

Hình 5 và Hình 6 là sự biến thiên độ võng tĩnh phi tuyến $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG theo tham số tải trọng $\bar{P}$, lần lượt tương ứng với hai dạng liên kết là SS và CC. Trong đó, cố định các tham số hệ số nền $\bar{K}_W = 10$, $\bar{K}_G = 10$ và tỉ lệ giữa chiều dài và chiều cao của dầm là $\frac{L}{h} = 20$. Trong mỗi trường hợp khảo sát, cố định một trong hai chỉ số mũ p_x, p_z nhận giá trị bằng 1 và thay đổi giá trị của chỉ số mũ còn lại bằng 0; 0,5; 1; 2 và 5, quy luật của tải trọng $q(x)$ là phân bố đều hoặc phân bố dạng hình sin.

Bảng 3. Sự biến thiên $\bar{w}_{NL}$ khi dầm 2D-FG chịu tải trọng $q(x) = q_0$

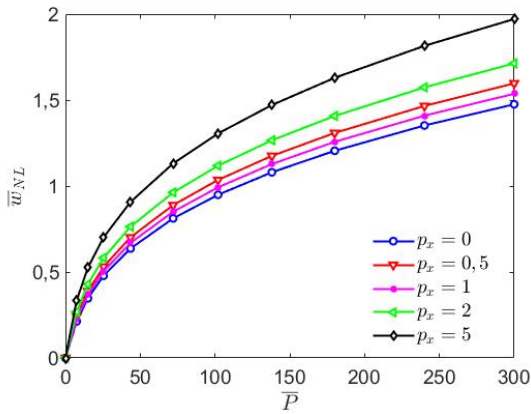
Liên kết	p_z	p_x					
		0	0,1	0,5	1	2	5
SS	0	1,3080	1,3198	1,3678	1,4294	1,5539	1,8641
	0,1	1,3264	1,3383	1,3868	1,4488	1,5732	1,8775
	0,5	1,3971	1,4093	1,4587	1,5209	1,6424	1,9241
	1	1,4755	1,4877	1,5367	1,5974	1,7133	1,9713
	2	1,5977	1,6094	1,6561	1,7128	1,8178	2,0406
	5	1,8095	1,8197	1,8594	1,9060	1,9882	2,1490
CC	0	0,9949	1,0084	1,0621	1,1278	1,2521	1,5340
	0,1	1,0431	1,0565	1,1097	1,1745	1,2962	1,5688
	0,5	1,1989	1,2116	1,2616	1,3218	1,4330	1,6748
	1	1,3314	1,3432	1,3891	1,4439	1,5440	1,7588
	2	1,4888	1,4990	1,5388	1,5860	1,6712	1,8524
	5	1,6888	1,6967	1,7275	1,7637	1,8278	1,9591

Bảng 4. Sự biến thiên $\bar{w}_{NL}$ khi dầm 2D-FG chịu tải trọng $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

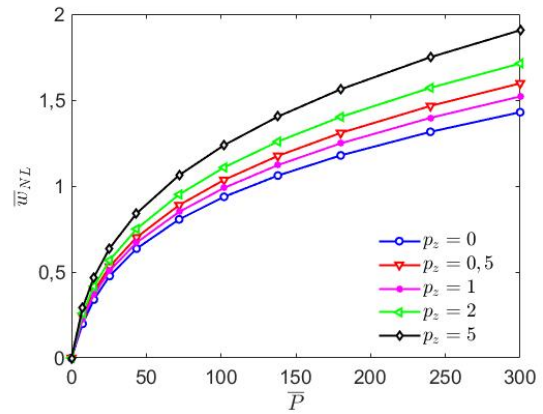
Liên kết	p_z	p_x					
		0	0,1	0,5	1	2	5
SS	0	1,2120	1,2232	1,2692	1,3279	1,4467	1,7429
	0,1	1,2299	1,2413	1,2876	1,3468	1,4654	1,7560
	0,5	1,2990	1,3107	1,3578	1,4171	1,5328	1,8017
	1	1,3751	1,3868	1,4334	1,4911	1,6012	1,8475
	2	1,4921	1,5032	1,5474	1,6011	1,7007	1,9138
	5	1,6911	1,7007	1,7384	1,7827	1,8612	2,0166
CC	0	0,9040	0,9169	0,9680	1,0305	1,1490	1,4184
	0,1	0,9506	0,9634	1,0141	1,0757	1,1917	1,4521
	0,5	1,1018	1,1139	1,1615	1,2187	1,3243	1,5546
	1	1,2301	1,2412	1,2846	1,3365	1,4312	1,6353
	2	1,3803	1,3899	1,4272	1,4716	1,5519	1,7241
	5	1,5665	1,5739	1,6029	1,6371	1,6979	1,8240

Kết quả cho thấy, trong tất cả các trường hợp khảo sát về điều kiện biên và dạng phân bố của tải trọng $q(x)$, khi tăng p_x hoặc p_z đều làm cho $\bar{w}_{NL}$ tăng lên, điều này hoàn toàn phù hợp với các kết quả trong Bảng 3 và Bảng 4, sự lý giải cho điều này cũng hoàn toàn tương tự như đối với các kết quả trong Bảng 3 và Bảng 4. Quan sát các đường cong tải - độ võng ta thấy, với dầm 2D-FG có liên kết SS, tính phi tuyến lớn hơn so với dầm có liên kết CC, nhất là khi $\bar{P}$ thay đổi từ 0 đến 150.

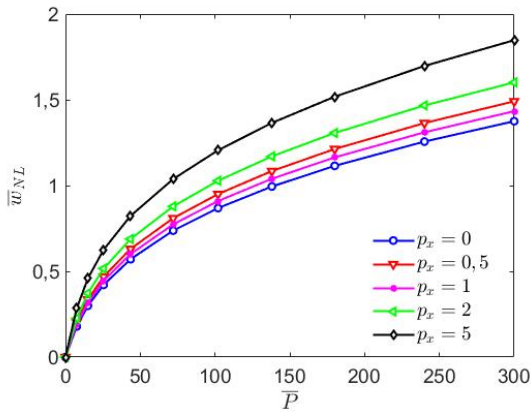
Hình 7 là ảnh hưởng đồng thời của sự thay đổi giá trị của chỉ số mũ quy luật phân bố vật liệu theo hai phương p_x, p_z đến sự biến thiên độ võng tĩnh phi tuyến $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG, tương ứng với hai điều kiện liên kết là SS và CC. Trong đó, các tham số được cố định, bao gồm $\bar{P} = 300, \frac{L}{h} = 20, \bar{K}_W = 10$, quy luật biến thiên của tải trọng $q(x)$ là phân bố đều. Ba trường hợp thay đổi giá trị của tham số hệ số nền $\bar{K}_G$ lần lượt bằng 0; 25 và 100.



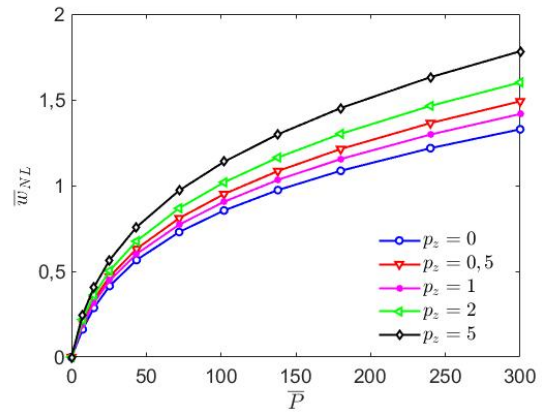
(a) $p_z = 1, q = q_0$



(b) $p_x = 1, q = q_0$



(c) $p_z = 1, q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

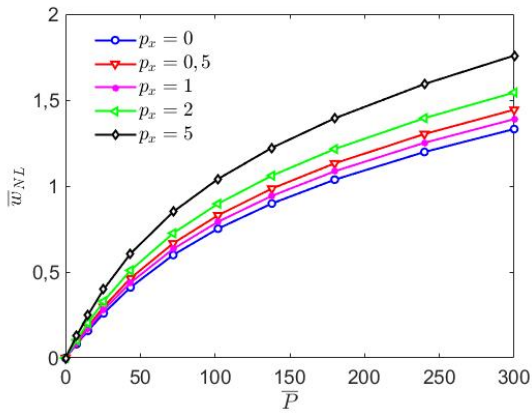


(d) $p_x = 1, q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

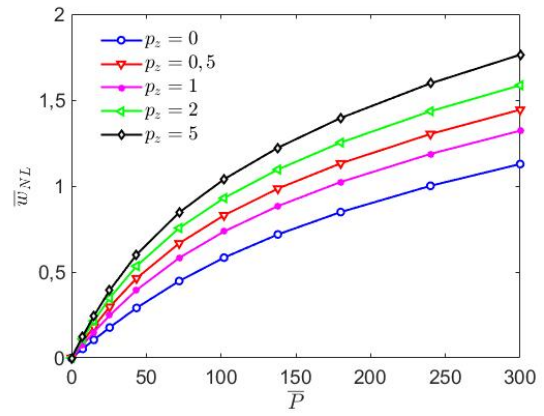
Hình 5. Đường cong tải - độ võng của dầm 2D-FG, liên kết SS

Kết quả cho thấy, trong các trường hợp thay đổi về điều kiện biên và $\bar{K}_G$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ có sự thay đổi nhiều hơn khi p_x, p_z thay đổi trong phạm vi giá trị nhỏ và thay đổi ít hơn khi p_x, p_z thay đổi trong phạm vi giá trị lớn. Cụ thể xét một trường hợp trong Hình 6(a), với $p_x = 0,5$, trong năm khoảng thay đổi giá trị của p_z lần lượt từ 0 đến 5, từ 5 đến 10, từ 10 đến 15 và từ 15 đến 20, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ tăng số phần trăm tương ứng là 29,83; 7,31; 3,48 và 2,05. Điều này hoàn toàn hợp lý, vì theo công thức (1), tỷ phần thể tích V_c và V_m có sự biến thiên lớn hơn khi chỉ số mũ trong phạm vi giá trị nhỏ.

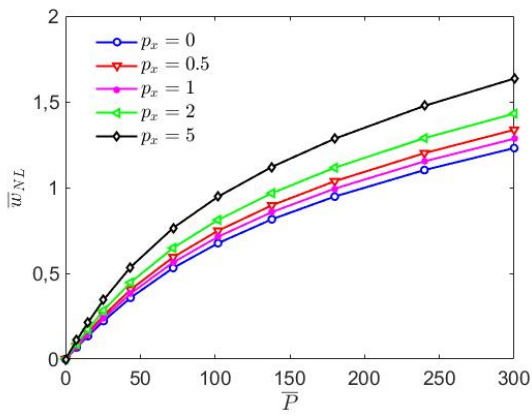
Trong Bảng 5 là sự biến thiên của $\bar{w}_{NL}$ theo sự thay đổi các tham số hệ số nền, $\bar{K}_W$ nhận các giá trị 0; 10 và 100, và $\bar{K}_G$ nhận giá trị 0; 10; 25 và 100. Dầm chịu tải trọng phân bố đều với tham số tải trọng $\bar{P} = 300$. Hai điều kiện liên kết là SS, CC và ba giá trị tỉ lệ giữa chiều dài và chiều dày $\frac{L}{h}$ lần lượt là 5; 10 và 20. Kết quả cho thấy, trong tất cả các trường hợp tính toán, với bất kỳ điều kiện biên và tỉ lệ $\frac{L}{h}$ nào, khi tăng $\bar{K}_W$ và $\bar{K}_G$ giá trị của $\bar{w}_{NL}$ đều giảm. Trong cả ba trường hợp thay đổi tỉ lệ $\frac{L}{h}$, khi tăng $\bar{K}_G$ từ 0 đến 100, giá trị $\bar{w}_{NL}$ giảm khoảng 12,23% đối với dầm có liên kết SS và giảm khoảng 14,50% đối với dầm có liên kết CC.



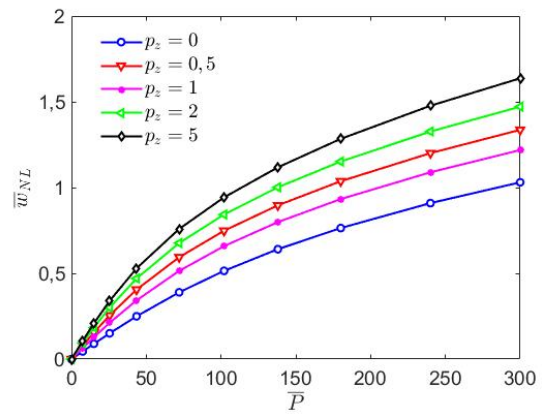
(a) $p_z = 1, q = q_0$



(b) $p_x = 1, q = q_0$

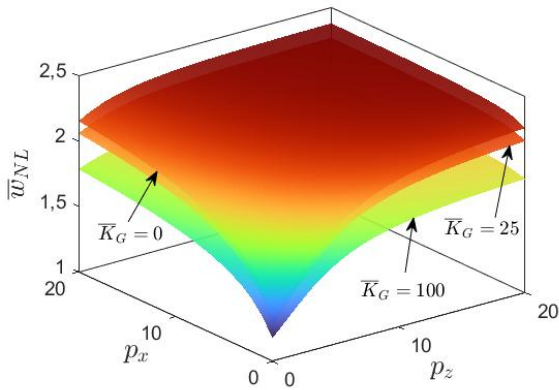


(c) $p_z = 1, q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

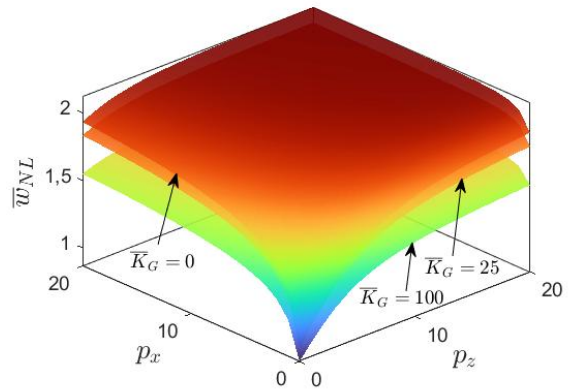


(d) $p_x = 1, q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

Hình 6. Sự biến thiên $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG liên kết CC theo tham số tải trọng $\bar{P}$



(a) SS

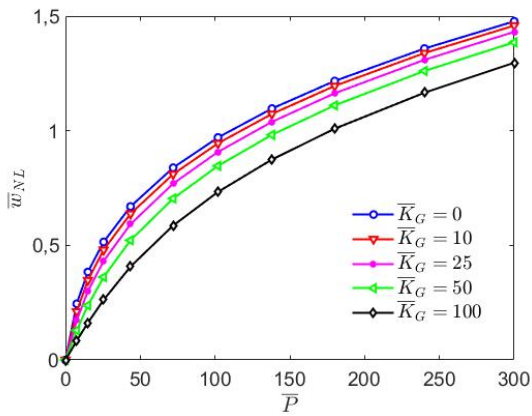


(b) CC

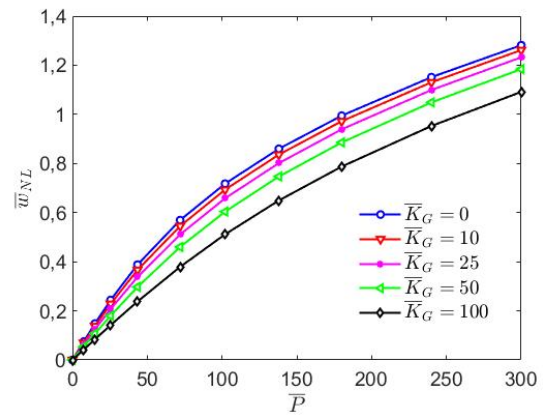
Hình 7. Sự biến thiên $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG theo sự thay đổi của chỉ số mũ p_x, p_z

Bảng 5. Sự biến thiên của $\bar{w}_{NL}$ theo giá trị các tham số hệ số nền $\bar{K}_W$ và $\bar{K}_G$

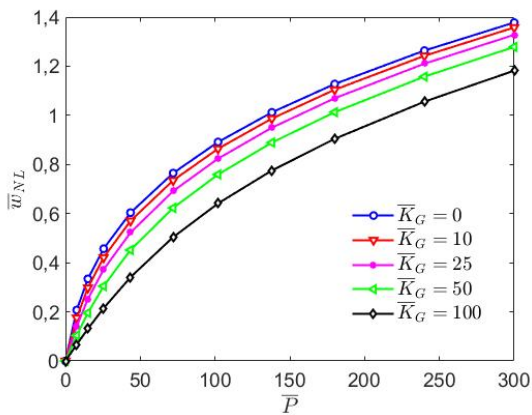
$\bar{K}_W$	$\bar{K}_G$	SS			CC		
		$L = 5h$	$L = 10h$	$L = 20h$	$L = 5h$	$L = 10h$	$L = 20h$
0	0	1,4842	1,4800	1,4790	1,3793	1,3142	1,2831
10	0	1,4823	1,4781	1,4771	1,3775	1,3125	1,2814
	10	1,4639	1,4597	1,4587	1,3577	1,2926	1,2616
	25	1,4364	1,4321	1,4312	1,3284	1,2631	1,2322
	100	1,3015	1,2973	1,2964	1,1866	1,1217	1,0914
100	0	1,4649	1,4609	1,4600	1,3607	1,2965	1,2660
	10	1,4465	1,4425	1,4416	1,3410	1,2768	1,2463
	25	1,4191	1,4151	1,4142	1,3118	1,2474	1,2171
	100	1,2849	1,2810	1,2801	1,1709	1,1070	1,0774



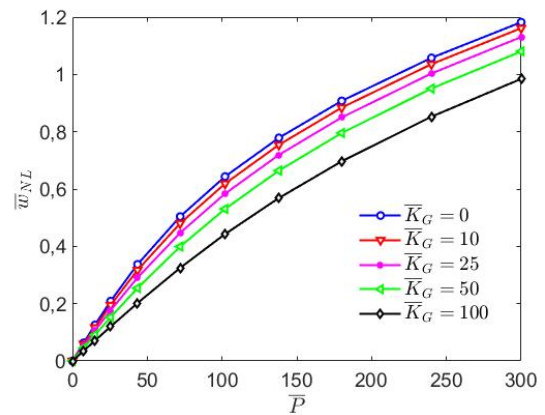
(a) SS, $q(x) = q_0$



(b) CC, $q(x) = q_0$



(c) SS, $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$



(d) CC, $q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

Hình 8. Ảnh hưởng của $\bar{K}_G$ đến đường cong tải - độ võng

Hình 8 là ảnh hưởng của tham số hệ số nền $\bar{K}_G$ đến sự biến thiên độ võng tĩnh phi tuyến $\bar{w}_{NL}$ của dầm 2D-FG theo tham số tải trọng $\bar{P}$. Trong đó, cố định các tham số hệ số nền $\bar{K}_W = 10$ và tỉ lệ giữa chiều dài và chiều cao của dầm là $\frac{L}{h} = 20$, các chỉ số mũ của quy luật phân bố vật liệu $p_x = p_z = 0,5$, tham số $\bar{K}_G$ nhận các giá trị 0; 10; 25; 50 và 100. Hai điều kiện liên kết được khảo sát là SS và CC, hai dạng tải trọng $q(x)$ là phân bố đều và phân bố dạng hình sin. Kết quả cho thấy, khi tăng giá trị của tham số hệ số nền $\bar{K}_G$, giá trị của $\bar{w}_{NL}$ đều giảm xuống trong bất kỳ điều kiện liên kết cũng như dạng tải trọng phân bố nào.

5. Kết luận

Bài báo này đã tính toán độ võng phi tuyến tĩnh cho dầm có cơ tính biến đổi theo hai phương chiều cao và chiều dài, dầm tựa hoàn toàn trên nền đàn hồi, liên kết khớp-khớp, ngàm-ngàm và chịu tải trọng phân bố đều và dạng hàm sin. Phương pháp phần tử hữu hạn với lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, quan hệ biến dạng chuyển vị theo mô hình phi tuyến Von Kármán và mô hình nền đàn hồi hai hệ số đã được sử dụng. Hệ phương trình cân bằng phi tuyến tĩnh của dầm được xây dựng dựa trên nguyên lý thế năng cực tiểu toàn phần và được giải theo thuật toán lặp Newton-Raphson. Độ tin cậy của phương pháp tính toán trong bài báo đã được kiểm chứng, cho thấy sai số nhỏ khi so sánh với các tác giả khác. Kết quả tính toán số cho thấy sự thay đổi cơ tính vật liệu theo cả hai phương chiều dài và chiều cao của dầm có ảnh hưởng đáng kể đến ứng xử tĩnh phi tuyến của dầm 2D-FG, mức độ thay đổi nhiều hơn khi chỉ số mũ thay đổi trong phạm vi giá trị nhỏ, sự ảnh hưởng này không bị chi phối bởi điều kiện liên kết, dạng tải trọng phân bố cũng như hệ số nền đàn hồi. Tĩnh phi tuyến khi dầm có liên kết khớp - khớp thể hiện rõ nét hơn đối với dầm có liên kết ngàm - ngàm, nhất là với giá trị tham số tần số trong phạm vi nhỏ. Một số kết quả số về giá trị độ võng tại chính giữa dầm và đường cong tải - độ võng của dầm 2D-FG với sự thay đổi của các tham số đầu vào đã được tính toán, khảo sát và thảo luận chi tiết.

Tài liệu tham khảo

- [1] Koizumi, M. (1997). [FGM activities in Japan](#). *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2):1-4.
- [2] Jha, D. K., Kant, T., Singh, R. K. (2013). [A critical review of recent research on functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 96:833-849.
- [3] Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Inam, F., Lee, J. (2015). [Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 68:59-74.
- [4] Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Maheri, A., Lee, J. (2014). [Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory](#). *Engineering Structures*, 64:12-22.
- [5] Chinh, N. V., Inh, L. C., Ngoc Anh, L. T. (2019). [Elastostatic bending of a 2D-FGSW beam under nonuniform distributed loads](#). *Vietnam Journal of Science and Technology*, 57(3):381.
- [6] Yarasca, J., Mantari, J. L., Arciniega, R. A. (2016). [Hermite-Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams](#). *Composite Structures*, 140:567-581.
- [7] Phuong, N. T. B., Tu, T. M., Phuong, H. T., Long, N. V. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(1):33-45.
- [8] Tossapanon, P., Wattanasakulpong, N. (2016). [Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation](#). *Composite Structures*, 142:215-225.
- [9] Su, Z., Jin, G., Wang, Y., Ye, X. (2016). [A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations](#). *Acta Mechanica*, 227(5):1493-1514.
- [10] Zhang, D.-G. (2013). [Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 100:121-126.

- [11] Nguyen, D. K., Nguyen, K. V., Dinh, V. M., Gan, B. S., Alexandrov, S. (2018). [Nonlinear bending of elastoplastic functionally graded ceramic-metal beams subjected to nonuniform distributed loads](#). *Applied Mathematics and Computation*, 333:443–459.
- [12] Srikarun, B., Songsuwan, W., Wattanasakulpong, N. (2021). [Linear and nonlinear static bending of sandwich beams with functionally graded porous core under different distributed loads](#). *Composite Structures*, 276:114538.
- [13] Nguyen, D. K. (2013). [Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material](#). *Composites Part B: Engineering*, 55:298–305.
- [14] Nguyen, D. K. (2014). [Large displacement behaviour of tapered cantilever Euler–Bernoulli beams made of functionally graded material](#). *Applied Mathematics and Computation*, 237:340–355.
- [15] Hung, T. Q., Tu, T. M., Duc, D. M. (2023). [Geometrically nonlinear bending mesh-free analysis of functionally graded porous sandwich beam](#). *Journal of Science and Technology Issue on Information and Communications Technology*, 16–21.
- [16] Karamanlı, A. (2017). [Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 174:70–86.
- [17] Şimşek, M. (2016). [Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material \(2D-FGM\) having different boundary conditions](#). *Composite Structures*, 149:304–314.
- [18] Le, C. I., Le, N. A. T., Nguyen, D. K. (2021). [Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich beams using an enriched third-order shear deformation beam element](#). *Composite Structures*, 261:113309.
- [19] Le, I. C. (2020). [Free vibration of bfgsw beams partially resting on pasternak foundation based on a sinusoidal theory](#). *Vietnam Journal of Science and Technology*, 58(5):635.
- [20] Le, C. I., Nguyen, D. K. (2023). [Nonlinear vibration of three-phase bidirectional functionally graded sandwich beams with influence of homogenization scheme and partial foundation support](#). *Composite Structures*, 307:116649.
- [21] Shimpi, R. P., Patel, H. G. (2006). [Free vibrations of plate using two variable refined plate theory](#). *Journal of Sound and Vibration*, 296(4–5):979–999.
- [22] Reddy, J. N. (2015). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. Oxford University Press.