

# PHÂN TÍCH TĨNH DẦM CONG SANDWICH FGM XÓP ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI WINKLER/PASTERNAK/KERR

Vũ Văn Thâm<sup>a,\*</sup>, Vũ Minh Ngọc<sup>a</sup>, Phạm Trọng Khôi<sup>a</sup>, Nguyễn Thế An<sup>a</sup>,  
Đỗ Trọng Thắng<sup>a</sup>, Nguyễn Hữu Bằng<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 19/11/2023, Sửa xong 04/12/2023, Chấp nhận đăng 14/12/2023

## Tóm tắt

Bài báo phân tích tĩnh dầm sandwich với lớp lõi bằng vật liệu xốp (porous), hai lớp bề mặt là vật liệu FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng của lớp lõi được xem xét bao gồm: phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng. Hai lớp bề mặt có cơ tính được giả thiết biến thiên tuân theo quy luật lũy thừa. Các phương trình cân bằng của dầm được thiết lập theo nguyên lý Hamilton, trên cơ sở lý thuyết dầm bậc cao bốn ẩn chuyển vị có xét đến độ cong theo phương chiều cao dầm. Nghiệm giải tích cho bài toán phân tích tĩnh được xây dựng bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier. Độ tin cậy của mô hình và chương trình tính được kiểm chứng qua các so sánh kết quả nhận được với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số thực hiện nhằm đánh giá sự ảnh hưởng của các tham số kích thước hình học, đặc trưng vật liệu, nền đàn hồi đến độ võng và ứng suất của kết cấu dầm cong sandwich.

*Từ khoá:* phân tích tĩnh; dầm cong sandwich; vật liệu FGM; vật liệu xốp; nền đàn hồi.

STATIC ANALYSIS OF SANDWICH CURVED FG POROUS BEAMS RESTING ON WINKLER/PASTERNAK/KERR FOUNDATION

## Abstract

The article analyzes the static behavior of sandwich beams with a porous core and two surface layers made of Functionally Graded Material (FGM) resting on a Winkler/Pasternak/Kerr elastic foundation. Three types of pore distribution in the core are considered: uniform, symmetric non-uniform, and asymmetric non-uniform distributions. The FGM surface layers are assumed to have variable properties that follow power laws. Based on the high-order four-variable displacement theory, taking into account the curvature along the height direction of the beam, the equilibrium equations of the beam are derived by using the Hamilton's principle. Applying the Navier technique, the analytical solutions are obtained. The reliability of the computational model and the Matlab's code is verified through comparative examples with published results. Numerical investigations are carried out to evaluate the influence of geometrical, material, and elastic foundation parameters on the overall deflection and stress of the curved sandwich beam.

*Keywords:* static analysis; sandwich curved beams; FGM; porous material; elastic foundations.

© 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally graded materials - FGM) được các nhà khoa học vật liệu Nhật Bản phát kiến vào năm 1984 như là một loại vật liệu cách nhiệt [1] và được sử dụng nhiều trong các ngành công nghiệp vũ trụ, công nghiệp hàng không, công nghiệp năng lượng. Một cách khái quát có thể định nghĩa FGM là loại vật liệu composite tiên tiến, cấu thành từ hai hoặc nhiều hơn hai pha vật liệu thành phần cơ tính biến đổi trơn và liên tục theo một hoặc nhiều phương [2, 3]. FGM kết

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [thamvv@huce.edu.vn](mailto:thamvv@huce.edu.vn) (Thâm, V. V.)

hợp được những ưu điểm của các vật liệu thành phần, như khả năng chịu nhiệt, chống ăn mòn của gốm (ceramic) cùng với độ bền của kim loại (metal), tạo ra những đặc tính vượt trội so với vật liệu thuần nhất. Một trong những phát triển mới của vật liệu FGM là vật liệu xốp (porous material - FGP). Ở loại vật liệu này, các lỗ rỗng phân bố theo một quy luật nhất định trong kết cấu tạo nên sự thay đổi trơn và liên tục các đặc trưng cơ học của vật liệu. Vật liệu xốp có trọng lượng nhẹ, khả năng hấp thụ năng lượng tốt, đồng thời có tính cách âm và cách nhiệt tốt.

Kết cấu sandwich đã được ứng dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp hàng không, công nghiệp ô tô, xây dựng dân dụng. Kết cấu sandwich bao gồm ba phần chính: hai lớp bề mặt mỏng làm từ vật liệu có độ cứng cao, chủ yếu chịu uốn; lớp lõi dày làm từ vật liệu xốp chủ yếu chịu lực cắt và có khả năng khuếch tán năng lượng, cách âm, cách nhiệt. Trong những năm gần đây, các bài toán về phân tích tĩnh và động của dầm sandwich đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Nguyen và cs. [4] đã phân tích ổn định và dao động riêng của dầm sandwich FGM với các điều kiện biên khác nhau bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết tựa 3D (quasi-3D). Nguyen và Nguyen [5] đã đề xuất một lý thuyết biến dạng cắt hypebol mới để phân tích uốn, ổn định và dao động tự do của dầm sandwich FGM có lớp lõi cứng và lõi mềm đẳng hướng. Mu và Zhao [6] đã phát triển một mô hình giải tích để phân tích tần số cơ bản của dầm sandwich với các lớp bề mặt FGM, lớp lõi vật liệu xốp bằng cách sử dụng lý thuyết dầm cổ điển (CBT). Trường và cs. [7] đã phân tích dao động riêng dầm sandwich FGM xốp với điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Ritz. Osofero và cs. [8] đã phát triển lý thuyết biến dạng cắt tựa 3D để phân tích ứng xử uốn của dầm sandwich FGM điều kiện biên tựa khớp. Su và cs. [9] đã nghiên cứu dao động tự do của dầm sandwich FGM với các điều kiện biên khác nhau đặt trên nền đàn hồi Pasternak theo lý thuyết dầm bậc nhất (FSDT). Nirmala và cs. [10] đã phát triển các biểu thức phân tích ứng suất đàn hồi nhiệt trong dầm sandwich FGM. Zenkour và cs. [11] đã phân tích uốn dầm sandwich FGM, biên hai đầu tựa khớp đặt trên nền đàn hồi Pasternak bằng cách sử dụng các lý thuyết dầm bậc cao (HSDT) khác nhau. Sayyad và Ghugal [12] đã sử dụng lý thuyết bậc cao để phân tích uốn dầm cong sandwich FGM với lớp lõi là vật liệu đẳng hướng.

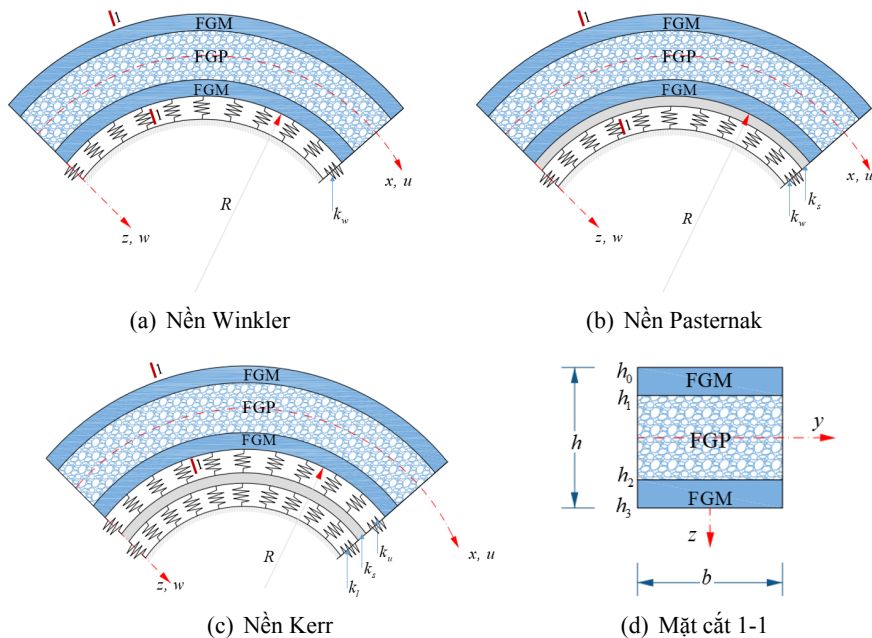
Trong thực tế nhất là ngành xây dựng hoặc cầu đường ta sẽ gặp loại kết cấu là các dầm đặt trên một môi trường đàn hồi như dầm móng đặt trên nền đất, phà chuyên tải nằm trên mặt nước hay các tà vẹt đặt trên nền đất đá. Các bài toán này thuộc dạng bài siêu tĩnh đặc biệt, việc xác định chuyển vị, ứng suất, nội lực của dầm phụ thuộc vào quan niệm và mô hình nền được giả thiết. Mô hình nền Winkler [13] là mô hình nền cơ học đơn giản nhất và đã được áp dụng rộng rãi trong nghiên cứu bài toán dầm trên nền đàn hồi. Trong mô hình Winkler, một bộ bao gồm nhiều lò xo độc lập được gắn dọc theo dầm để tạo thành hệ móng dầm. Loại mô hình nền này thường được gọi là mô hình nền “một tham số” vì nó chỉ được đặc trưng bởi độ cứng thẳng đứng của lò xo nền Winkler. Mặc dù đơn giản, thuận lợi trong tính toán nhưng mô hình nền Winkler có hạn chế là sự không liên tục trong chuyển vị nền do giả thiết các lò xo làm việc độc lập. Ngoài ra, việc tách rời các lò xo theo mô hình Winkler dẫn đến việc bỏ qua sự tồn tại của nền bên ngoài phía hai đầu của dầm chịu tải và dẫn đến sự thay đổi đột ngột không thực tế trong chuyển vị bề mặt móng giữa vùng chịu tải và không tải. Để khắc phục nhược điểm của mô hình nền một tham số, một số nhà nghiên cứu [14–16] đã cải tiến mô hình nền Winkler bằng cách đưa vào tham số nền thứ hai để giải thích cho sự tồn tại của lớp trượt bên trong môi trường nền, gọi là mô hình nền “hai tham số”. Trong các mô hình nền hai tham số này thì mô hình nền Pasternak [16] được sử dụng nhiều hơn cả. Tiếp sau mô hình nền hai tham số, Hetenyi [17] và Kerr [18, 19] đã thêm tham số nền thứ ba (mô hình nền ba tham số). Vai trò chính của tham số móng thứ ba là cung cấp tính linh hoạt cao hơn trong việc kiểm soát mức độ liên tục của bề mặt nền giữa các vùng chịu tải và không tải của nền dưới dầm. Điều này phù hợp với quan sát của Foppl [20] rằng chuyển vị

bề mặt nền bên ngoài vùng chịu tải được dự đoán bởi mô hình liên tục giảm quá chậm so với những gì xảy ra trong thực tế, và do đó tồn tại một ranh giới gián đoạn (không liên tục) nhất định ở vùng chịu tải và không chịu tải. Trong số các mô hình nền ba tham số, mô hình nền kiểu Kerr [18, 19] được đặc biệt quan tâm vì nó bắt nguồn từ mô hình nền hai tham số Winkler - Pasternak phổ biến [16] đã có. Cấu tạo nền Kerr được mô hình bao gồm một lớp lò xo bên dưới và một lớp lò xo bên trên kẹp giữa là một lớp chịu cắt không nén được. Các tham số đặc trưng cho mô hình nền Kerr là độ cứng của các lò xo phía trên (hệ số nền của lớp nền đàn hồi phía trên), dưới (hệ số nền của lớp nền đàn hồi phía dưới) và độ cứng của lớp giữa chịu cắt (hệ số nền của lớp giữa chịu cắt). Một số ít các nghiên cứu đã công bố về dầm cong đặt trên nền đàn hồi có thể kể đến Quoc-Hoa Pham và cs.[21] đã nghiên cứu dao động nhiệt, ẩm của dầm cong FGM hai chiều có chứa các lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi Pasternak bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Hong [22] đã lựa chọn tiếp cận giải tích để nghiên cứu ứng xử cơ học của dầm cong hai lớp FGM đặt trên nền đàn hồi Pasternak theo lý thuyết dầm Timoshenko cải tiến.

Qua tổng quan nghiên cứu có thể thấy rằng nhu cầu ứng dụng vào thực tiễn của vật liệu FGM, vật liệu xốp là rất lớn vì vậy các kết cấu làm từ hai loại vật liệu này đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Đã có khá nhiều bài báo về phân tích tĩnh, động và ổn định của dầm thẳng sandwich theo các lý thuyết khác nhau. Tuy nhiên, nghiên cứu tuyến tính về phân tích tĩnh dầm cong sandwich có lớp lõi là vật liệu xốp, lớp bề mặt FGM (sandwich FGM xốp) đặt trên nền đàn hồi ba hệ số đến nay đang còn hạn chế. Trong bài báo này, lý thuyết dầm bậc cao bốn ẩn chuyên vị có xét đến ảnh hưởng của độ cong theo phương chiều cao dầm được sử dụng để phân tích tĩnh dầm sandwich FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. So sánh kết quả của bài báo với các kết quả đã công bố cho thấy độ tin cậy của mô hình đề xuất. Từ đó, bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu, kích thước hình học, nền đàn hồi đến độ võng và ứng suất của kết cấu dầm sandwich FGM xốp.

## 2. Mô hình dầm cong sandwich FGM xốp đặt trên nền đàn hồi

### 2.1. Mô hình dầm



Hình 1. Dầm sandwich FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr

Xét dầm cong sandwich FGM xấp đặt trên nền đàn hồi như thể hiện trên Hình 1. Dầm có chiều dài  $L$ , mặt cắt ngang chữ nhật  $b \times h$ , bán kính cong theo chiều cao dầm  $R$ . Các biến thiên của biến chiều dài  $x$ , chiều rộng  $y$  và chiều cao  $z$  trong hệ tọa độ Descartes lần lượt được xác định theo:  $0 \leq x \leq L$ ;  $-b/2 \leq y \leq b/2$ ;  $-h/2 \leq z \leq h/2$ . Trục  $z$  được giả định hướng xuống.

## 2.2. Lớp vật liệu bề mặt – FGM

Vật liệu FGM cho các lớp bề mặt được xem xét trong nghiên cứu này là vật liệu P-FGM. Mô đun đàn hồi  $E(z)$  biến thiên theo chiều dày mỗi lớp được xác định theo [12]:

$$E(z) = E_{m_1} + (E_{m_2} - E_{m_1}) V(z) \quad (1)$$

trong đó  $V(z)$  là hàm thể tích cho dầm cong sandwich xấp – FGM:

$$\text{Lớp 1 (FGM mặt trên dầm): } V_t(z) = ((z - h_0) / (h_1 - h_0))^p \quad \text{với } z \in [h_0, h_1] \quad (2)$$

$$\text{Lớp 2 (FGP): } E(z) \text{ tính theo các công thức (5) } \div \text{ (11)} \quad \text{với } z \in [h_1, h_2] \quad (3)$$

$$\text{Lớp 3 (FGM mặt dưới dầm): } V_b(z) = ((z - h_3) / (h_2 - h_3))^p \quad \text{với } z \in [h_2, h_3] \quad (4)$$

với  $E_{m_1}$  và  $E_{m_2}$  là các mô đun đàn hồi của kim loại và gốm cấu thành nên vật liệu FGM; “ $p$ ” là chỉ số tỷ lệ thể tích của vật liệu FGM.

## 2.3. Lớp vật liệu lõi – xốp

Lớp lõi là vật liệu xốp (FGP) được xem xét trong nghiên cứu này là bọt kim loại (metal foam) với ba quy luật phân bố: Phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng. Mô đun đàn hồi kéo – nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng của vật liệu FGP phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng, và biến thiên liên tục theo chiều cao dầm, đã được đề cập đến theo các quy luật sau [23]:

Phân bố đều (PBD)

$$E(z) = E_1 (1 - e_0 \chi) \quad \text{với } \chi = 1/e_0 - (1/e_0) \left( (2/\pi) \sqrt{1 - e_0} - 2/\pi + 1 \right)^2 \quad (5)$$

$$G(z) = G_1 (1 - e_0 \chi) \quad (6)$$

Phân bố không đều – đối xứng (KD-ĐX)

$$E(z) = E_1 (1 - e_0 \cos(\pi z/h)) \quad \text{với } e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1 \quad (0 < e_0 < 1) \quad (7)$$

$$G(z) = G_1 (1 - e_0 \cos(\pi z/h)) \quad (8)$$

Phân bố không đều – bất đối xứng (KD-BĐX)

$$E(z) = E_1 (1 - e_0 \cos(\pi(z/h + 1/4))) \quad (9)$$

$$G(z) = G_1 (1 - e_0 \cos(\pi(z/h + 1/4))) \quad (10)$$

trong đó các hệ số mật độ lỗ rỗng được tính theo công thức:

$$e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1 \quad \text{với } e_0 \in (0, 1) \quad (11)$$

với  $E_1$  là giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo – nén;  $G_1$  là giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi trượt;  $E_2$  là giá trị nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo – nén;  $G_2$  là Giá trị nhỏ nhất của mô đun đàn hồi trượt. Trong báo cáo này, hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ  $z$ .

### 3. Công thức lý thuyết

Để phân tích dao động riêng của dầm cong sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi, bài báo sử dụng lý thuyết dầm bậc cao bốn ẩn chuyển vị có xét đến ảnh hưởng của độ cong theo phương chiều cao dầm.

#### 3.1. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc dầm được giả thiết [12]:

$$u(x, z) = (1 + z/R) u_0(x) - z w_{0,x} + f(z) \phi_x(x) \quad (12)$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g(z) \phi_z(x) \quad (13)$$

trong đó  $u, w$  lần lượt là chuyển vị của điểm bất kỳ thuộc dầm theo phương trục  $x, z$ ,  $u_0, w_0$  là các chuyển vị của điểm bất kỳ trên trục trung hòa của dầm cong theo các phương trục  $x, z$ ;  $R$  là bán kính cong theo phương chiều cao dầm;  $\phi_x$  là góc xoay của mặt cắt ngang dầm tại trục trung hòa và  $\phi_z$  là một ẩn số cần tìm liên quan đến chuyển vị ngang. Hàm  $f(z)$  được giả định theo sự biến thiên của ứng suất cắt ngang trên chiều cao của dầm. Theo [24] hàm  $f(z) = \frac{5z}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$  thỏa mãn điều kiện triệt tiêu ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới dầm.

#### 3.2. Trường biến dạng

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\varepsilon_x = u_{0,x} - z w_{0,xx} + f(z) \phi_{x,x} + w_0/R + (\phi_z/R) g(z) \text{ với } g(z) = \partial(f(z))/\partial z \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = (\partial g(z)/\partial z) \phi_z \quad (15)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) (\phi_x + \phi_{z,x}) \quad (16)$$

#### 3.3. Trường ứng suất

Trường ứng suất được xác định từ quan hệ giữa ứng suất và biến dạng theo định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

trong đó  $\sigma_x, \sigma_z$  lần lượt là ứng suất pháp theo phương dọc trục và phương chiều cao dầm;  $\tau_{xz}$  là ứng suất cắt ngang (ứng suất tiếp theo phương chiều cao);  $C_{ij}$  là các hệ số đàn hồi được xác định như sau (hệ số Poisson giả thiết là hằng số):

$$C_{11}(z) = C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1 - \mu^2} \quad (18)$$

$$C_{12}(z) = \frac{\mu E(z)}{1 - \mu^2} \quad (19)$$

$$C_{33}(z) = \frac{E(z)}{2(1 - \mu)} \quad (20)$$

### 3.4. Phương trình cân bằng

Hệ phương trình cân bằng của lý thuyết dầm cong bậc cao bốn ẩn chuyển vị đặt trên nền đàn hồi được xác định bằng cách sử dụng nguyên lý Hamilton [25]:

$$\int_{\Omega} (\delta U + \delta U_f - \delta V) d\Omega = 0 \quad (21)$$

trong đó:  $\delta U$ ,  $\delta U_f$  và  $\delta V$  lần lượt là biến phân thế năng biến dạng dầm hồi của dầm, biến phân thế năng của phản lực nền và biến phân công ngoại lực.

Biến phân thế năng biến dạng dầm hồi của dầm được xác định theo:

$$\begin{aligned} \delta U &= b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^k \delta \varepsilon_x + \sigma_z^k \delta \varepsilon_z + \tau_{xz}^k \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left( N_x \delta u_{0,x} - M_x^C \delta w_{0,xx} + M_x^S \delta \phi_{x,x} + N_x \delta w_0 / R \right. \\ &\quad \left. + Q_z \delta \phi_z / R + Q_{zz} \delta \phi_z + V_z \delta \phi_x + V_z \delta \phi_{z,x} \right) dx \end{aligned} \quad (22)$$

Biến phân thế năng của phản lực nền Winkler/Pasternak/Kerr:

$$\delta U_f = \int_0^L f_e \delta w dx \quad \text{với } f_e \text{ là phản lực của nền đàn hồi} \quad (23)$$

Công thức xác định phản lực nền  $f_e$  như sau [26]:

$$f_e = f_W(\text{Winkler}) = k_w w \quad (24)$$

$$f_e = f_P(\text{Pasternak}) = k_w w - G_p w_{,xx} \quad (25)$$

$$f_e = f_{Kerr}(\text{Kerr}) = \frac{k_l k_u}{k_l + k_u} w - \frac{k_s k_u}{k_l + k_u} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (26)$$

với  $k_w$  là hệ số độ cứng uốn của nền đàn hồi Winkler/Pasternak;  $G_p$  là hệ số độ cứng cắt của nền đàn hồi Pasternak;  $k_l, k_s, k_u$ , lần lượt là hệ số độ cứng uốn của nền đàn hồi trên, hệ số độ cứng cắt và hệ số độ cứng uốn của nền đàn hồi dưới trong mô hình nền Kerr.

Biến phân công của tải trọng uốn:

$$\delta V = \int_0^L q(x) \delta w dx \quad (27)$$

trong đó  $N_x, M_x^C, M_x^S, Q_z, Q_{zz}, V_z$  là lực dọc, mô men uốn, mô men uốn do ảnh hưởng lực cắt, lực cắt và các lực cắt bậc cao. Biểu thức cuối cùng cho các thành phần nội lực này thu được sau khi tích phân ứng suất theo chiều dày của dầm cong được kết quả như sau:

$$N_x = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + B_{11}^S \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{11} \frac{w_0}{R} + D_{11} \frac{\phi_z}{R} + E_{11} \phi_z \quad (28)$$

$$M_x^C = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + F_{11}^S \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{11} \frac{w_0}{R} + D_{11}^S \frac{\phi_z}{R} + E_{12}^S \phi_z \quad (29)$$

$$M_x^S = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x f(z) dz = B_{11}^S \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{11}^S \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + G_{11}^S \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{11}^S \frac{w_0}{R} + H_{11}^S \frac{\phi_z}{R} + J_{12}^S \phi_z \quad (30)$$

$$Q_z = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x g(z) dz = D_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11}^S \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + H_{11}^S \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{11} \frac{w_0}{R} + K_{11}^S \frac{\phi_z}{R} + L_{12}^S \phi_z \quad (31)$$

$$Q_{zz} = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{dg(z)}{dz} dz = E_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - E_{12}^S \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + J_{12}^S \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + E_{12} \frac{w_0}{R} + L_{12}^S \frac{\phi_z}{R} + L_{22}^S \phi_z \quad (32)$$

$$V_z = b \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} (\partial f(z)/\partial z) dz = K_{33}^S (\phi_x + \phi_{z,x}) \quad (33)$$

với các hệ số độ cứng trong các biểu thức nội lực được xác định theo:

$$\begin{aligned} A_{11} &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) dz, B_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) z dz, F_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) z^2 dz \\ F_{11}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) z f(z) dz, B_{11}^S = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) f(z) dz, D_{11} = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) g(z) dz \\ D_{11}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) z g(z) dz, E_{12} = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{12}(z) (\partial g(z)/\partial z) dz, \\ E_{12}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{12}(z) z (\partial g(z)/\partial z) dz, G_{11}^S = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) [f(z)]^2 dz \\ H_{11}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) f(z) g(z) dz, J_{12}^S = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{12}(z) f(z) (\partial g(z)/\partial z) dz \\ E_{12}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{12}(z) z (\partial g(z)/\partial z) dz, L_{12}^S = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{12}(z) g(z) (\partial g(z)/\partial z) dz \\ L_{22}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{22}(z) (\partial g(z)/\partial z)^2 dz, K_{11}^S = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(z) [g(z)]^2 dz \\ K_{33}^S &= b \int_{-h/2}^{h/2} C_{33}(z) [g(z)]^2 dz \end{aligned} \quad (34)$$

Thay thế các biến phân  $\delta U$  và  $\delta V$  được xác định từ các biểu thức (22) đến (33) vào phương trình (21) và thực hiện các phép biến đổi biến phân, sau đó đồng nhất hệ số các biến phân  $\delta u_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_z$  ta thu được hệ các phương trình cân bằng của lý thuyết dầm cong bậc cao bốn ẩn chuyển vị:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = 0 \quad (35)$$

$$\delta w_0 : M_{x,xx}^c - N_x/R + q(x) - f_e = 0 \quad (36)$$

$$\delta \phi_x : M_{x,xx}^S - V_z = 0 \quad (37)$$

$$\delta \phi_z : V_{z,x} - Q_{zz} - Q_z/R = 0 \quad (38)$$

Các phương trình cân bằng (35) ÷ (38) được sử dụng để phân tích uốn dầm cong sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr.

### 3.5. Lời giải giải tích – nghiệm Navier

Trong nghiên cứu này, ứng xử tĩnh của dầm cong sandwich FGM xếp hai đầu khớp được phân tích bằng cách sử dụng lời giải Navier với điều kiện biên khớp tại hai đầu dầm thỏa mãn:

$$w_0 = N_x = M_x^c = M_x^s = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (39)$$

Theo Navier, các biến chưa biết trong trường chuyển vị được khai triển ở dạng chuỗi lượng giác thỏa mãn điều kiện biên hai đầu dầm tựa khớp.

$$u_0 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} u_m \cos(\alpha x) \quad (40)$$

$$w_0 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} w_m \sin(\alpha x) \quad (41)$$

$$\phi_x = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \phi_{xm} \cos(\alpha x) \quad (42)$$

$$\phi_z = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \phi_{zm} \sin(\alpha x) \quad (43)$$

trong đó  $\alpha = m\pi/L$  và  $u_m, w_m, \phi_{xm}, \phi_{zm}$  là các hệ số chưa biết cần xác định. Tải trọng phân bố đều  $q$  tác dụng lên mặt trên của dầm cũng được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$q(x) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{4q_0}{m\pi} \sin(\alpha x) \quad (44)$$

với  $q_0$  là cường độ cực đại của tải trọng và  $m$  là các số lẻ nguyên dương ( $m = 1, 3, 5, \dots, \infty$ ).

Thay các biểu thức chuyển vị và tải trọng từ (40) ÷ (44) và (28) ÷ (34) vào (35) ÷ (38) ta được hệ phương trình cân bằng viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ w_m \\ \phi_{xm} \\ \phi_{zm} \end{Bmatrix} = \frac{4}{m\pi} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ hay } [S] \{\Delta\} = \{F\} \quad (45)$$

trong đó các phần tử của ma trận độ cứng  $[S]$ , vector chuyển vị  $\{\Delta\}$  và vector lực  $\{F\}$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned} S_{11} &= -A_{11}\alpha^2, S_{12} = \left( B_{11}\alpha^3 + \frac{A_{11}}{R}\alpha \right), S_{13} = -B_{11}^s\alpha^2, S_{14} = \left( \frac{D_{11}}{R} + E_{12} \right)\alpha, \\ S_{23} &= \left( F_{11}^s\alpha^3 + \frac{B_{11}^s}{R}\alpha \right), S_{24} = \left( -E_{12}^s\alpha^2 - \frac{D_{11}^s}{R}\alpha^2 - \frac{D_{11}}{R^2} - \frac{E_{12}}{R} \right), S_{34} = \left( \frac{H_{11}^s}{R} + J_{12}^s - K_{33}^s \right)\alpha, \\ S_{44} &= \left( K_{33}^s\alpha^2 - \frac{K_{11}^s}{R^2} - \frac{2L_{12}^s}{R} - L_{22}^s \right), S_{21} = S_{12}, S_{31} = S_{13}, S_{32} = S_{23}, S_{41} = S_{14}, S_{42} = S_{24}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$S_{43} = S_{34}, \quad \{\Delta\} = \{u_m, w_m, \phi_{xm}, \phi_{zm}\}^T, \quad \{F\} = \left\{ 0, \frac{4q_0}{m\pi}, 0, 0 \right\}^T$$

- Nền Winkler:

$$S_{22} = \left( -F_{11}\alpha^4 - \frac{2B_{11}}{R}\alpha^2 - \frac{A_{11}}{R^2} - k_w \right) \quad (47)$$

- Nền Pasternak:

$$S_{22} = \left( -F_{11}\alpha^4 + \left( G_p - \frac{2B_{11}}{R} \right)\alpha^2 - \frac{A_{11}}{R^2} - k_w \right) \quad (48)$$

- Nền Kerr:

$$S_{22} = \left( -F_{11}\alpha^4 - \left( \frac{k_s k_u}{k_l + k_u} + \frac{2B_{11}}{R} \right)\alpha^2 - \frac{A_{11}}{R^2} - \frac{k_l k_u}{k_l + k_u} \right) \quad (49)$$

Từ phương trình (45), ta có thể xác định các hệ số chưa biết  $u_m, w_m, \phi_{xm}, \phi_{zm}$ . Các hệ số này được sử dụng để xác định các đại lượng cần tìm  $u_0, w_0, \phi_x, \phi_z$ , là chuyển vị, biến dạng và ứng suất của dầm cong sandwich FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr.



#### 4. Kết quả số và thảo luận

##### 4.1. Các ví dụ kiểm chứng

Do các công bố hiện tại về phân tích tĩnh dầm cong sandwich xốp – FGM đang còn rất hạn chế nên bài báo thực hiện hai ví dụ so sánh để kiểm chứng độ chính xác của mô hình hiện tại so với các trường hợp riêng đã công bố. Ví dụ thứ nhất là kiểm chứng kết quả độ võng, ứng suất của dầm cong sandwich có lớp lõi đẳng hướng, hai lớp bề mặt là vật liệu FGM. Ví dụ thứ hai thực hiện nhằm kiểm chứng độ võng cho dầm thẳng bằng vật liệu đẳng hướng đặt trên nền đàn hồi.

##### a. Kiểm chứng độ võng, ứng suất cho dầm cong sandwich FGM, lõi đẳng hướng

Tính toán độ võng, ứng suất của dầm cong sandwich với lớp lõi là vật liệu đẳng hướng, lớp bề mặt là vật liệu FGM có tọa độ các lớp theo chiều dày là:  $h_0 = h/2$ ,  $h_1 = h/6$ ,  $h_2 = h/6$ ,  $h_3 = h/2$ . Các thuộc tính vật liệu:

+ Gốm (ceramic)  $Al_2O_3$  có:  $E_c = 380$  GPa,  $\mu = 0,3$ .

+ Kim loại (metal) Al có:  $E_m = 70$  GPa,  $\mu = 0,3$ .

Kết quả độ võng, ứng suất được trình bày dưới dạng không thứ nguyên. Các công thức không thứ nguyên được lấy theo nghiên cứu của các tác giả Sayyad và Ghugal [12]:

$$\bar{w}\left(x = \frac{L}{2}, z = 0\right) = \frac{100wE_mbh^3}{q_0L^4}, \bar{\sigma}_x = \left(\frac{L}{2}, -\frac{h}{2}\right) = \frac{\sigma_xbh}{q_0L}, \bar{\tau}_{xz}(0, 0) = \frac{\tau_{xz}bh}{q_0L} \quad (50)$$

Bảng 1. So sánh độ võng, ứng suất của dầm cong sandwich có lõi là vật liệu đẳng hướng và hai lớp bề mặt là vật liệu FGM (tỷ số  $R/L = 5$ )

$L/h$	$p$								
	0		1		5		10		
	Bài báo	[12]	Bài báo	[12]	Bài báo	[12]	Bài báo	[12]	
$\bar{w}$	5	3,1026	3,1294	6,1341	6,1913	10,9793	11,0770	12,2900	12,3960
	10	2,9338	2,9337	5,9706	5,9706	10,8508	10,8470	12,1686	12,1620
$\bar{\sigma}_x$	5	3,7934	3,8221	1,4299	1,4449	2,6018	2,6274	2,9175	2,9432
	10	7,5177	7,5665	2,8437	2,8708	5,1895	5,2363	5,8223	5,8687
$\bar{\tau}_{xz}$	5	0,7232	0,7431	0,8443	0,8623	0,9931	1,0010	1,0457	1,0487
	10	0,7365	0,7561	0,8585	0,8754	1,0105	1,0170	1,0642	1,0658

Bảng 1 thể hiện kết quả của bài báo tính toán độ võng, ứng suất của dầm cong sandwich có lõi là vật liệu đẳng hướng và hai lớp bề mặt là vật liệu FGM. Kết quả được so sánh với nghiên cứu của tác giả Sayyad và Ghugal [12] tính toán theo phương pháp giải tích sử dụng lý thuyết dầm bậc cao với hàm mô tả ứng suất cắt ngang dạng hình sin và có kể đến biến dạng theo phương chiều cao dầm. Có thể thấy sai lệch giữa kết quả của đề tài và tài liệu kiểm chứng là không đáng kể.

##### b. Kiểm chứng độ võng cho dầm đặt trên nền đàn hồi

Bảng 2 trình bày kết quả của bài báo so sánh độ võng giữa nhịp không thứ nguyên  $\hat{w}\left(x = \frac{L}{2}, z = 0\right) = \frac{100wE_cbh^3}{12q_0L^4}$  của dầm thẳng đẳng hướng với kết quả nghiệm chính xác (Exact) của Chen và cs. [27] với hai giá trị khác nhau của tỷ số  $L/h$  và các tham số nền không thứ nguyên: Winkler  $\bar{K}_w = k_w \left(\frac{L^4}{EI}\right)$

và Pasternak  $\bar{K}_s = k_s \left( \frac{L^2}{EI} \right)$  với  $I = \frac{bh^3}{12}$  là mô men quán tính của tiết diện dầm hình chữ nhật. Có thể nhận thấy, kết quả bài báo khá phù hợp với kết quả của tài liệu kiểm chứng.

Bảng 2. So sánh độ võng giữa nhịp không thứ nguyên  $\hat{w}(L/2, 0)$  của dầm thẳng đẳng hướng đặt trên nền đàn hồi Winkler/ Pasternak

Hệ số nền		$L/h = 120$		$L/h = 15$	
$\bar{K}_w$	$\bar{K}_s$	Chen [27]	Bài báo	Chen [27]	Bài báo
0	0	1,3023	1,3023	1,3153	1,3132
	10	0,6448	0,6448	0,6483	0,6473
	25	0,3661	0,3661	0,3674	0,3668
10	0	1,1806	1,1805	1,1913	1,1895
	10	0,6133	0,6133	0,6165	0,6155
	25	0,3557	0,3557	0,3568	0,3563
100	0	0,6401	0,6401	0,6434	0,6425
	20	0,4256	0,4256	0,4272	0,4265
	15	0,2828	0,2828	0,2836	0,2832

#### 4.2. Các ví dụ khảo sát

Trong mục này, bài báo phân tích uốn dầm cong sandwich FGM xấp tiết diện chữ nhật chiều dài  $L$ , chiều rộng  $b$ , chiều cao  $h$  không nền và có đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Lớp bề mặt là vật liệu FGM cấu thành từ hai loại vật liệu  $Al_2O_3$  và Al có thuộc tính vật liệu như trình bày ở mục 4.1.a. Lớp lõi dầm làm bằng vật liệu xốp (bọt kim loại – metal foam) với hệ số lỗ rỗng  $e_0$ . Các hằng số vật liệu:  $E_1 = 200$  GPa,  $\mu = 1/3$ . Tải trọng phân bố đều có cường độ  $q_0$  (N/m<sup>2</sup>). Ba dạng phân bố lỗ rỗng được khảo sát bao gồm: Phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng như đã trình bày tại mục 2.3. Các kết quả độ võng, ứng suất và các tham số nền không thứ nguyên lần lượt được tính theo (50) và (51) [27, 28]:

$$\bar{K}_w = k_w \left( \frac{L^4}{EI} \right); \bar{G}_p = G_w \left( \frac{L^4}{EI} \right); \bar{K}_s = k_s \left( \frac{L^2}{EI} \right); \bar{K}_u = k_u \left( \frac{L^4}{EI} \right); \bar{K}_l = k_l \left( \frac{L^4}{EI} \right) \quad (51)$$

##### a. Ảnh hưởng của nền đàn hồi

Xét dầm cong sandwich FGM xấp tiết diện chữ nhật, chiều dài  $L$ , chiều rộng  $b$ , chiều cao  $h$  đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr với các hệ số nền không thứ nguyên  $\bar{K}_w, \bar{G}_s, \bar{K}_s, \bar{K}_l, \bar{K}_u$ . Kết quả trong Bảng 3 cho thấy, các giá trị  $\bar{w}, \bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}$  của dầm cong sandwich FGM xấp trên nền đàn hồi Pasternak và Kerr nhỏ hơn so với dầm trên nền đàn hồi Winkler. Điều này có thể được giải thích là do nền đàn hồi Pasternak và Kerr có kể đến hệ số độ cứng cắt của nền. Hơn nữa, với cùng độ cứng uốn của lớp nền bên dưới và độ cứng cắt, độ võng, ứng suất không thứ nguyên của dầm trên nền đàn hồi Kerr lớn hơn dầm trên nền đàn hồi Pasternak. Nguyên nhân là do mô hình nền Kerr có thêm một lớp nền đàn hồi bên trên tiếp xúc với dầm, lớp nền này sẽ làm giảm độ cứng uốn của hệ dầm – nền. Mặt khác, cũng theo số liệu khảo sát trong Bảng 3 với dầm cong sandwich FGM xấp không đặt trên nền đàn hồi, khi tăng hệ số lỗ rỗng  $e_0$  độ võng và các ứng suất của dầm tăng lên nhưng khi đặt dầm trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr, độ võng của dầm tăng trong khi các ứng suất lại giảm xuống. Ngoài ra, với dầm đặt trên nền đàn hồi Kerr, độ võng  $\bar{w}$  và các ứng suất không thứ nguyên  $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}$  của dầm tăng lên khi tăng thông số Kerr ( $\bar{K}_l$ ) và giảm xuống khi tăng hai tham số  $\bar{K}_u, \bar{K}_s$ .

Bảng 3. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của dầm cong sandwich FGM xoắn ( $R/L = 10$ ,  $L/h = 10$ ,  $p = 5$ , KĐ-ĐX tỷ lệ chiều dày các lớp dầm sandwich 1-2-1)

Nền đàn hồi	Hệ số nền	$e_0$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
Không đặt trên nền đàn hồi		0	3,6741	9,0952	0,4417
		0,2	3,7121	9,1434	0,3880
		0,5	3,7790	9,2192	0,2844
Winkler	$\bar{K}_w = 10$	0	3,2456	8,0045	0,3990
		0,2	3,2750	8,0366	0,3501
		0,5	3,3267	8,0850	0,2562
Pasternak	$\bar{K}_w = \bar{G}_p = 10$	0	1,5059	3,6230	0,2153
		0,2	1,5119	3,6194	0,1879
		0,5	1,5223	3,6098	0,1361
Kerr	$\bar{K}_u = \bar{K}_s = \bar{K}_l = 10$	0	2,1381	5,2107	0,2832
		0,2	2,1506	5,2148	0,2476
		0,5	2,1723	5,2170	0,1801
	$\bar{K}_u = \bar{K}_s = 10; \bar{K}_l = 15$	0	2,2949	5,6052	0,2998
		0,2	2,3094	5,6122	0,2624
		0,5	2,3346	5,6189	0,19101
	$\bar{K}_u = \bar{K}_s = \bar{K}_l = 15$	0	1,7674	4,2784	0,2437
		0,2	1,7758	4,2773	0,2129
		0,5	1,7904	4,2713	0,1545

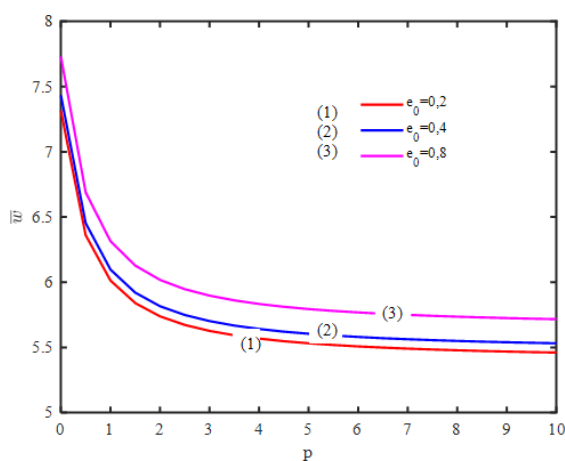
b. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  và hệ số rỗng  $e_0$  đến độ võng  $\bar{w}$  của dầm sandwich FGM xoắn

Độ võng lớn nhất của dầm cong sandwich FGM xoắn  $\bar{w}$  đặt trên nền đàn hồi Kerr ( $\bar{K}_u = \bar{K}_s = \bar{K}_l = 10$ ) với ba dạng phân bố lỗ rỗng khi hệ số rỗng  $e_0$  thay đổi thể hiện trong Bảng 4 và Hình 2. Quan sát kết quả ta thấy khi tăng chỉ số  $p$  (tăng phần thể tích gốm, giảm kim loại), độ võng của dầm sandwich giảm xuống, hay nói cách khác là khi chỉ số  $p$  tăng lên sẽ làm tăng độ cứng của dầm sandwich FGM xoắn. Kết quả cũng chỉ ra rằng khi hệ số lỗ rỗng tăng sẽ làm độ cứng của dầm giảm xuống (dầm bị võng nhiều hơn) với cả ba kiểu phân bố lỗ rỗng. Với số liệu khảo sát, trong ba kiểu phân bố lỗ rỗng, kiểu KĐ-ĐX luôn cho độ võng của dầm sandwich FGM xoắn là lớn nhất (độ cứng dầm nhỏ nhất) với mọi giá trị của  $e_0$ . Ngoài ra, độ võng trong trường hợp phân bố lỗ rỗng KĐ-BĐX và PBD cho kết quả xấp xỉ nhau.

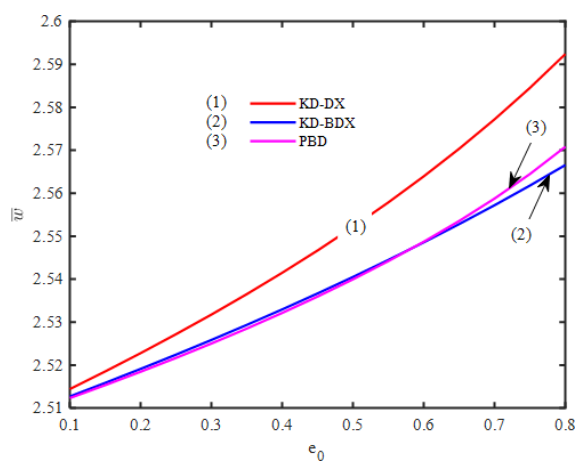
Bảng 4. Độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của dầm cong sandwich FGM xoắn trên nền đàn hồi Kerr ( $R/L = 10$ ,  $L/h = 10$ , tỷ lệ chiều dày các lớp dầm sandwich 1-2-1)

Kiểu phân bố lỗ rỗng	$p$	$e_0$				
		0	0,2	0,4	0,6	0,8
KĐ-ĐX	0	3,8615	3,8829	3,9053	3,9294	3,9568
	1	2,5066	2,5228	2,5415	2,5640	2,5924
	2	2,2914	2,3059	2,3226	2,3422	2,3662
	5	2,1381	2,1506	2,1646	2,1807	2,1996
	10	2,0857	2,0972	2,1100	2,1244	2,1409

Kiểu phân bố lỗ rỗng	$p$	$e_0$				
		0	0,2	0,4	0,6	0,8
KD-BDX	0	3,8615	3,8788	3,8968	3,9158	3,9360
	1	2,5066	2,5191	2,5330	2,5486	2,5666
	2	2,2914	2,3026	2,3149	2,3287	2,3443
	5	2,1381	2,1477	2,1582	2,1681	2,1793
	10	2,0857	2,0944	2,1038	2,1122	2,1211
PBD	0	3,8615	3,8781	3,8960	3,9161	3,9404
	1	2,5066	2,5185	2,5322	2,5487	2,5709
	2	2,2914	2,3020	2,3142	2,3288	2,3480
	5	2,1381	2,1472	2,1576	2,1699	2,1855
	10	2,0857	2,0942	2,1037	2,1148	2,1288



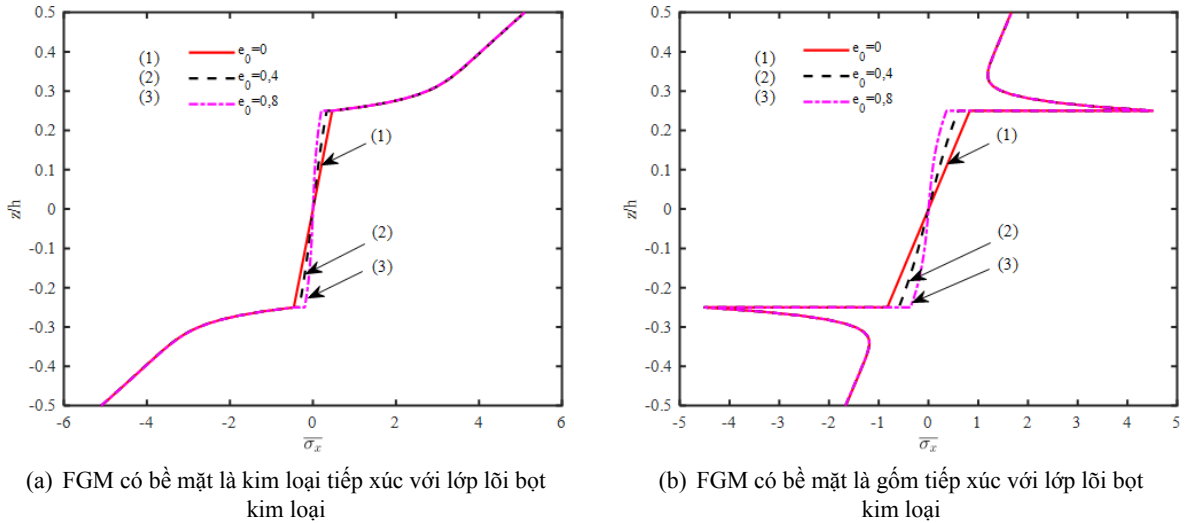
(a) Kiểu phân bố lỗ rỗng PBD

(b) Độ võng  $\bar{w}$  theo hệ số  $e_0$  của dầm xốp

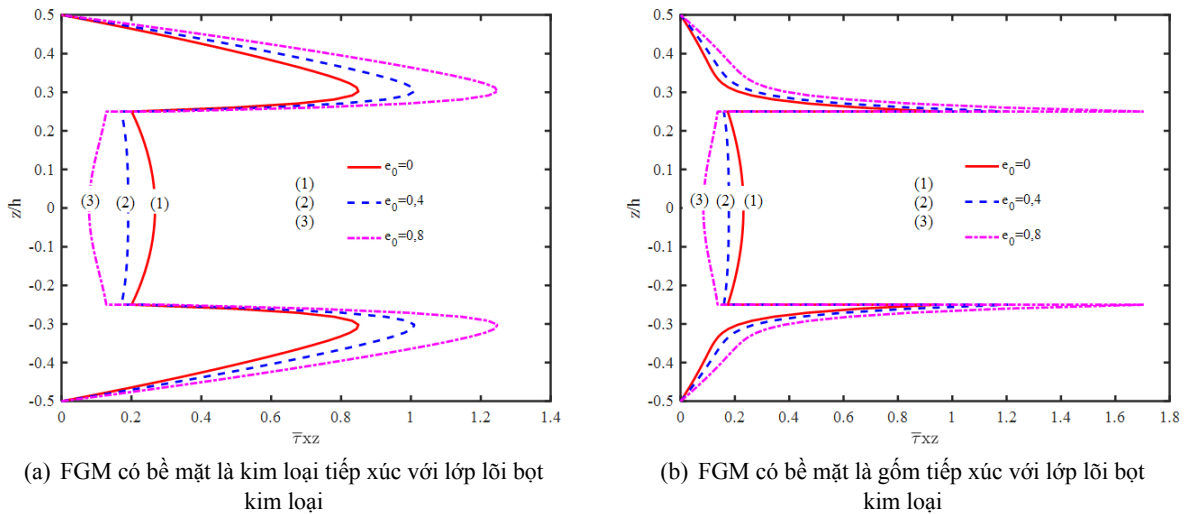
Hình 2. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của dầm sandwich FGM xốp trên nền đàn hồi Kerr theo chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  và hệ số  $e_0$  (1-2-1,  $p = 1$ ,  $L/h = 10$ ,  $R/L = 10$ )

c. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  và hệ số phân bố lỗ rỗng  $e_0$  đến sự phân bố ứng suất  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  theo chiều cao dầm sandwich FGM xốp

Đồ thị Hình 3÷4 lần lượt biểu diễn ảnh hưởng của hệ số rỗng  $e_0$  đến sự phân bố ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_x$  và ứng suất tiếp  $\bar{\tau}_{xz}$  theo chiều cao dầm sandwich FGM xốp trên nền đàn hồi Kerr ( $\bar{K}_u = \bar{K}_s = \bar{K}_l = 10$ ). Xét hai trường hợp cấu tạo của lớp vật liệu FGM: trường hợp thứ nhất (Hình 3(a), Hình 4(a)), các lớp FGM có bề mặt là kim loại tiếp xúc với lớp lõi xốp FGP; trường hợp thứ 2 (Hình 3(b), Hình 4(b)), các lớp FGM có bề mặt là gốm tiếp xúc với lớp lõi xốp FGP. Các đường đồ thị trong trường hợp thứ hai xuất hiện “bước nhảy” về giá trị ứng suất giữa các lớp, điều này sẽ gây ra hiện tượng tập trung ứng suất và dễ làm bong tách các lớp của dầm sandwich. Vì vậy cấu tạo vật liệu của lớp FGM trong trường hợp thứ nhất sẽ hợp lý hơn trường hợp thứ hai khi lớp lõi là bọt kim loại FGP. Ngoài ra, từ Hình 4 có thể thấy với lý thuyết dầm bậc cao bốn ẩn chuyển vị mà bài báo sử dụng, ứng suất cắt ngang thỏa mãn điều kiện bị triệt tiêu tại bề mặt trên và dưới của dầm sandwich FGM xốp.



Hình 3. Biến thiên của ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_x$  theo chiều cao dầm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr (1-2-1,  $p = 10$ , KĐ-ĐX,  $L/h = 10$ ,  $R/L = 10$ )



Hình 4. Biến thiên của ứng suất cắt ngang  $\bar{\tau}_{xz}$  theo chiều cao dầm sandwich FGM xếp trên nền đàn hồi Kerr (1-2-1,  $p = 10$ , KĐ-ĐX,  $L/h = 10$ ,  $R/L = 10$ )

d. Ảnh hưởng của tỷ số  $R/L$  đến độ võng  $\bar{w}$ , ứng suất  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  của dầm cong sandwich FGM xếp

Ảnh hưởng của tỷ số  $R/L$  đến độ võng  $\bar{w}$ , ứng suất  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  của dầm cong sandwich FGM xếp theo ba kiểu phân bố lỗ rỗng được thể hiện trong các Bảng 5. Từ kết quả trong Bảng 5 ta thấy giá trị  $\bar{\sigma}_x$  thay đổi nhỏ trong khi  $\bar{w}$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  gần như không đổi khi tỷ số  $R/L$  thay đổi. Nhận xét về ảnh hưởng của tỷ số  $R/L$  này tương tự với đối tượng là dầm cong sandwich có lớp lõi đẳng hướng, lớp bề mặt FGM trong [12] của nhóm tác giả Sayyad và Ghugal.

e. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày lớp lõi với hai lớp bề mặt đến độ võng  $\bar{w}$ , ứng suất  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\tau}_{xz}$  của dầm sandwich FGM xếp

Bảng 6 và đồ thị Hình 5 thể hiện ảnh hưởng của tỷ lệ chiều cao các lớp dầm sandwich (chỉ số  $\delta = h_c/h_f$ ) đến độ võng  $\bar{w}$  của dầm sandwich. Với số liệu khảo sát cho thấy khi chỉ số  $\delta$  tăng lên sẽ

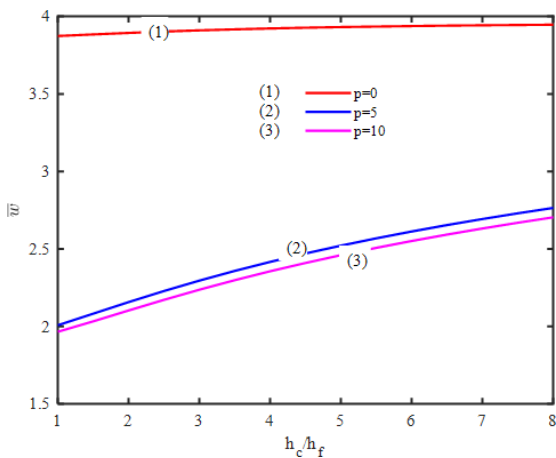
Bảng 5. Độ võng  $\bar{w}$ , ứng suất  $\bar{\sigma}_x$ , ứng suất  $\bar{\tau}_{xz}$  của dầm cong sandwich FGM xấp đặt trên nền đàn hồi Kerr theo tỷ số  $R/L$  ( $\bar{K}_u = \bar{K}_s = \bar{K}_l = 10, p = 5, R/L = 5, e_0 = 0,8$ )

Kiểu phân bố lỗ rỗng	$L/h$	$\bar{w}$			$\bar{\sigma}_x$			$\bar{\tau}_{xz}$		
		$R/L = 5$	$R/L = 20$	$R/L = \infty$	$R/L = 5$	$R/L = 20$	$R/L = \infty$	$R/L = 5$	$R/L = 20$	$R/L = \infty$
KĐ-ĐX	10	2,1409	2,1409	2,1409	5,1007	5,1032	5,1041	0,0786	0,0786	0,0786
	50	2,0441	2,0441	2,0441	26,1381	26,1408	26,1417	0,0824	0,0824	0,0824
KĐ-BĐX	10	2,1261	2,1261	2,1261	5,0725	5,0752	5,0761	0,1530	0,1530	0,1530
	50	2,0398	2,0398	2,0398	25,9200	25,9228	25,9237	0,1596	0,1596	0,1596
PBD	10	2,1288	2,1288	2,1288	5,1068	5,1095	5,1104	0,1502	0,1502	0,1502
	50	2,0411	2,0411	2,0411	26,1086	26,1114	26,1123	0,1568	0,1568	0,1568

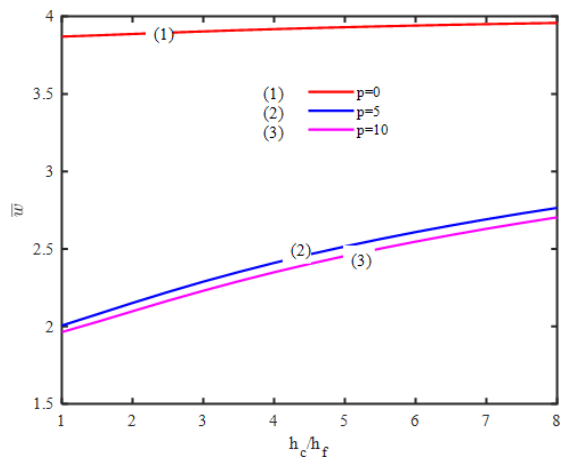
làm cho độ võng của dầm tăng theo, hay nói cách khác khi tỷ số  $h_c/h_f$  tăng sẽ làm độ cứng của dầm sandwich giảm xuống.

Bảng 6. Độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của dầm cong sandwich xấp – FGM ( $R/L = 10, KĐ-ĐX, L/h = 10$ )

$p$	$e_0$	$h_f - h_c - h_f$				
		1-1-1	1-2-1	1-4-1	1-6-1	1-8-1
0	0	3,8615	3,8615	3,8615	3,8615	3,8615
	0,2	3,8698	3,8829	3,9018	3,9120	3,9178
	0,4	3,8786	3,9053	3,9437	3,9645	3,9762
	0,6	3,8883	3,9294	3,9880	4,0196	4,0375
	0,8	3,8993	3,9568	4,0368	4,0795	4,1036
10	0	1,9596	2,0857	2,3190	2,5031	2,6492
	0,2	1,9637	2,0972	2,3430	2,5343	2,6848
	0,4	1,9681	2,1100	2,3706	2,5703	2,7256
	0,6	1,9727	2,1244	2,4043	2,6149	2,7756
	0,8	1,9777	2,1409	2,4482	2,6762	2,8448



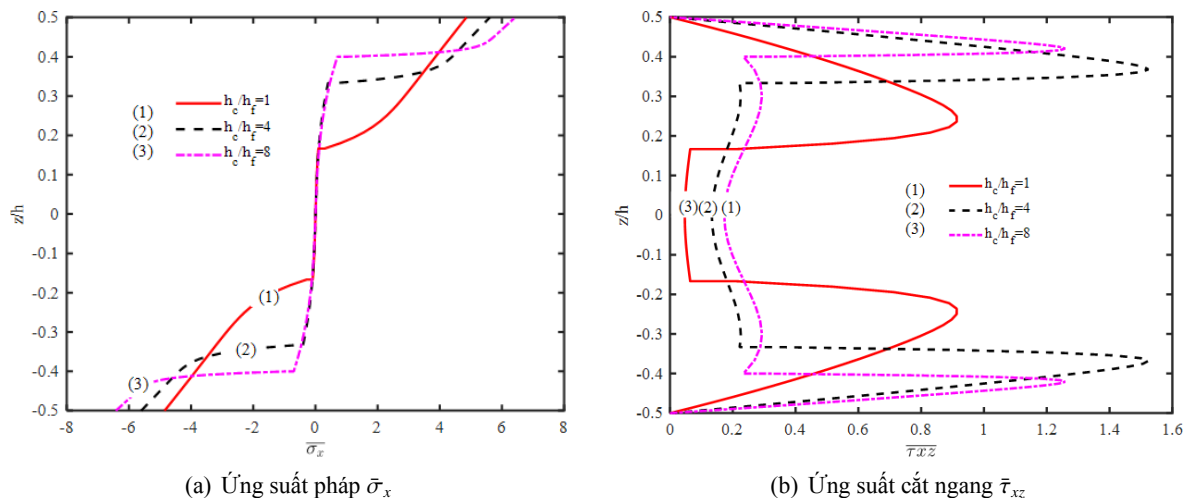
(a) Kiểu phân bố lỗ rỗng PBD



(b) Kiểu phân bố lỗ rỗng KĐ-ĐX

Hình 5. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của dầm sandwich FGM xấp trên nền đàn hồi Kerr theo tỷ số chiều cao lớp lõi/chiều cao lớp bề mặt ( $e_0 = 0,3; L/h = 10; R/L = 10$ )

Sự biến thiên của ứng suất pháp  $\bar{\sigma}_x$  và ứng suất cắt ngang  $\bar{\tau}_{xz}$  theo chiều cao dầm sandwich xốp – FGM với các giá trị khác nhau của tỷ số  $h_c/h_f$  lần lượt được thể hiện trong Hình 6(a) và Hình 6(b). Có thể thấy rằng giá trị ứng suất pháp tại lớp bề mặt của dầm sandwich tăng dần khi tăng tỷ số  $h_c/h_f$ . Sự phân bố ứng suất pháp là phân đôi xứng nhưng không tuyến tính, sự phân bố ứng suất cắt ngang  $\bar{\tau}_{xz}$  là đối xứng qua mặt phẳng giữa dầm ( $z = 0$ ) và những ứng suất này phân bố liên tục theo chiều cao dầm sandwich FGM xốp.



Hình 6. Biến thiên của ứng suất theo chiều cao dầm sandwich FGM xốp trên nền đàn hồi Kerr khi  $h_c/h_f$  thay đổi ( $p = 10$ ;  $e_0 = 0,8$ ; KĐ-ĐX;  $L/h = 10$ ;  $R/L = 10$ )

## 5. Kết luận

Bài báo đã thiết lập nghiệm giải tích cho bài toán phân tích tĩnh dầm cong sandwich với lớp lõi bằng vật liệu xốp, hai lớp bề mặt là vật liệu FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Trên cơ sở lý thuyết biến dạng bậc cao bốn ẩn chuyển vị, các phương trình cân bằng được thiết lập theo nguyên lý Hamilton là cơ sở để xác định độ võng và ứng suất của dầm sandwich theo dạng nghiệm Navier. Độ võng và ứng suất của dầm sandwich FGM xốp đã được tính toán với các tham số vật liệu, kích thước và nền đàn hồi khác nhau. Kết quả số cho thấy độ võng, ứng suất của dầm sandwich FGM xốp phụ thuộc vào hệ số lỗ rỗng  $e_0$ , chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$ , kích thước hình học, chiều dày các lớp vật liệu và loại nền đàn hồi. Đây là những kết quả có ý nghĩa kỹ thuật trong phân tích ứng xử các cấu kiện công trình đặt trên nền đàn hồi và cũng là cơ sở tốt để tối ưu hóa thiết kế kết cấu dầm sandwich FGM xốp trong các nghiên cứu tiếp theo.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2):147–157.
- [2] Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1–2):1–4.
- [3] Thâm, V. V., Tú, T. M. Static and free vibration analysis of functionally graded beam using various shear deformation theories. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 10(2):15–22.
- [4] Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, B.-D., Lee, J. (2016). An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory. *Composite Structures*, 156:238–252.
- [5] Nguyen, T.-K., Nguyen, B.-D. (2015). A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(6):613–631.

- [6] Mu, L., Zhao, G. (2016). [Fundamental Frequency Analysis of Sandwich Beams with Functionally Graded Face and Metallic Foam Core](#). *Shock and Vibration*, 2016:1–10.
- [7] Trường, H. Q., Hùng, Đ. X., Tú, T. M. (2021). [Phân tích dao động riêng dầm sandwich FGM xấp xỉ với điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Ritz](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 15(5V):15–27.
- [8] Osofero, A. I., Vo, T. P., Thai, H. (2014). Bending behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D hyperbolic shear deformation theory. *Journal of Engineering Research*, 19(1):1–16.
- [9] Su, Z., Jin, G., Wang, Y., Ye, X. (2016). [A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations](#). *Acta Mechanica*, 227(5):1493–1514.
- [10] Nirmala, K., Upadhyay, P. C., Prucz, J., Lyons, D. (2006). [Thermo-elastic Stresses in Composite Beams with Functionally Graded Layer](#). *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25(12):1241–1254.
- [11] Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., Sobhy, M. (2009). [Bending analysis of FG viscoelastic sandwich beams with elastic cores resting on Pasternak's elastic foundations](#). *Acta Mechanica*, 212(3–4):233–252.
- [12] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2019). [A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams](#). *Composite Structures*, 226:111246.
- [13] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc.* H. Dominicus.
- [14] Filonenko-Borodich, M. M. (1940). Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika*, 46:3.
- [15] Sokolov, S. N. (1952). Circular plate on a generalized foundation. *Inzhinierny Sbornik, Academy of Sciences USSR*, 11.
- [16] Pasternak, P. L. (1954). On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gos. Izd. Lit. po Strait i Arkh.*
- [17] Hetényi, M. (1950). [A General Solution for the Bending of Beams on an Elastic Foundation of Arbitrary Continuity](#). *Journal of Applied Physics*, 21(1):55–58.
- [18] Kerr, A. D. (1984). [On the formal development of elastic foundation models](#). *Ingenieur-Archiv*, 54(6):455–464.
- [19] Kerr, A. D. (1965). [A study of a new foundation model](#). *Acta Mechanica*, 1(2):135–147.
- [20] Jahnke, E., Emde, F. (1909). *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, volume 5. BG Teubner.
- [21] Pham, Q.-H., Tran, V. K., Nguyen, P.-C. (2022). [Hygro-thermal vibration of bidirectional functionally graded porous curved beams on variable elastic foundation using generalized finite element method](#). *Case Studies in Thermal Engineering*, 40:102478.
- [22] Hong, N. T. (2022). [On mechanical behavior of two-layer functionally graded sandwich curved beams resting on elastic foundations using an analytical solution and refined Timoshenko beam theory](#). *Ain Shams Engineering Journal*, 13(4):101647.
- [23] Wu, D., Liu, A., Huang, Y., Huang, Y., Pi, Y., Gao, W. (2018). [Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis](#). *Engineering Structures*, 165:287–301.
- [24] Kruszewski, E. T. (1949). *Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam*. Number 1909, National Advisory Committee for Aeronautics.
- [25] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [26] Li, M., Guedes Soares, C., Yan, R. (2021). [Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT](#). *Composite Structures*, 264:113643.
- [27] Chen, W. Q., Lü, C. F., Bian, Z. G. (2004). [A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation](#). *Applied Mathematical Modelling*, 28(10):877–890.
- [28] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). [A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation](#). *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.