

# DỰ BÁO ƯỚNG XỬ CHỊU CẮT CỦA BÊ TÔNG CỐT SỢI THÉP CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA ĐỊNH HƯỚNG SỢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Vũ Chí Công<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

*Nhận ngày 15/9/2023, Sửa xong 23/11/2023, Chấp nhận đăng 29/11/2023*

## Tóm tắt

Ảnh hưởng của định hướng sợi thép tới tác dụng gia cường bê tông ở nhiều trạng thái nứt khác nhau là rất đáng kể tuy nhiên thường khó định lượng. Bài báo này trình bày một nghiên cứu lý thuyết, giải thích cơ chế hoạt động của sợi dưới chuyển động mở rộng và trượt kết hợp của vết nứt thông qua phương pháp giải tích. Phương pháp này cho phép ước lượng ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại vết nứt có độ mở rộng và độ trượt cụ thể. Hàm giải tích của những ứng suất liên kết này là tổ hợp tuyến tính của các ứng suất liên kết của sợi và ứng suất liên kết của bê tông tương ứng. Phân bố của định hướng sợi được tham số hóa bằng hàm thống kê hai biến. Sự biến thiên của mô hình được định lượng bằng một số mô phỏng trên các tham số vật liệu quan trọng. Kết quả của mô phỏng thí nghiệm cắt trực tiếp cho thấy ước lượng của phương pháp là tương đối tốt và có nhiều tiềm năng phát triển.

*Từ khoá:* bê tông cốt sợi thép; định hướng sợi; cường độ chịu cắt; mô hình biểu kiến; ứng suất liên kết sợi.

PREDICTION OF SHEAR BEHAVIOR OF STEEL FIBER-REINFORCED CONCRETE WITH CONSIDERATION OF THE EFFECTS OF FIBER ORIENTATION THROUGH ANALYTICAL METHODS

## Abstract

The effect of orientation on the fiber bridging mechanism in various cracking states of Steel-Fiber-Reinforced Concrete (SFRC) is important but also difficult to quantify. This paper presents an analytical method for interpreting the fiber bridging mechanism under the combination of crack opening and crack sliding. The model allows for the estimation of cohesive stresses at a given crack size. Their analytic formulas are a linear combination of fiber bridging stress and aggregate interlocking stress. The distribution of the fiber orientation is presented as a probability density function of two variables. The accuracy of the model is then quantified by the numerical simulation of a direct shear experiment. A parametric study on some important parameters is performed to evaluate the variation of the model. The results show a good agreement between the numerical estimation of the proposed model and the experimental results. Moreover, the parametrical study presents a reasonable variation of the model according to the physical observation, and the proposed model has a lot of potential for development.

*Keywords:* steel fiber-reinforced concrete; fiber orientation; shear strength; micromechanic; fiber bridging stress.

[https://doi.org/10.31814/stee.huce2024-18\(1V\)-05](https://doi.org/10.31814/stee.huce2024-18(1V)-05) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Giới thiệu

Ý tưởng thêm cốt sợi thép vào bê tông nhằm tăng tính dẻo cho bê tông đã và đang nhận được nhiều quan tâm cả trong nghiên cứu học thuật và ứng dụng công nghiệp. Nhiều nghiên cứu và ứng dụng thực tiễn trong nước và quốc tế trong suốt ba thập kỷ gần đây đã cho thấy lợi ích của bê tông cốt sợi thép [1–4]. Khi vết nứt xuất hiện, sợi thép tiếp nhận một phần ứng suất và giúp phân phối lại nội

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [congvc@huce.edu.vn](mailto:congvc@huce.edu.vn) (Công, V. C.)

lực trong cấu kiện [5]. Nhờ đó, với một hàm lượng phù hợp, sợi thép có thể thay thế một phần hoặc toàn bộ cốt thép truyền thống, đem lại nhiều lợi ích và ứng dụng như sửa chữa các kết cấu lớn, bê tông phun, chế tạo các cấu kiện đúc sẵn, ...

Cơ chế làm việc của sợi thép trong bê tông chịu ảnh hưởng của nhiều yếu tố, trong đó, định hướng của sợi trong bê tông là một yếu tố quan trọng, có ảnh hưởng lớn đến cường độ và tính dẻo của vật liệu sau nứt [6, 7]. Các nghiên cứu thực nghiệm chỉ ra rằng, với cùng hàm lượng sợi, cấu kiện có phần lớn sợi thép song song với hướng ứng suất kéo chính giúp duy trì cường độ ở vết nứt có kích thước lớn hơn rất nhiều so với cấu kiện có phần lớn sợi thép vuông góc với hướng ứng suất kéo chính [8, 9]. Ngoài ra, [10] đã chỉ ra rằng, cấu kiện có định hướng sợi tốt (vuông góc với bề mặt vết nứt) giúp gia tăng từ 11% - 30% cường độ chịu cắt. Tuy nhiên, ảnh hưởng của định hướng sợi cũng là yếu tố khó kiểm soát và định lượng cả trước, trong và sau khi chế tạo bê tông cốt sợi. Định hướng của sợi thường không phân bố đều và chịu ảnh hưởng lớn bởi hình dạng khuôn đúc, độ sụt của bê tông cũng như phương pháp đầm dõ.

Một số mô hình toán học đã được đề xuất nhằm ước lượng ảnh hưởng của định hướng sợi đến ứng xử của vật liệu sau nứt (ví dụ như trong các nghiên cứu [11–14]). Tuy nhiên, các mô hình này chỉ xem xét ảnh hưởng của định hướng sợi trong trường hợp kéo thuần túy. Đối với trường hợp chịu cắt, bê tông tham gia đáng kể vào cơ cấu chịu lực thông qua hiện tượng được gọi là “aggregate interlocking” [15]. Phần lớn các nghiên cứu lý thuyết coi cơ chế liên kết của bê tông cốt sợi tại vết nứt là tổ hợp giữa ứng suất liên kết của sợi thép và ứng suất liên kết của bê tông [10, 16]. Mô hình “Unified Variable Engagement” (UVEM) đề xuất bởi Foster và Htut [17, 18] mô tả ảnh hưởng của định hướng sợi thông qua một tham số thực nghiệm và xác định một khoảng hữu hiệu của góc nghiêng sợi, cơ chế liên kết của bê tông và sợi thép được định nghĩa đơn giản thông qua 1 biến liên kết trên khoảng hữu hiệu này. Mô hình này tương đối hiệu quả khi bê tông không chứa cốt liệu lớn nhưng mất chính xác trong trường hợp bê tông truyền thống [19]. Soetens và Matthys ([20]) đề xuất mô hình “Critical Shear-Friction”, ảnh hưởng của định hướng sợi được xem xét ở cấp độ vi mô và được đơn giản hóa ở cấp độ vĩ mô dưới dạng một hệ số ma sát. Mô hình này tương đối hiệu quả khi ước lượng ứng suất cắt tối đa nhưng không chính xác khi ước lượng được toàn bộ ứng xử chống cắt sau nứt.

Mục tiêu của bài báo này là phát triển một mô hình giải tích hiệu quả, cho phép biểu diễn ứng xử cơ học sau nứt của bê tông cốt sợi thép có xét đến ảnh hưởng của định hướng sợi trong trường hợp nứt kéo và cắt kết hợp. Ứng suất liên kết tại vết nứt được giả thiết là tổng hợp của: (i) ứng suất trên các sợi thép và (ii) ứng suất gây ra bởi hiệu ứng “aggregate interlocking”. Thành phần (i) được xây dựng dựa trên mô hình đề xuất trong nghiên cứu mới đây của chúng tôi [14], thông qua việc phân tích cơ chế chịu lực của sợi thép dưới tác động mở rộng và trượt của vết nứt, kết hợp với xây dựng một hàm phân phối xác suất thích hợp giúp biểu diễn phân bố của định hướng sợi. Mô hình biểu kiến được hoàn thiện bằng việc tích hợp hàm ứng suất liên kết (ii) của bê tông thông qua một mô hình giải tích. Tính chính xác của mô hình được kiểm nghiệm bằng việc so sánh với kết quả thực nghiệm của thí nghiệm cắt trực tiếp. Một nghiên cứu tham số bổ sung sẽ giúp làm rõ sự biến thiên của mô hình đề xuất khi nghiên cứu về ảnh hưởng của định hướng sợi trong trường hợp chịu cắt và kéo kết hợp.

## 2. Ứng xử của bê tông cốt sợi dưới chuyển động hỗn hợp của vết nứt

### 2.1. Cơ chế hoạt động của sợi thép dưới chuyển động trượt của vết nứt

Trong mô hình biểu kiến [14], ứng suất trung bình  $\sigma_f$  trên một đơn vị diện tích vết nứt được xác định bởi tổng hợp lực của các sợi thép đơn lẻ liên kết tại vết nứt  $F(\delta, z, \varphi, \theta)$ , được hiệu chỉnh với ảnh hưởng của định hướng sợi thông qua hàm phân bố vị trí  $p(z)$  và hàm phân bố định hướng  $p(\varphi, \theta)$  như

biểu diễn ở phương trình (1) dưới đây:

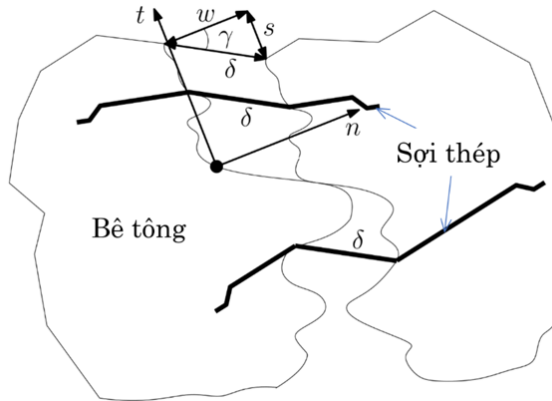
$$\sigma_f(\delta) = \frac{v_f}{A_f} \iiint F(\delta, z, \varphi, \theta) p(z) p(\varphi, \theta) dz d\varphi d\theta \quad (1)$$

trong đó  $\delta$  là độ dài phần sợi liên kết tại vết nứt;  $z, \varphi, \theta$  lần lượt là vị trí và góc nghiêng ban đầu của sợi;  $v_f$  và  $A_f$  là hàm lượng và diện tích mặt cắt ngang đặc trưng của sợi. Các hàm  $F(\delta, z, \varphi, \theta)$ ,  $p(z)$  và  $p(\varphi, \theta)$  trong trường hợp vết nứt có chuyển động trượt được mô tả lần lượt dưới đây. Bài báo này tập trung vào sợi thép có móc do đây là loại sợi được dùng rộng rãi nhất trong bê tông cốt sợi thép thông dụng.

a. Lực tác dụng lên sợi thép đơn dưới chuyển động trượt của vết nứt

Xét một vết nứt có bề rộng  $w$  và độ trượt  $s$  tính từ thời điểm hình thành (Hình 1), chuyển vị tương đối giữa hai mép vết nứt được đặc trưng bởi góc nghiêng  $\gamma$  so với phương pháp tuyến  $\vec{n}$  và độ dịch chuyển  $\delta$  trong mặt phẳng  $\vec{nt}$  như sau:

$$\delta = \sqrt{w^2 + s^2}; \quad \gamma = \arctan(s/w) \quad (2)$$



Hình 1. Chuyển động của sợi thép dưới tác dụng mở rộng và trượt của vết nứt

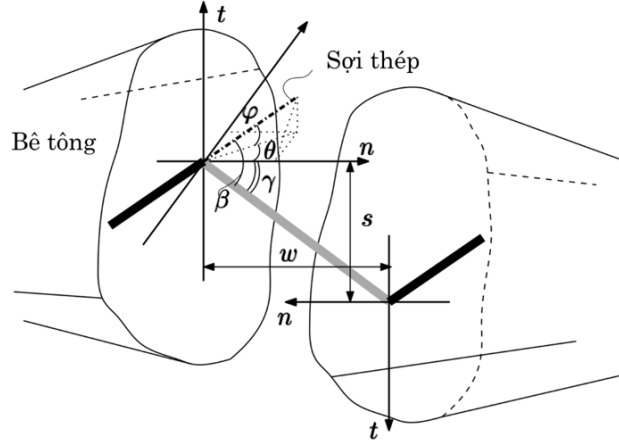
Khả năng mặt phẳng của vết nứt cắt qua trung điểm của sợi thép là rất nhỏ nên có thể giả thiết rằng quá trình kéo trượt của sợi thép chỉ diễn ra ở phần ngắn hơn. Do đó, phần sợi thép được kéo ra khỏi bê tông có độ dài bằng chuyển vị tương đối  $\delta$  và góc nghiêng của nó so với phương pháp tuyến bằng  $\gamma$ .

Hình 2 biểu diễn một sợi thép có chiều dài  $L_f$ , đường kính  $d_f$ , liên kết vết nứt trên với góc phương vị đứng  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$  và góc phương vị ngang  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ , phần thép neo trong bê tông có độ dài  $L \leq L_f/2$ . Dưới chuyển vị tương đối của vết nứt, phần kéo ra  $\delta$  của sợi thép bị uốn cong một góc  $\beta$  so với góc nghiêng ban đầu. Giá trị của góc  $\beta$  này có thể dễ dàng tính toán bằng công thức sau:

$$\beta = |\arccos(\sin \varphi \sin \gamma + \cos \varphi \cos \gamma \cos \theta)| \quad (3)$$

Trong trường hợp định hướng hai chiều ( $\theta = 0$ ), góc uốn sẽ là  $\beta = |\gamma - \varphi|$ .

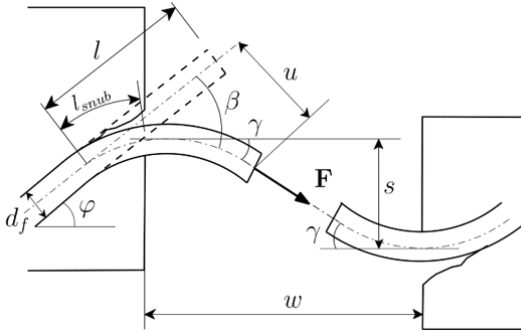
Hình 3 mô tả sợi thép được cấu thành bởi hai phần: phần kéo ra là một dầm công xôn có độ dài  $l$  và phần nằm trong bê tông là một dầm liên tục trên nền đàn hồi có độ dài  $L$ , hai phần được liên kết với nhau bởi một đoạn uốn nhỏ có độ dài  $l_{snub}$ , phần uốn này nằm ngay tại mép vết nứt và là nhân tố



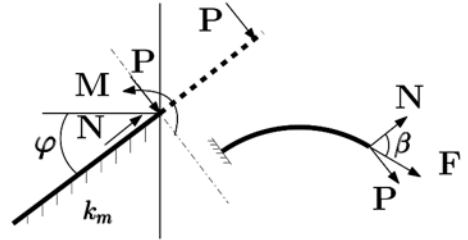
Hình 2. Định hướng trong hệ tọa độ phương vị cùng với chuyển vị tương đối của hai mép vết nứt

gây ra hiệu ứng “snubbing effect” [21]. Dễ thấy, chiều dài của phần uốn cong  $l_{snub}$  trong trường hợp kéo thuần túy là  $l_{snub} = d_f \tan \beta$ . Tuy nhiên, trong trường hợp vết nứt có chuyển vị trượt, độ dài phần này rất khó xác định. Trong nghiên cứu này, công thức thực nghiệm đề xuất bởi [22] được sử dụng:  $l_{snub} = 3d_f$ . Chiều dài phần kéo ra và chuyển vị lớn nhất của nó được xác định trong công thức (4) dưới đây:

$$l = \frac{\delta}{2} \cos \beta + l_{snub}; \quad u = \frac{\delta}{2} \sin \beta \quad (4)$$



(a) Vị trí các phần của sợi thép



(b) Hai dầm tương đương cùng các lực tác dụng

Hình 3. Mô tả sợi thép liên kết vết nứt bằng hai dầm tương đương

Gọi  $P$  là lực tác dụng lên phần công xôn gây ra dịch chuyển  $u$  tại đầu công xôn và mô men  $M$  tại điểm đầu của phần sợi thép nằm trong bê tông, gọi  $N$  là phần lực dọc tác dụng kéo lên phần sợi thép nằm trong bê tông, sử dụng phương pháp tính toán trong [23], quan hệ giữa hai lực  $P$  và  $N$  được biểu diễn ở phương trình (5) dưới đây.

$$P = u \left[ \frac{2\zeta N(\kappa \cosh \kappa l + \kappa \sinh \kappa l) - k_m \sinh \kappa l}{2\zeta^2 N(\kappa \cosh \kappa l + 2\kappa \sinh \kappa l) + k_m \kappa \cosh \kappa l} + l \right]^{-1} \quad (5)$$

trong đó  $\kappa = \sqrt{N/(E_f I_f)}$  ( $\text{mm}^{-1}$ ),  $\zeta = \sqrt[4]{k_m/(4E_f I_f)}$  ( $\text{mm}^{-1}$ ) với  $I_f$ ,  $E_f$  lần lượt là mô men quán tính và mô đun đàn hồi của thép,  $k_m = 0,25E_m$  là mô đun phản ứng của bê tông lên sợi thép [24] và  $E_m$  là mô đun đàn hồi của bê tông.

Lực dọc  $N$  là lực kéo một sợi thép có chiều dài  $L$  ra khỏi bê tông. Nghiên cứu này sử dụng công thức đề xuất trong [14] với giả thiết biến dạng nhỏ, lực kéo  $N$  qua các giai đoạn khác nhau cho sợi thép có móc với các chiều dài móc ở hai đầu sợi thép tương ứng là  $L_1$  và  $L_2$  như sau:

$$N(w) = \frac{\pi d_f}{2} \sqrt{E_f \tau_0 d_f (1 + \eta) \sqrt{w}}; \quad \forall w \in [0, w_0] \quad (6)$$

$$N(w) = -Q \left( \frac{w - w_0}{\frac{L_1}{2} - w_0} \right)^2 + 2Q \left( \frac{w - w_0}{\frac{L_1}{2} - w_0} \right) + \pi d_f (1 + \eta) \tau_0 L; \quad \forall w \in \left( w_0, \frac{L_1}{2} \right] \quad (7)$$

$$N(w) = -\frac{Q}{2} \left( 1 + f \sin \frac{\psi}{2} \right) \left( \frac{w - L_1}{L_2} \right)^2 + Q + \pi d_f (1 + \eta) \tau_0 L; \quad \forall w \in \left( \frac{L_1}{2}, L_1 + L_2 \right] \quad (8)$$

$$N(w) = \left[ \pi d_f (1 + \eta) \tau_0 L + \frac{Q}{2} \left( 1 - f \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \left( 1 - \frac{w - L_1 - L_2}{L} \right); \quad \forall w \in (L_1 + L_2, L_f/2] \quad (9)$$

Với  $f$  là ma sát giữa thép và bê tông tại điểm móc,  $\tau_0$  là ứng suất kết dính ban đầu,

$$\eta = \frac{E_f}{E_m} \frac{v_f}{1 - v_f}, \quad w_0 = \frac{4(1 + \eta)L^2 \tau_0}{E_f d_f}, \quad Q = \frac{\pi f_y d_f^2}{12 \sin \psi (1 - f \sin \psi)}, \quad L \in [0, L_f/2]$$

Lực liên kết  $F$  theo phương  $\gamma$  (phương chuyển vị của hai mép vết nứt) đặc trưng cho mỗi sợi là tổng hợp lực của hai lực  $N$  và  $P$ :

$$F = N \cos \beta + P \sin \beta \quad (10)$$

b. Mô tả định hướng sợi bởi hàm thống kê

Hàm lực liên kết đặc trưng được xây dựng với hệ tọa độ phương vị  $(z, \varphi, \theta)$  trong đó,  $z$  là vị trí của sợi theo phương pháp tuyến của vết nứt,  $\varphi$  và  $\theta$  lần lượt là góc phương vị đứng và ngang. Đối với hệ tọa độ này, phân bố không đồng nhất của hướng sợi có thể biểu diễn thông qua hàm phân phối chuẩn hai biến tuần hoàn trên  $\pi$  như trên phương trình (11) dưới đây:

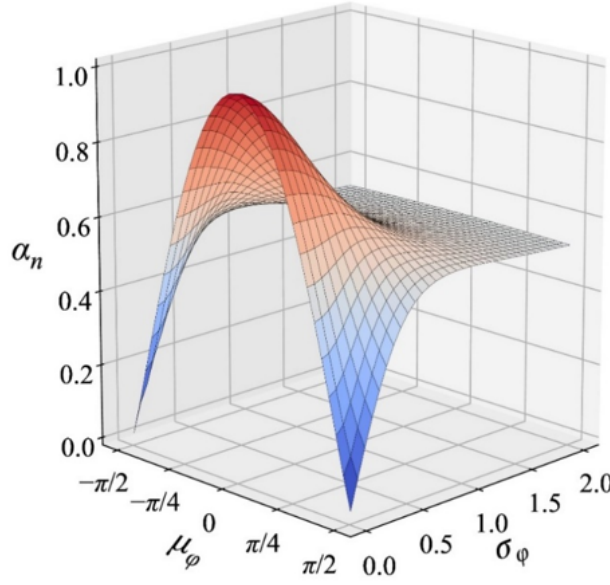
$$p(X) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\Sigma|}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \right] \quad (11)$$

trong đó  $X$  là vector hai biến phân phối,  $\mu$  là vector trung bình và  $\Sigma$  là ma trận hiệp phương sai của hàm phân phối:

$$X = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}; \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_\varphi \\ \mu_\theta \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (\sigma_\theta \cos \xi)^2 + (\sigma_\varphi \sin \xi)^2 & (\sigma_\theta^2 - \sigma_\varphi^2) \sin \xi \cos \xi \\ (\sigma_\theta^2 - \sigma_\varphi^2) \sin \xi \cos \xi & (\sigma_\theta \sin \xi)^2 + (\sigma_\varphi \cos \xi)^2 \end{pmatrix}$$

Với  $(\mu_\varphi, \sigma_\varphi)$  và  $(\mu_\theta, \sigma_\theta)$  lần lượt là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của phân phối hai biến  $\varphi$  và  $\theta$ . Hàm phân phối nêu trên có thể mô tả phân bố định hướng sợi theo phân phối chuẩn trong nhiều trường hợp như phân phối 1 chiều (các sợi song song với một phương, thường gặp trong dầm mảnh), phân phối hai chiều (sợi định hướng tự do trong một mặt phẳng, thường gặp trong các tấm mảnh) hay phân phối ba chiều (sợi định hướng tự do theo mọi phương, thường gặp với cấu kiện có kích thước tương đối lớn). Khi tham số hóa một biến, giá trị của hàm phân phối đề xuất hội tụ về giá trị của hệ số định hướng sợi cổ điển  $\alpha$ . Hình 4 biểu diễn giá trị của hàm phân phối trong trường hợp sợi định hướng theo một phương với góc trung bình  $\mu_\varphi$  ( $\mu_\theta = 0$  và  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ ), giá trị của hàm tăng dần  $\alpha \rightarrow 1,0$  khi  $\mu_\varphi \rightarrow 0$  (sợi song song với phương pháp tuyến, và ngược lại, giá trị  $\alpha \rightarrow 0,5$  khi  $\mu_\varphi \rightarrow \pm\pi/2$  (sợi vuông góc với phương pháp tuyến).



Hình 4. Giá trị của hàm phân phối trong trường hợp định hướng theo một trục với tham số định hướng  $\mu_\varphi$  và  $\sigma_\varphi$  ( $\mu_\theta = 0$  và  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ )

Với mô hình biểu kiến, giả thiết sợi phân bố đều là có thể chấp nhận được, hàm phân bố sợi  $p(z)$  được phát biểu như sau:

$$p(z) = \frac{1}{L_f/2} = \frac{2}{L_f} \quad (13)$$

Thay các phương trình (10), (11) và (13) vào phương trình (1), ứng suất liên kết của sợi thép theo phương  $\gamma$  được xác định như phương trình (14) dưới đây

$$\sigma_f(\delta) = \frac{v_f}{A_f} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{L_f/2} F(w, s, z, \varphi, \theta) p(z) p(\varphi, \theta) dz d\varphi d\theta \quad (14)$$

## 2.2. Ứng xử chống cắt của bê tông

Hiệu ứng “aggregate interlocking” được quan sát khi các mép vết nứt trượt lên nhau giúp truyền ứng suất giữa hai vùng đàn hồi và tạo ra một phần độ bền chống cắt. Hiện tượng này là một trong những cơ chế chính tạo nên độ bền chống cắt, nhất là đối với bê tông có cốt liệu lớn. Nhiều mô hình đã được đề xuất như trong [25–27], phần lớn đều cho rằng, ứng suất liên kết bị chi phối chủ yếu bởi kích thước của cốt liệu lớn và cường độ nén của bê tông. Trong bài báo này, mô hình “Contact Density” đề xuất bởi Li và Maekawa [27] được sử dụng do tính đồng bậc của các hàm ứng suất liên kết. Ứng suất do hiệu ứng “aggregate interlocking” theo phương pháp tuyến  $\sigma_{agg}$  và theo phương tiếp tuyến  $\tau_{agg}$  theo hàm của bề rộng  $w$  và độ trượt  $s$  được phát biểu trong phương trình (15)

$$\begin{aligned} \sigma_{agg}(w, s) &= -3,83 f_c^{0,33} \left(1 - \frac{2}{D_{max}}\right) \left(\arctan \frac{s}{w} - \frac{sw}{s^2 + w^2}\right) \\ \tau_{agg}(w, s) &= -3,83 f_c^{0,33} \left(1 - \frac{2}{D_{max}}\right) \frac{sw}{s^2 + w^2} \end{aligned} \quad (15)$$

trong đó,  $D_{max}$  là đường kính của cốt liệu lớn và  $f_c$  là cường độ chịu nén đặc trưng của bê tông.

### 2.3. Ứng suất liên kết tổng hợp

Ứng suất lan truyền qua vết nứt là tổ hợp tuyến tính giữa ứng suất liên kết của các sợi thép  $\sigma_f$  theo hai phương pháp tuyến và tiếp tuyến và ứng suất liên kết ( $\sigma_{agg}, \tau_{agg}$ ) do cơ chế “aggregate interlocking”. Các hàm ứng suất tổng hợp này được biểu diễn ở phương trình (16) dưới đây

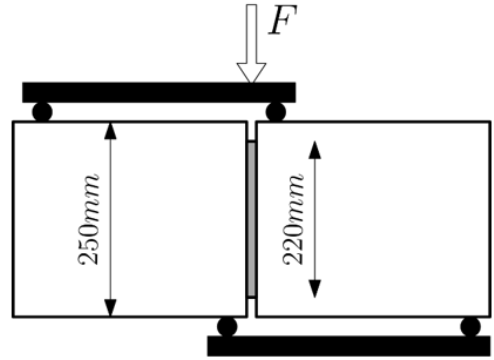
$$\begin{aligned}\sigma_c(w, s) &= \sigma_f(w, s) \cos \gamma + \sigma_{agg}(w, s) \\ \tau_c(w, s) &= \sigma_f(w, s) \sin \gamma + \tau_{agg}(w, s)\end{aligned}\quad (16)$$

## 3. Kiểm tra mô hình

### 3.1. Thí nghiệm cắt trực tiếp

Trong phần này, thí nghiệm cắt trực tiếp trên dầm ngắn thực hiện bởi Khanlou và cs. [28] được sử dụng để kiểm chứng tính đúng đắn của mô hình. Mẫu thí nghiệm là các dầm bê tông có tiết diện  $250 \times 250 \text{ (mm}^2\text{)}$ , chiều dài 540 mm. Hai gối đỡ và hai lực tác dụng với cùng khoảng cách được đặt phản xứng để tạo ra lực cắt lớn và triệt tiêu ảnh hưởng của mômen ở tiết diện giữa nhịp (xem Hình 5). Tiết diện này cũng được tiêu giảm 15 mm trên mỗi cạnh dẫn đến tiết diện chịu cắt hữu hiệu  $220 \times 220 \text{ (mm}^2\text{)}$ .

Bê tông được sử dụng là bê tông cường độ 35 MPa, kích thước lớn nhất của cốt liệu thô là 13 mm, sợi được sử dụng là loại Dramix 3D có chiều dài  $L_f = 60 \text{ mm}$ , đường kính  $d_f = 0,75 \text{ mm}$  và độ bền kéo  $f_y = 1050 \text{ MPa}$ . Thí nghiệm được thực hiện trên ba hàm lượng sợi thép  $v_f = 0,51\%; 0,76\%$  và  $1,00\%$ . Các thông số vật liệu được nêu cụ thể trong Bảng 1.



Hình 5. Sơ đồ thí nghiệm cắt trực tiếp (minh họa theo [28])

Bảng 1. Tham số vật liệu của thí nghiệm cắt trực tiếp

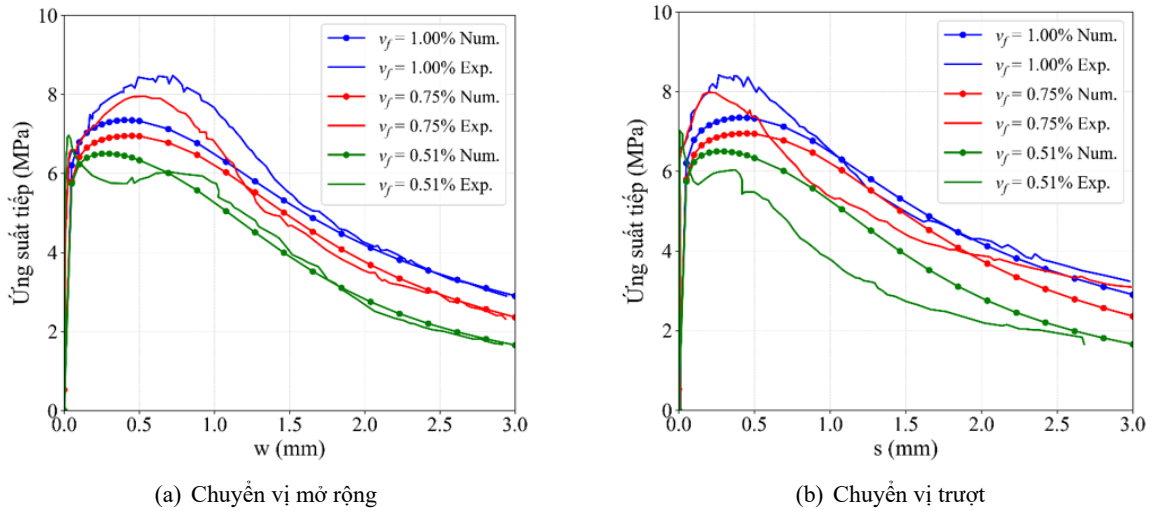
$L_f \text{ (mm)}$	60,0	$E_f \text{ (MPa)}$	200.000	$\tau_0 \text{ (MPa)}$	4,0
$L_1 \text{ (mm)}$	2,90	$f_e \text{ (MPa)}$	1.050	$f$	0,15
$L_2 \text{ (mm)}$	2,10	$E_m \text{ (MPa)}$	35.000	$f_c \text{ (MPa)}$	60,0
$d_f \text{ (mm)}$	0,75	$f_t \text{ (MPa)}$	3,5	$D_{\max} \text{ (mm)}$	13,0

Do thông tin về định hướng không được nêu rõ trong thí nghiệm, từ thông số vật liệu, kết quả thí nghiệm và hình ảnh tiết diện giữa dầm sau thí nghiệm, ta có thể giả thiết sợi định hướng theo chiều dọc dầm với  $\mu_\varphi = \mu_\theta = 0 \text{ (rad)}$  và  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta = 1,0$ . Mô hình đề xuất được áp dụng với chuyển vị mở rộng và chuyển vị trượt biến thiên từ 0 – 3 mm với tỷ số  $s/w = 1$  kết quả được thể hiện ở Hình 6.

Nhìn chung, biến thiên của hàm ứng suất phù hợp với kết quả thực nghiệm. Điểm ứng suất cực đại được ước lượng tương đối tốt. Mô hình cho thấy một ước lượng ứng suất cao hơn kết quả thực nghiệm đối với trường hợp  $v_f = 0,51\%$  và thấp hơn trong hai trường hợp còn lại, đặc biệt là ở chuyển vị bé (nhỏ hơn 1 mm). Điều này có thể giải thích bởi tương tác thứ cấp giữa sợi và bê tông: khi hàm lượng sợi thép tăng, khả năng liên kết vết nứt gia tăng giúp làm chậm tốc độ mở rộng của vết nứt và do đó hiệu ứng “aggregate interlocking” được tăng cường. Mô hình đề xuất tập trung vào ảnh hưởng



của định hướng sợi đến ứng suất liên kết, do đó, tương tác này chưa được xét đến. Tuy nhiên, mô hình cho thấy ước lượng tốt hơn ở các chuyển vị lớn hơn. Kết quả mô phỏng cho thấy tính phù hợp của các tham số đã lựa chọn cũng như tiềm năng sử dụng của mô hình cho các nghiên cứu về sau.



Hình 6. Biến thiên ứng suất tiếp tại tiết diện giữa dầm theo các loại chuyển vị khác nhau

### 3.2. Định lượng mô hình qua biến thiên các tham số

Hai tham số ảnh hưởng đến biến thiên của mô hình là định hướng sợi và tỷ số giữa chuyển vị trượt  $s$  và chuyển vị mở rộng  $w$  sẽ được nghiên cứu trong phần này. Đặc tính của vật liệu cho nghiên cứu tham số này được trình bày trong Bảng 2.

Bảng 2. Đặc trưng cơ học của vật liệu cho nghiên cứu tham số

$L_f$ (mm)	30,0	$E_f$ (MPa)	200.000	$\nu_f$	0,005
$L_1$ (mm)	1,50	$f_y$ (MPa)	2.000	$f$	0,15
$L_2$ (mm)	1,50	$E_m$ (MPa)	36.000	$f_c$ (MPa)	60,0
$d_f$ (mm)	0,38	$D_{\max}$ (mm)	14,0	$\tau_0$ (MPa)	5,0

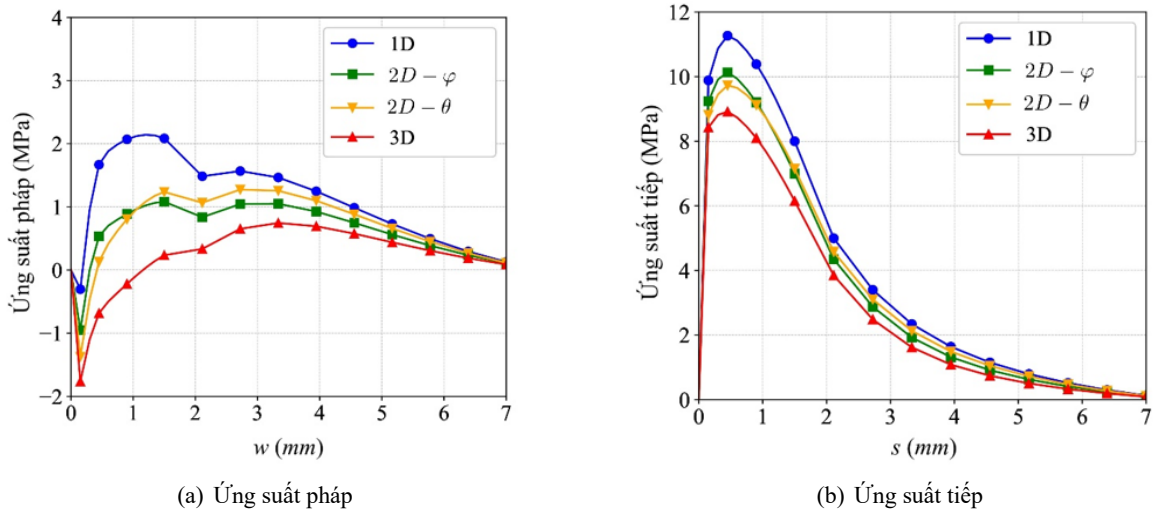
Đối với ảnh hưởng của định hướng sợi, bốn trường hợp định hướng được xem xét bao gồm: (i) đẳng hướng ba chiều (3D), (ii) định hướng hai chiều với góc  $\varphi$  (2D- $\varphi$ ), (iii) định hướng hai chiều với góc  $\theta$  (2D- $\theta$ ) và (iv) định hướng theo 1 phương (1D). Giá trị trung bình của các góc  $\mu_\varphi = \mu_\theta = 0$  (rad), độ lệch chuẩn cho các trường hợp trên được trình bày trong Bảng 3.

Biến thiên của ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong các bốn trường hợp định hướng trên được khảo sát với tỷ lệ giữa hai chuyển vị  $s/w = 1$  (tương ứng  $\gamma = \pi/4$ ), kết quả được thể hiện trên Hình 7.

Bảng 3. Tham số góc cho các trường hợp định hướng

Trường hợp	3D	2D- $\varphi$	2D- $\theta$	1D
$\sigma_\varphi$	100	100	0,05	0,05
$\sigma_\theta$	100	0,05	100	0,05

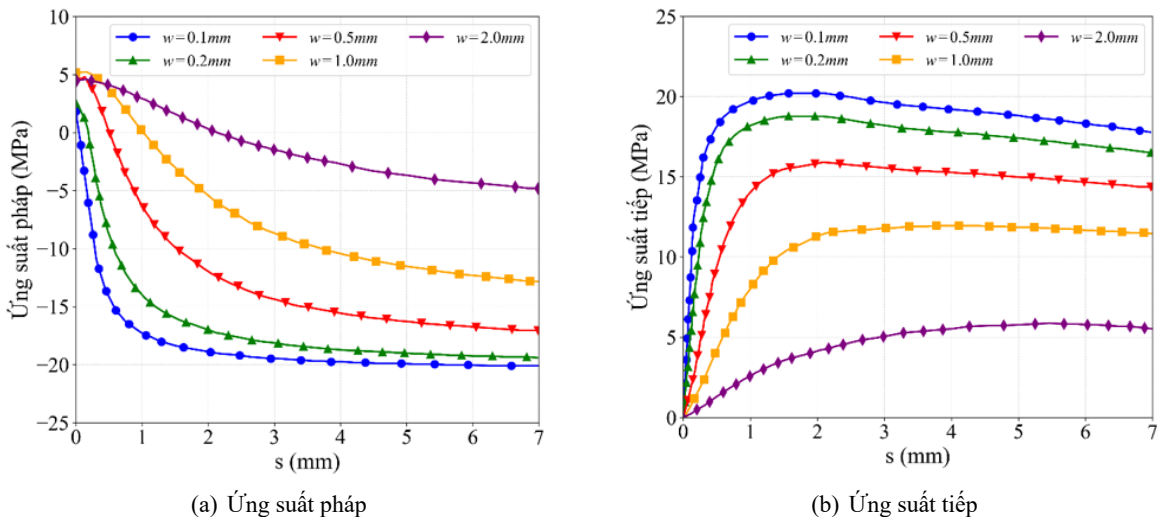




Hình 7. Ảnh hưởng của định hướng sợi tới biến thiên ứng suất liên kết

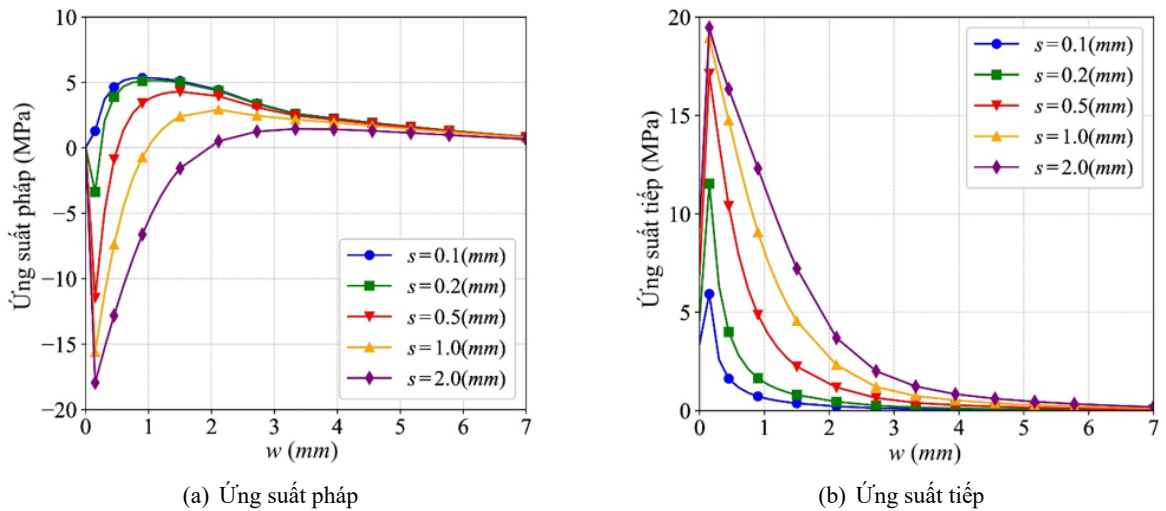
Nhìn chung, ứng suất lan truyền giảm khi hướng sợi phân tán. Ứng suất liên kết pháp tuyến và tiếp tuyến đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp định hướng 1D theo phương pháp tuyến và bé nhất trong trường hợp đẳng hướng ba chiều 3D. Hai trường hợp định hướng hai chiều ( $2D-\varphi$ ) và ( $2D-\theta$ ) cho cùng một cấp độ ứng suất. Điều này cho thấy, ảnh hưởng của định hướng sợi được mô tả hợp lý trong mô hình đề xuất: sợi làm việc hiệu quả trong với một góc nghiêng nhất định theo hai phương  $\varphi$  và  $\theta$ .

Có thể thấy trên Hình 7(a), ứng suất pháp chuyển từ nén sang kéo ở chuyển vị 0,2–0,3 mm. Điều này cho thấy vai trò chủ đạo của hiệu ứng “aggregate interlock” ở vết nứt có bề rộng nhỏ do bê tông truyền ứng suất nén hiệu quả hơn nhiều so với sợi. Khi vết nứt lớn dần, hiệu ứng “aggregate interlock” giảm mạnh, sợi thép đóng vai trò chính trong cơ chế liên kết vết nứt.



Hình 8. Biến thiên của ứng suất liên kết đơn vị trong trường hợp chuyển vị mở rộng được ấn định trước

Tỷ lệ giữa độ trượt  $s$  và độ mở rộng  $w$  đại diện cho mode lan truyền của vết nứt, đây là tham số quan trọng ảnh hưởng tới biến thiên của mô hình. Trong nghiên cứu tham số này, mô hình được áp



Hình 9. Biến thiên của ứng suất liên kết đơn vị trong trường hợp chuyển vị trượt được ấn định trước

dụng cho trường hợp sợi định hướng đều trong ba chiều (3D-uniform). Ứng suất liên kết pháp tuyến và tiếp tuyến được khảo sát với năm giá trị ấn định trước của chuyển vị trượt  $s = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0$  và  $2,0$  mm trong khi chuyển vị mở rộng biến thiên từ  $0 \leq w \leq 7$  mm và ngược lại. Biến thiên của mô hình được thể hiện trong Hình 8 và Hình 9.

Có thể thấy trên Hình 8(b) và 9(b), ứng suất tiếp tăng mạnh khi tỷ số chuyển vị  $s/w$  tăng ( $w$  nhỏ hoặc  $s$  lớn) hay thành phần cắt lớn hơn thành phần kéo. Ứng suất tiếp do hiện tượng “aggregate interlock” gây ra tăng theo tỷ số chuyển vị [25], đồng thời, tỷ số chuyển vị lớn dẫn đến sợi uốn một góc lớn hơn  $\beta$  (do góc  $\gamma$  tăng), do đó nhiều sợi tham gia chịu lực hơn. Hai điều này là nguyên nhân chính cho sự gia tăng của lực cắt trong mô hình.

Như biểu diễn trên Hình 9(a), ứng suất pháp chuyển từ kéo sang nén và duy trì ở độ trượt lớn được giải thích bằng việc, độ mở rộng  $w$  tương đối nhỏ so với kích thước của cốt liệu, do đó, hiệu ứng “aggregate interlock” duy trì vai trò chủ đạo trong lan truyền ứng suất. Trong trường hợp chuyển vị trượt ấn định trước (Hình 9(b)), ứng suất pháp chuyển từ nén sang kéo, phù hợp với tình trạng mở rộng của vết nứt. Ứng suất nén xuất hiện ở độ mở rộng nhỏ và chuyển rất nhanh thành ứng suất kéo một lần nữa khẳng định vai trò chủ đạo của hiệu ứng “aggregate interlock” ở vết nứt nhỏ.

#### 4. Kết luận

Bài báo đã phát triển một mô hình giải tích cho phép ước lượng ứng suất liên kết tại vết nứt của bê tông cốt sợi thép có xét tới ảnh hưởng của định hướng sợi trong trường hợp có chuyển vị trượt tương đối giữa hai mép vết nứt. Trong mô hình này, hai thành phần của ứng suất lan truyền là tổ hợp tuyến tính của ứng suất liên kết của sợi và ứng suất liên kết của bê tông do hiện tượng “aggregate interlocking”. Ứng suất liên kết của sợi được biểu diễn dưới dạng hàm giải tích với tham số là các đặc trưng vật liệu. Ảnh hưởng của định hướng sợi được tham số hóa bằng cách biểu diễn thông qua một hàm thống kê dạng Gaussian hai biến trên tọa độ phương vị. Ứng suất liên kết của bê tông do hiệu ứng “aggregate interlocking” được biểu diễn thông qua hàm giải tích phụ thuộc vào cường độ của bê tông và kích thước cốt liệu.

Mô phỏng trên trường hợp thí nghiệm cắt trực tiếp cho thấy ước lượng tương đối hợp lý của mô hình đối với ứng suất sau nứt. Tuy nhiên, ước lượng của mô hình vẫn còn một độ lệch nhất định tương ứng với chuyển vị nhỏ của vết nứt, cho thấy việc diễn giải tương tác giữa hàm lượng sợi và bê tông

dưới tác dụng cắt cần phải được cải thiện hơn. Một hiệu chỉnh của hàm ứng suất đối với hiện tượng “aggregate interlocking” có thể cần phải được xem xét đến để tối ưu mô hình trong tương lai.

Nghiên cứu tham số cho thấy mô hình có khả năng phản ánh tốt các quan sát thực nghiệm về ảnh hưởng của định hướng sợi. Do mô hình được viết dưới dạng hàm giải tích với hai hàm ứng suất pháp và ứng suất tiếp nên mô hình có nhiều tiềm năng: hàm ứng suất có thể được sử dụng trực tiếp cho các phần tử liên kết trong các mô hình phần tử hữu hạn cục bộ hoặc sử dụng như một cách tính toán năng lượng phát sinh khi nứt theo từng mode phá hủy.

Do thiếu dữ liệu về ảnh hưởng của định hướng sợi tới ứng suất liên kết, các giá trị của hàm phân phối định hướng sợi có thể được diễn giải chưa chính xác. Những nghiên cứu thực nghiệm về ảnh hưởng của định hướng sợi, với các thông tin thống kê chi tiết hơn về định hướng của sợi là rất cần thiết cho việc hiệu chỉnh và phát triển mô hình đề xuất.

### Tài liệu tham khảo

- [1] Bentur, A., Mindess, S. (2006). *Fibre Reinforced Cementitious Composites*. 2nd edition, CRC Press.
- [2] Hoan, P. T., Thuong, N. T. (2019). [Shear resistance of ultra-high-performance concrete reinforced with hybrid steel fiber subjected to impact loading](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(1):12–20.
- [3] Quan, T. V., Linh, N. N., Tan, N. N. (2023). [Investigating compressive strength of concrete containing steel fiber by data-driven approach](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 17(3):65–79.
- [4] Rossi, P. (1998). *Les bétons de fibres métalliques*. Presses De L'ENPC.
- [5] Dinh, H. H. (2010). *Shear behavior of steel fiber reinforced concrete beams without stirrup reinforcement*. PhD Thesis, University of Michigan.
- [6] Laranjeira de Oliveira, F. (2010). *Design-oriented constitutive model for steel fiber reinforced concrete*. PhD Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya.
- [7] Blanco, A., Pujadas, P., de la Fuente, A., Cavalaro, S. H. P., Aguado, A. (2015). [Assessment of the fibre orientation factor in SFRC slabs](#). *Composites Part B: Engineering*, 68:343–354.
- [8] Boulekbache, B., Hamrat, M., Chemrouk, M., Amziane, S. (2012). [Influence of yield stress and compressive strength on direct shear behaviour of steel fibre-reinforced concrete](#). *Construction and Building Materials*, 27(1):6–14.
- [9] Doyon-Barbant, J., Charron, J.-P. (2018). [Impact of fibre orientation on tensile, bending and shear behaviors of a steel fibre reinforced concrete](#). *Materials and Structures*, 51(6).
- [10] Lantsoght, E. O. L. (2019). [How do steel fibers improve the shear capacity of reinforced concrete beams without stirrups?](#) *Composites Part B: Engineering*, 175:107079.
- [11] Li, V. C., Wang, Y., Backer, S. (1991). [A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites](#). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(5):607–625.
- [12] Laranjeira, F., Aguado, A., Molins, C., Grünewald, S., Walraven, J., Cavalaro, S. (2012). [Framework to predict the orientation of fibers in FRC: A novel philosophy](#). *Cement and Concrete Research*, 42(6): 752–768.
- [13] Eik, M. (2014). *Orientation of short steel fibres in concrete: measuring and modelling*. PhD Thesis, Aalto University.
- [14] Cong, V. C., Tam, V. D. (2023). [An analytical approach to predict post-cracking behavior of steel fiber reinforced concrete considering the fibers orientation](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 17(3):114–127.
- [15] Bažant, Z. P., Gambarova, P. (1980). [Rough Cracks in Reinforced Concrete](#). *Journal of the Structural Division*, 106(4):819–842.
- [16] Kaufmann, W., Amin, A., Beck, A., Lee, M. (2019). [Shear transfer across cracks in steel fibre reinforced concrete](#). *Engineering Structures*, 186:508–524.

- [17] Lee, G. G., Foster, S. J. (2007). *Behaviour of steel fibre reinforced mortar in shear III : variable engagement model II*. University of New South Wales, School of Civil and Environmental Engineering, Sydney.
- [18] Ng, T. S., Htut, T. N. S., Foster, S. J. (2012). *Fracture of Steel Fibre Reinforced Concrete - The Unified Variable Engagement Model*. University of New South Walesjira.
- [19] Barros, J. A. O., Foster, S. J. (2018). [An integrated approach for predicting the shear capacity of fibre reinforced concrete beams](#). *Engineering Structures*, 174:346–357.
- [20] Soetens, T., Matthys, S. (2017). [Shear-stress transfer across a crack in steel fibre-reinforced concrete](#). *Cement and Concrete Composites*, 82:1–13.
- [21] Yang, E.-H., Wang, S., Yang, Y., Li, V. C. (2008). [Fiber-Bridging Constitutive Law of Engineered Cementitious Composites](#). *Journal of Advanced Concrete Technology*, 6(1):181–193.
- [22] Foster, S. J., Lee, G. G., Htut, T. N. S. (2007). Radiographic imaging for the observation of modes I and II fracture in fibre reinforced concrete. *The 6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*, 1457–1465.
- [23] Zhang, J., Li, V. C. (2002). [Effect of inclination angle on fiber rupture load in fiber reinforced cementitious composites](#). *Composites Science and Technology*, 62(6):775–781.
- [24] Leung, C. K. Y., Li, V. C. (1992). [Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites](#). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6):1333–1362.
- [25] Walraven, J. C. (1980). *Aggregate interlock: a theoretical and experimental analysis*. Delft University Press.
- [26] Gambarova, P. G., Karakoç, C. (1983). A new approach to the analysis of the confinement role in regularly cracked concrete elements. *International Association for Structural Mechanics in Reactor Technology* editor, Amsterdam: North-Holland Physics Publ, Chicago, USA, IASMiRT.
- [27] Li, B. (1989). Contact density model for stress transfer across cracks in concrete. *Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo*, (1):9–52.
- [28] Khanlou, A., MacRae, G. A., Scott, A. N., Hicks, S. J., Clifton, G. C. (2013). Shear performance of steel fibre-reinforced concrete. *Steel Innovations Conference, Christchurch*, New Zealand.