

# PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA TẤM FGM XÓP BẢO HÒA CHẤT LƯU CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Nguyễn Văn Long<sup>a</sup>, Nguyễn Văn Lợi<sup>a,\*</sup>, Trần Văn Bình<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

<sup>b</sup>*Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hà Tĩnh, xã Cẩm Vịnh, huyện Cẩm Xuyên, tỉnh Hà Tĩnh, Việt Nam*

*Nhận ngày 15/5/2023, Sửa xong 01/7/2023, Chấp nhận đăng 04/7/2023*

## Tóm tắt

Bài báo phân tích dao động riêng và đáp ứng chuyển vị của của tấm chữ nhật đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động. Tấm làm bằng vật liệu FGM xốp (functionally graded porous material) bảo hòa chất lưu. Các tính chất cơ học của vật liệu FGM xốp biến đổi tron theo chiều dày tấm với ba dạng phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng. Phương trình chủ đạo của tấm được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton, lý thuyết đàn hồi cho vật liệu FGM xốp bảo hòa chất lưu của Biot, và lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy. Nghiệm giải tích dạng Navier được thiết lập cho bài toán tấm chịu tải trọng di động, có biên tựa khớp trên chu vi. Trong phần kết quả số, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học tấm, nền đàn hồi, hệ số Skempton, vận tốc tải trọng di động đến các đặc trưng động của tấm được khảo sát. Một số kết luận từ nghiên cứu này sẽ hữu ích cho công tác tính toán, thiết kế, và ứng dụng kết cấu dạng này trong thực tế.

*Từ khoá:* Phân tích dao động riêng; phân tích đáp ứng động; tấm FGM xốp; bảo hòa chất lỏng; lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy; lời giải Navier.

## VIBRATION ANALYSIS OF SATURATED FUNCTIONALLY GRADED POROUS PLATES SUBJECTED TO A MOVING LOAD

### Abstract

This work analyzes free vibration and dynamic response of plates resting on an elastic foundation, subjected to a moving load. The plate is made of saturated functionally graded porous material. The material properties are assumed to vary smoothly along the thickness direction with three porosity distribution patterns: uniform, symmetric and asymmetric distributions. The governing equations of the plate are developed using Hamilton's principle, Biot's poroelasticity theory, and Reddy's third-order shear deformation theory (Reddy's TSDT). A Navier-type solution is presented for the FGP plate with simply supported boundary conditions. The effects of porosity distribution patterns, porosity coefficient, geometric parameters, elastic foundations, Skempton coefficient, and moving load velocity on dynamic characteristics of the FGP plate are investigated. Some conclusions given will be useful for the calculation, design, and application of the structure in practice.

*Keywords:* Free vibration analysis; dynamic response; functionally graded porous plate; saturated fluid; Reddy's TSDT; Navier's solution.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17\(4V\)-06](https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(4V)-06) © 2023 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Mở đầu

Những năm gần đây, vật liệu FGM xốp (functionally graded porous material) nhận được nhiều sự chú ý của các nhà nghiên cứu như là một loại vật liệu tiên tiến được sử dụng trong kỹ thuật hàng không, công nghiệp và xây dựng do nó sở hữu nhiều đặc tính nổi trội như: trọng lượng nhẹ, khả năng tiêu tán năng lượng tốt, hệ số dẫn nhiệt và dẫn điện thấp, dễ gia công và tái chế. Loại vật liệu này gồm

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [loinv@huce.edu.vn](mailto:loinv@huce.edu.vn) (Lợi, N. V.)

hai pha: pha rắn và pha lỏng hoặc khí (chất lưu) thường tồn tại trong tự nhiên như gỗ, đá, các lớp cát, v.v. [1]. Trong cấu trúc vật liệu, các lỗ rỗng có thể phân bố liên tục trong không gian, điều này làm cho cơ tính vật liệu cũng thay đổi liên tục theo một phương nhất định, vì thế vật liệu này được xếp vào loại vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded materials - FGMs).

Theo cách tiếp cận đơn giản, một số nghiên cứu bỏ qua ảnh hưởng của pha lỏng hoặc khí (chất lưu) mà chỉ phân tích ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng cũng như hệ số rỗng đến ứng xử tĩnh và động của kết cấu FGM xốp [2–7]. Để thực tế hơn, một số nghiên cứu có tính đến ảnh hưởng áp suất chất lưu trong các lỗ rỗng đến ứng xử tĩnh, động và ổn định của kết cấu làm bằng vật liệu FGM xốp bão hòa chất lưu [1, 8–14]. Chẳng hạn như, Leclair và cs. [8] nghiên cứu dao động uốn của tấm mỏng FGM xốp bão hòa chất lưu. Sử dụng dạng nghiệm Levy, Rezaei và Saidi [9] phân tích dao động tự do của tấm FGM xốp bão hòa chất lưu dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Xiang và cs. [10] sử dụng lý thuyết đàn hồi Biot để nghiên cứu đặc trưng động lực học của tấm chữ nhật FGM xốp bão hòa chất lưu với các điều kiện biên khác nhau. Dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết đàn hồi Biot, Arani và cs. [11] tính toán tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Bằng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, phương pháp vi phân cầu phương tổng quát (generalized differential quadrature method), Khouzestani và Khorshidvand [12] phân tích ứng suất và dao động riêng của tấm FGM xốp hình vành khuyên bão hòa chất lưu. Gần đây, Lixian [13] khảo sát đặc trưng động lực học của tấm chữ nhật FGM xốp bão hòa chất lưu, có biên tựa khớp trên chu vi. Ngoài ra, Mojahedin và cs. [1, 14] khảo sát ứng xử ổn định cơ và nhiệt của tấm tròn FGM xốp bão hòa chất lưu trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

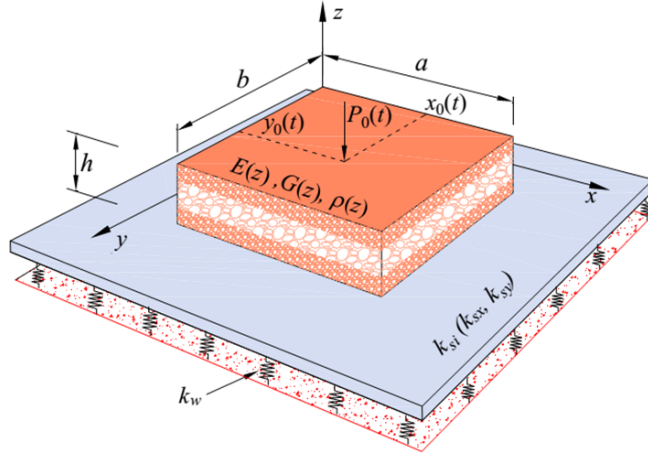
Hiện nay có khá nhiều lý thuyết tấm được đề xuất [15–17]. Lý thuyết ra đời sớm nhất là lý thuyết tấm cổ điển, tuy nhiên lý thuyết này chỉ phù hợp với tấm mỏng do không kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt theo phương chiều dày. Để khắc phục nhược điểm của lý thuyết tấm cổ điển, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất được giới thiệu, lý thuyết này phù hợp cho tấm có chiều dày trung bình. Lưu ý rằng, ảnh hưởng của biến dạng cắt được kể đến trong lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, tuy nhiên biến dạng cắt được giả thiết là hằng số trên suốt chiều dày tấm. Do đó hệ số hiệu chỉnh cắt cần được sử dụng cho lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt rất phức tạp phụ thuộc vào nhiều yếu tố như vật liệu, tải trọng, điều kiện biên,... Do đó, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất cùng với giả thiết là các thành phần biến dạng có thể là hàm bậc cao của tọa độ chiều dày. Về cơ bản, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có thể cung cấp các kết quả chính xác hơn các lý thuyết bậc nhất và cổ điển. Trong các lý thuyết bậc cao, thì lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy là lý thuyết được sử dụng rộng rãi vì sự đơn giản và hiệu quả tính toán. Do vậy, trong bài báo này, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy được sử dụng để tính toán.

Từ những phân tích tổng quan nêu trên có thể thấy rằng, các nghiên cứu về phân tích dao động và đáp ứng chuyển vị của kết cấu tấm FGM xốp bão hòa chất lưu (có kể đến ảnh hưởng áp suất chất lưu trong các lỗ rỗng) chịu tải trọng di động còn khá hiếm. Do đó, bài báo này sẽ xây dựng nghiệm giải tích để tính toán tần số dao động riêng và đáp ứng chuyển vị của tấm như vậy có biên tựa khớp trên chu vi, dùng lý thuyết bậc ba của Reddy. Cũng lưu ý rằng, phương trình chuyển động của tấm được thiết lập trên cơ sở kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy và thuyết đàn hồi Biot cho vật liệu FGM xốp ở trạng thái bão hòa chất lưu. Sau khi kiểm chứng kết quả số, các ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học tấm, hệ số nền đàn hồi và hệ số Skempton, vận tốc di chuyển của tải trọng di động đến các đặc trưng động (tần số, đáp ứng chuyển vị) của tấm FGM xốp sẽ được khảo sát.

## 2. Mô hình tấm bằng vật liệu FGM xốp

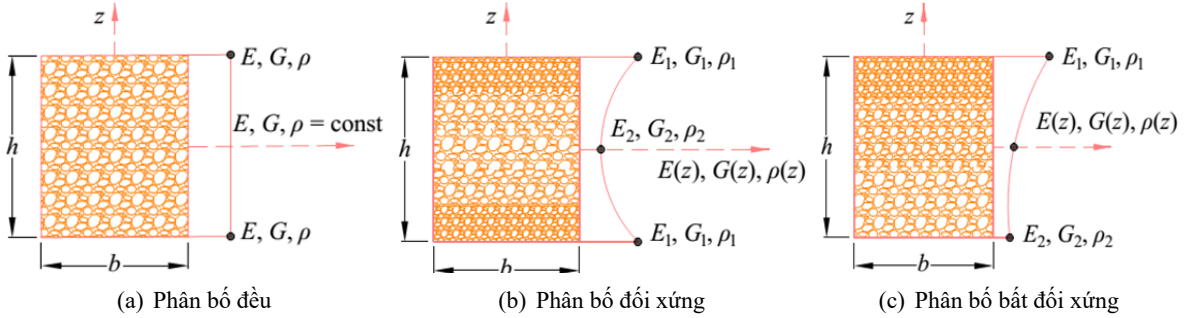
Xét tấm chữ nhật có chiều dày  $h$ , kích thước theo các phương  $x, y$  là  $a$  (chiều dài),  $b$  (chiều rộng). Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số nền:  $k_w$  - hệ số độ cứng uốn (Winkler

stiffness),  $k_{si}$  ( $i = x, y$ ) - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness) và chịu tác dụng của lực tập trung di động  $P_0(t)$  có điểm đặt  $(x_0(t), y_0(t))$ .



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật vật liệu rỗng trên nền đàn hồi

Tấm làm bằng vật liệu FGM xốp, ba quy luật phân bố lỗ rỗng theo chiều dày tấm được xét là phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và không đều bất đối xứng, như minh họa trên Hình 2.



Hình 2. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng của tấm FGM xốp

Các đặc trưng cơ học vật liệu FGM xốp được giả thiết là biến thiên liên tục theo chiều dày tấm, tuân theo ba quy luật sau [5, 18, 19]:

- Phân bố đều:

$$\{E, G\} = \{E_1, G_1\} (1 - e_0 \chi); \quad \rho = \rho_1 \sqrt{1 - e_0 \chi}; \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (1)$$

- Phân bố không đều đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right] \quad (2)$$

- Phân bố không đều bất đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[ 1 - e_m \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3)$$

trong đó:  $E_1, G_1, \rho_1$  và  $E_2, G_2, \rho_2$  lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng của vật liệu;  $G_i = E_i / [2(1 + \nu)]$ ;  $i = 1, 2$ . Hệ số

Poisson được coi là không thay đổi theo chiều dày tấm:  $\nu = \text{const}$ . Hệ số độ rỗng mật độ lỗ rỗng  $e_0$  và hệ số mật độ khối lượng  $e_m$  được xác định bởi:

$$e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1; \quad e_m = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (0 < e_0, e_m < 1) \quad (4)$$

### 3. Các hệ thức quan hệ - hệ phương trình chủ đạo

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  của điểm bất kỳ trong không gian tám biểu diễn dưới dạng [20]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) - \kappa z^3 \left( \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right); \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) - \kappa z^3 \left( \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right); \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó:  $\kappa = \frac{4}{3h^2}$ ;  $t$  là biến thời gian;  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương  $x, y, z$ ;  $\theta_x, \theta_y$  là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh các trục  $y, x$ .

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được từ quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = (1 - 3\kappa z^2) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} = -\kappa \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Đối với vật liệu FGM xốp, các lỗ rỗng chứa chất lưu, quan hệ ứng suất-biến dạng tuân theo lý thuyết đàn hồi của Biot [21, 22]:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda_u \theta \delta_{ij} - p\varphi \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

trong đó:  $\sigma_{ij}$  và  $\varepsilon_{ij}$  tương ứng là các thành phần ứng suất và biến dạng;  $\delta_{ij}$  là chỉ số Kronecker;  $\theta$  là biến dạng thể tích tỷ đối ( $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ );  $\varphi$  là hệ số Biot của ứng suất hiệu dụng;  $p$  là áp suất chất lỏng trong lỗ rỗng;  $\lambda_u$  là hằng số Lamé. Các hệ số  $\varphi, p, \lambda_u$  được xác định bởi [22, 23]:

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 - \frac{G}{G_1}; \quad p = M(\xi - \varphi\theta); \quad \lambda_u = \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u}G; \\ M &= \frac{2G(\nu_u - \nu)}{\varphi^2(1 - 2\nu_u)(1 - 2\nu)}; \quad \nu_u = \frac{\nu + \varphi B(1 - 2\nu)/3}{1 - \varphi B(1 - 2\nu)/3} \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó:  $\xi$  là biến thiên của thể tích chất lỏng,  $M$  là mô đun Biot,  $\nu_u$  là hệ số Poisson khi bão hòa chất lưu, và  $B$  là hệ số Skempton ( $0 < B < 1$ ), hệ số này phản ánh mức độ bão hòa chất lưu. Với tấm bão hòa chất lưu ( $\xi = 0$ ), bỏ qua ứng suất pháp theo phương chiều dày ( $\sigma_z = 0$ ), quan hệ ứng suất - biến dạng (7) có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

với:

$$Q_{11} = Q_{22} = k_1 G(z); \quad Q_{12} = Q_{21} = k_2 G(z); \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z);$$

$$k_1 = 2 \frac{1 - 4\nu + 2\nu_u}{1 - 3\nu_u + 2\nu_u\nu}; \quad k_2 = 2 \frac{-\nu + 2\nu_u(1 - \nu)}{1 - 3\nu_u + 2\nu_u\nu}$$

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm, ta nhận được các thành phần nội lực như sau:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

trong đó:

$$(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz, \quad ij = 11, 12, 21, 22, 66;$$

$$A_s = \int_{-h/2}^{h/2} G(z)(1 - 3\kappa z^2)^2 dz$$

Hệ phương trình chuyển động của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy có dạng [24]

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 + J_1 \ddot{\theta}_x - \kappa I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x};$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 + J_1 \ddot{\theta}_y - \kappa I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 &: \kappa \left( \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \\
 &\quad - k_w w_0 + k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - P_0(t) \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) \\
 &= \kappa I_3 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_0 \ddot{w}_0 - \kappa^2 I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + \kappa J_4 \left( \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right); \\
 \delta \theta_x &: \frac{\partial M_x}{\partial x} - \kappa \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \kappa \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - R_x = J_1 \ddot{u}_0 - \kappa J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x; \\
 \delta \theta_y &: \frac{\partial M_y}{\partial y} - \kappa \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \kappa \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - R_y = J_1 \ddot{v}_0 - \kappa J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y
 \end{aligned}$$

trong đó, tải trọng di động là lực tập trung có trị số không đổi ( $P_0(t) = F$ ) được nghiên cứu trong bài báo này;  $\delta(\cdot)$  là hàm Dirac delta,  $(x_0(t), y_0(t))$  là vị trí tác dụng của tải trọng di động. Các mô men quán tính:

$$\begin{aligned}
 (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz; \\
 J_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho f_z dz = I_1 - \kappa I_3; \quad J_4 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^3 f_z dz = I_4 - \kappa I_6; \\
 K_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho f_z^2 dz = I_2 - 2\kappa I_4 + \kappa^2 I_6
 \end{aligned} \tag{12}$$

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực và chuyển vị từ quan hệ (10) vào (11), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$\begin{aligned}
 &A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \kappa D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \kappa (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 &+ (B_{11} - \kappa D_{11}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66} - \kappa D_{12} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \\
 &= I_0 \ddot{u}_0 + J_1 \ddot{\theta}_x - \kappa I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}; \\
 &(A_{21} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \kappa (D_{21} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - \kappa D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 &+ (B_{21} + B_{66} - \kappa D_{21} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + (B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{22} - \kappa D_{22}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \\
 &= I_0 \ddot{v}_0 + J_1 \ddot{\theta}_y - \kappa I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y}; \\
 &\kappa D_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \kappa (D_{21} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \kappa (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \kappa D_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 &- \kappa^2 G_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \kappa^2 (G_{12} + G_{21} + 4G_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - \kappa^2 G_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + A^s \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 &+ \kappa (E_{11} - \kappa G_{11}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \kappa (E_{21} + 2E_{66} - \kappa G_{21} - 2\kappa G_{66}) \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} + A^s \frac{\partial \theta_x}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa(E_{12} + 2E_{66} - \kappa G_{12} - 2\kappa G_{66}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \kappa(E_{22} - \kappa G_{22}) \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + A^s \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\
 & -k_w w_0 + k_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - P_0(t) \delta(x - x_0(t)) \delta(y - y_0(t)) \\
 & = \kappa I_3 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) + I_0 \ddot{w}_0 - \kappa^2 I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) + \kappa J_4 \left( \frac{\partial \ddot{\theta}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\theta}_y}{\partial y} \right); \\
 & (B_{11} - \kappa D_{11}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} - \kappa D_{12} + B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
 & - (\kappa E_{11} - \kappa^2 G_{11}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (\kappa E_{12} - \kappa^2 G_{12} + 2\kappa E_{66} - 2\kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - A^s \frac{\partial w_0}{\partial x} + (C_{11} - 2\kappa E_{11} + \kappa^2 G_{11}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A^s \theta_x \\
 & + (C_{12} - 2\kappa E_{12} + \kappa^2 G_{12} + C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \\
 & = J_1 \ddot{u}_0 - \kappa J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + K_2 \ddot{\theta}_x; \\
 & (B_{21} - \kappa D_{21} + B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + (B_{66} - \kappa D_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{22} - \kappa D_{22}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & - (\kappa E_{21} - \kappa^2 G_{21} + 2\kappa E_{66} - 2\kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (\kappa E_{22} - \kappa^2 G_{22}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - A^s \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 & + (C_{21} - 2\kappa E_{21} + \kappa^2 G_{21} + C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \\
 & + (C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (C_{22} - 2\kappa E_{22} + \kappa^2 G_{22}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - A^s \theta_y \\
 & = J_1 \ddot{v}_0 - \kappa J_4 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + K_2 \ddot{\theta}_y
 \end{aligned}$$

#### 4. Lời giải Navier

Xét tấm chữ nhật vật liệu FGM xốp có chiều dài  $a$  và chiều rộng  $b$  liên kết khớp trên các cạnh, chịu tác dụng của tải trọng di động  $P_0(t)$ . Các biểu thức điều kiện biên của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, bao gồm:

- Tại  $x = 0$  và  $x = a$ :

$$v_0 = 0, w_0 = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x^* = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0, M_x = 0 \quad (14)$$

- Tại  $y = 0$  và  $y = b$ :

$$u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y^* = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, M_y = 0 \quad (15)$$

Dạng nghiệm Navier thỏa mãn các điều kiện biên (14)–(15), có dạng như sau:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y; & v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y; \\
 w_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y; & \theta_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y; \\
 \theta_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y
 \end{aligned} \quad (16)$$

trong đó:  $\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}; m, n = 1, 2, 3, \dots; u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}$  là các hệ số phụ thuộc thời gian cần xác định. Tải trọng di động  $P_0(t)$  tại vị trí:  $x = x_0(t), y = y_0(t)$  cũng được khai triển dưới dạng chuỗi lượng giác kép tương tự, như sau:

$$P_0(t)\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t)) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \quad (17)$$

với:

$$\begin{aligned} P_{mn}(t) &= \frac{1}{4ab} \int_0^a \int_0^b P_0(t)\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t)) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \\ &= \frac{P_0(t)}{4ab} \sin \alpha x_0(t) \sin \beta y_0(t) \end{aligned}$$

Thay (16) và (17) vào hệ phương trình chuyển động tổng quát theo chuyển vị (13), nhóm các hệ số để được hệ phương trình đại số dưới dạng:

$$[K_{mn}] \{Q_{mn}(t)\} + [M_{mn}] \{\ddot{Q}_{mn}(t)\} = \{F_{mn}(t)\} \quad (18)$$

trong đó  $[K_{mn}], [M_{mn}], \{Q_{mn}\}, \{F_{mn}\}$  tương ứng là ma trận độ cứng kết cấu, ma trận khối lượng, véc tơ các hệ số chuyển vị và véc tơ tải trọng. Chi tiết các biểu thức như sau:

$$[K_{mn}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix}; \quad [M_{mn}] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} \end{bmatrix};$$

$$\{Q_{mn}\} = \begin{Bmatrix} u_{0mn}(t) \\ v_{0mn}(t) \\ w_{0mn}(t) \\ \theta_{xmn}(t) \\ \theta_{ymn}(t) \end{Bmatrix}; \quad \{F_{mn}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_{mn}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Các số hạng  $s_{ij}, m_{ij}$  của ma trận độ cứng kết cấu  $[K_{mn}]$  và ma trận khối lượng  $[M_{mn}]$  được thể hiện trong Phụ lục.

Hệ phương trình (18) được dùng để phân tích đáp ứng động lực học của tấm FGM xốp. Phương pháp Runge-Kutta với các điều kiện ban đầu  $\{Q_{mn}(0)\} = \{0\}; \{\dot{Q}_{mn}(0)\} = \{0\}$  sẽ được áp dụng để nhận được đáp ứng của chuyển vị theo thời gian.

Đối với bài toán phân tích dao động riêng, cho  $P_0 = 0$ , bằng cách giả thiết véc tơ các hệ số chuyển vị  $\{Q_{mn}(t)\} = \{\bar{Q}_{mn}\} e^{i\omega_{mn}t}$ , ta xác định được tần số dao động riêng của tấm từ việc giải định thức:

$$\det([K_{mn}] - \omega_{mn}^2 [M_{mn}]) = 0 \quad (19)$$

Nghiệm của phương trình (19) là tần số dao động riêng  $\omega_{mn}$  tương ứng với nó là dạng dao động  $(m, n)$  của tấm. Tần số dao động riêng cơ bản được xác định bởi:

$$\omega_0 = \min \{\omega_{mn}\} \quad (20)$$



### 5. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở mục trước, chương trình tính toán trên nền MATLAB được viết để thực hiện các ví dụ số. Tấm chữ nhật làm bằng vật liệu FGM xếp, đặt trên nền đàn hồi Pasternak, có liên kết khớp trên 4 cạnh. Trừ khi có ghi chú khác, trong các mục khảo sát số, vật liệu FGM xếp được đề cập là bọt nhôm (Aluminum foam) với các đặc trưng cơ học vật liệu bao gồm:  $\rho_1 = 2707 \text{ kg/m}^3$ ;  $G_1 = 26,293 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $E_1 = 2G_1 (1 + \nu)$  [25]. Một số công thức không thứ nguyên được sử dụng trong bài báo này là:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}; \quad K_0 = k_w \frac{a^4}{E_0 h^3}; \quad J_0 = k_{sx} \frac{a^2}{E_0 h^3 \nu} = k_{sy} \frac{b^2}{E_0 h^3 \nu}; \quad E_0 = 1 \text{ GPa};$$

$$W(t) = w_0 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t \right); \quad t^* = \frac{\nu_0 t}{a} \tag{21}$$

#### 5.1. Ví dụ kiểm chứng

Bảng 1 trình bày các tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm vuông làm bằng vật liệu FGM xếp (bọt nhôm) phân bố bất đối xứng với các hệ số rỗng khác nhau cho hai trường hợp tỷ số kích thước tấm:  $a/h = 5$  và  $a/h = 10$ . Các kết quả của bài báo được kiểm chứng với nghiên cứu của nhóm tác giả Rezaei và Saidi [25] sử dụng phương pháp không gian trạng thái và lý thuyết bậc cao Carrera, và kiểm chứng với nghiên cứu của Thang và cs. [3] sử dụng dạng nghiệm Navier và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Các kết quả tính toán tần số dao động cơ bản trong bài báo theo lý thuyết hiện tại (lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy) cho thấy sự tương đồng với các công bố của Rezaei và Saidi [25], và Thang và cs. [3].

Bảng 1. Kiểm chứng tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm vuông làm bằng vật liệu FGM xếp với phân bố bất đối xứng

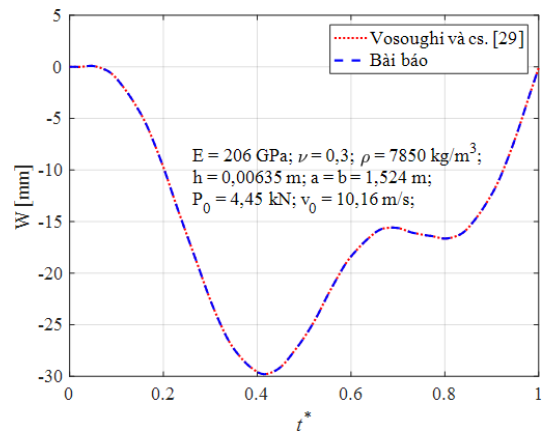
Nguồn	$e_0 = 0,1$	$e_0 = 0,3$	$e_0 = 0,5$	$e_0 = 0,7$
$a/h = 5$				
Rezaei và Saidi [25]	0,2091	0,2020	0,1931	0,1804
Thang và cs. [3]	0,2138	0,2067	0,1978	0,1853
Bài báo	0,2074	0,2004	0,1916	0,1791
$a/h = 10$				
Rezaei và Saidi [25]	0,0570	0,0551	0,0526	0,0491
Thang và cs. [3]	0,0574	0,0555	0,0531	0,0495
Bài báo	0,0568	0,0549	0,0525	0,0489

Ví dụ tiếp theo, các kết quả tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm chữ nhật bằng vật liệu FGM xếp phân bố bất đối xứng, ở trạng thái bão hòa chất lưu, được kiểm chứng và trình bày trong Bảng 2. Tấm làm bằng vật liệu FGM xếp (Sandstone), phân bố không đều bất đối xứng có các tham số đầu vào:  $E_1 = 69 \text{ GPa}$ ;  $\rho_1 = 2260 \text{ kg/m}^3$ ;  $\nu = 0,25$  [8];  $e_0 = 0$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ , liên kết khớp trên chu vi tấm, với các tỷ số kích thước tấm  $a/h = 5; 10; 20$  được xét. Cần lưu ý là, các kết quả trong bài báo được so sánh với nhóm tác giả Ebrahimi và Habibi [26] sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn. Rõ ràng là, với cả 3 trường hợp tỷ số kích thước tấm  $a/h$  và các hệ số Skempton khác nhau, các kết quả của bài báo đều phù hợp với kết quả của Ebrahimi và Habibi [26].

Bảng 2. Kiểm chứng tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm vuông vật liệu FGM xếp phân bố bất đối xứng, bão hòa chất lưu

$B$	Nguồn	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$
0,1	Ebrahim và Habibi [26]	0,21275	0,05783	0,01473
	Bài báo	0,20994	0,05731	0,01470
0,3	Ebrahim và Habibi [26]	0,21563	0,05876	0,01495
	Bài báo	0,21276	0,05818	0,01493
0,5	Ebrahim và Habibi [26]	0,21857	0,05954	0,01526
	Bài báo	0,21549	0,05903	0,01516
0,7	Ebrahim và Habibi [26]	0,22162	0,06055	0,01549
	Bài báo	0,21812	0,05985	0,01538

Ví dụ tiếp theo, đáp ứng độ võng tại tâm tấm theo thời gian của tấm vuông mỏng chịu tải trọng di động được kiểm chứng và thể hiện như trên Hình 3. Tấm làm bằng vật liệu đẳng hướng với các tham số vật liệu:  $E = 206 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,3$ ; và tải trọng di động:  $P_0 = 4,45 \text{ kN}$ , di chuyển dọc theo phương  $x$ :  $x_0(t) = v_0 t$ ,  $y_0 = \frac{b}{2}$ ; với vận tốc là  $v_0 = 10,16 \text{ m/s}$  [27]. Kết quả cho thấy đường cong đáp ứng độ võng tại tâm tấm của bài báo (đường nét đứt, màu xanh) trùng khớp với kết quả nghiệm giải tích theo mô hình lý thuyết tấm cổ điển của Vosoughi và cs. [28] (đường chấm, màu đỏ), như thể hiện trên Hình 3.



Hình 3. Đáp ứng độ võng theo thời gian của tấm vuông đẳng hướng chịu tải trọng di động

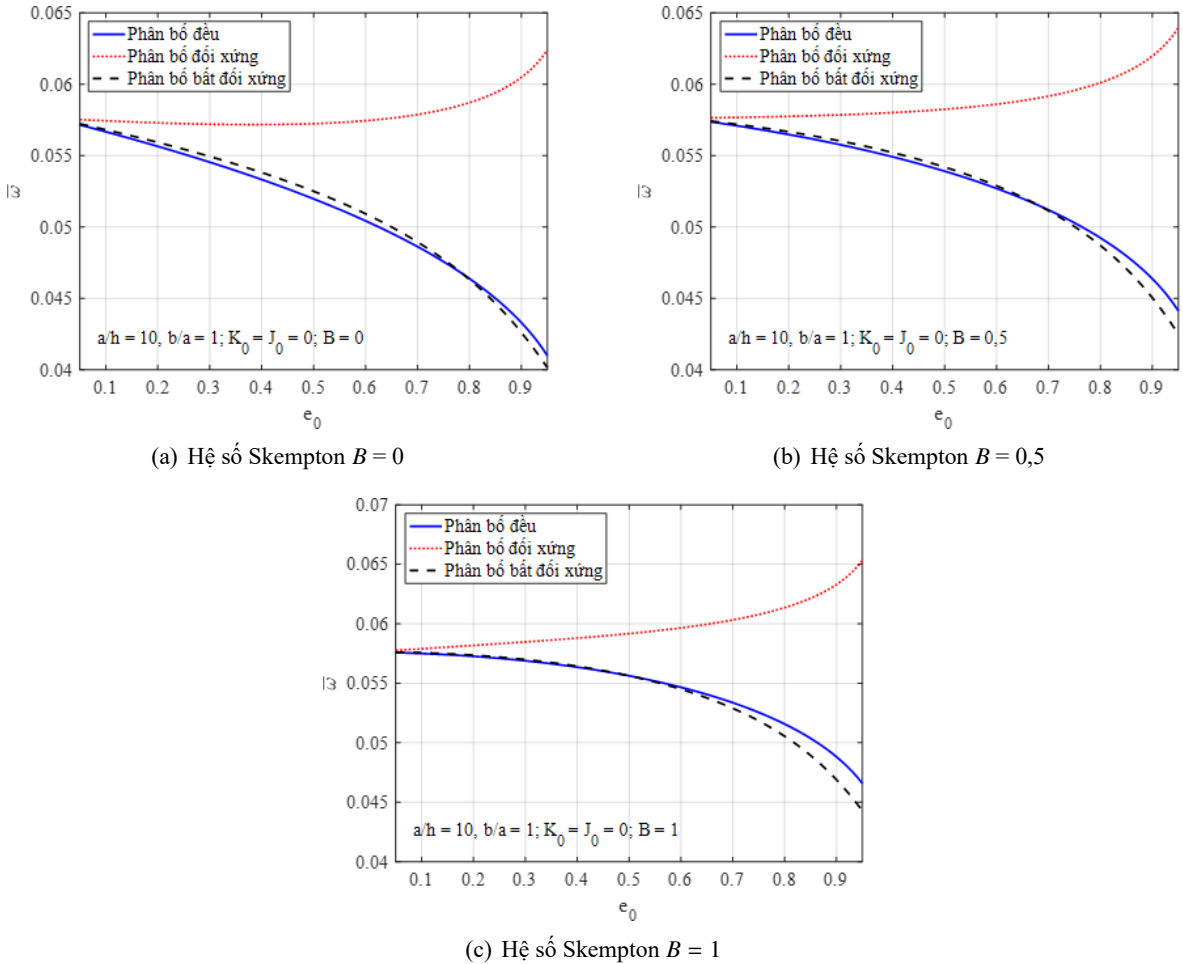
Từ các kết quả kiểm chứng ở trên về tần số dao động cơ bản và đáp ứng của chuyển vị tấm (Bảng 1, Bảng 2 và Hình 3), có thể thấy rằng, nghiệm giải tích xây dựng trong bài báo và chương trình tính toán MATLAB đã thiết lập là có độ tin cậy cao. Ở các mục tiếp theo, các khảo sát số liên quan đến tần số dao động riêng và đáp ứng của chuyển vị tấm FGM xếp đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động sẽ được trình bày cụ thể.

### 5.2. Khảo sát dao động riêng

Trong mục này, ta xét tấm chữ nhật làm bằng vật liệu FGM xếp (bọt nhôm), bão hòa chất lưu, đặt trên nền đàn hồi, dao động tự do trong môi trường không cản.

Các Hình 4(a)–(c) trình bày ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng  $e_0$ , quy luật phân bố lỗ rỗng, và hệ số Skempton  $B$  đến tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm FGM xếp ( $a/h = 10$ ;  $b/a = 1$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ). Cụ thể, đối với ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng: khi tăng hệ số rỗng  $e_0$ , phân bố lỗ rỗng đều và bất đối xứng có tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  giảm với quy luật và trị số gần như nhau, trong khi đó, phân bố đối xứng lại cho kết quả tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  tăng. Điều này có thể lý giải bằng mối tương quan giữa hiệu ứng khối lượng và hiệu ứng độ cứng uốn của tấm khi hệ số rỗng tăng đối với từng dạng phân bố lỗ rỗng riêng biệt. Đối với ảnh hưởng của hệ số Skempton (Hình 4(a)–(c)): về cơ bản, tấm FGM xếp bão hòa chất lưu ( $B > 0$ , Hình 4(b)–(c)) có tần số cao hơn (độ cứng lớn hơn) tấm FGM xếp không có chất lưu ( $B = 0$ , Hình 4(a)); ta thấy khi  $B$  tăng,

tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm vật liệu rỗng tăng nhẹ; ảnh hưởng của hệ số Skempton  $B$  đến tần số là đáng kể khi  $e_0$  lớn. Xét một trường hợp cụ thể cho tấm bằng vật liệu FGM xếp phân bố đều: khi hệ số rỗng bé  $e_0 = 0,1$  và hệ số Skempton tăng từ  $B = 0$  đến  $B = 1$  thì tần số  $\bar{\omega}$  tăng 1,47% (từ giá trị  $\bar{\omega} = 0,0567$  lên  $\bar{\omega} = 0,0575$ ); khi hệ số rỗng lớn  $e_0 = 0,8$  và hệ số Skempton tăng từ  $B = 0$  đến  $B = 1$  thì tần số  $\bar{\omega}$  tăng 11,19% (từ giá trị  $\bar{\omega} = 0,0464$  lên  $\bar{\omega} = 0,0516$ ).



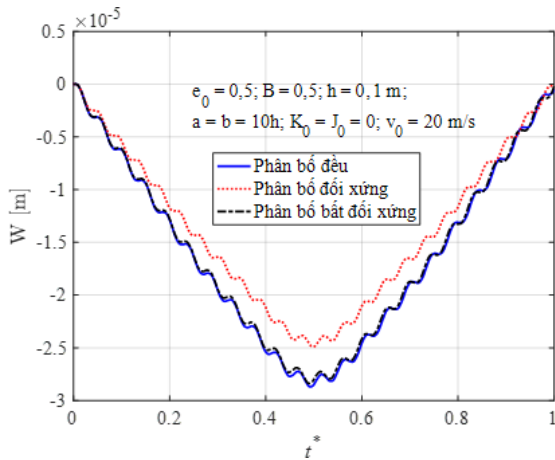
Hình 4. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng lên tần số cơ bản không thứ nguyên  $\bar{\omega}$  của tấm FGM xếp

### 5.3. Khảo sát đáp ứng động

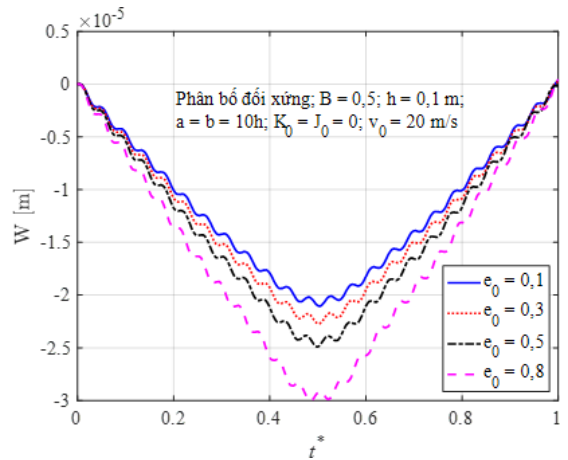
Trong phần này, ta xét một tấm chữ nhật làm bằng vật liệu FGM xếp, chịu tác dụng của lực tập trung  $P_0 = 10$  kN (không đổi) di động dọc theo phương  $x$  (quỹ đạo là đường thẳng) được mô tả bởi hàm tọa độ theo thời gian:  $x_0(t) = v_0 t, y_0 = \frac{b}{2}$ .

Đồ thị trên Hình 5–8 bao gồm các đường cong mô tả quan hệ giữa độ võng tại tâm tấm  $W$  và tham số thời gian  $t^*$  (được xác định theo biểu thức (21)). Cụ thể, ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng, hệ số Skempton, hệ số nền đàn hồi đến đường cong đáp ứng độ võng  $W$  được thể hiện lần lượt trên các Hình 5, Hình 6, Hình 7 và Hình 8. Cụ thể, trên Hình 5 (với các tham số:  $h = 0,1$  m;  $a = b = 10h$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ;  $e_0 = 0,5$ ;  $B = 0,5$ ;  $v_0 = 20$  m/s), ta có thể thấy rằng, hai quy luật phân bố

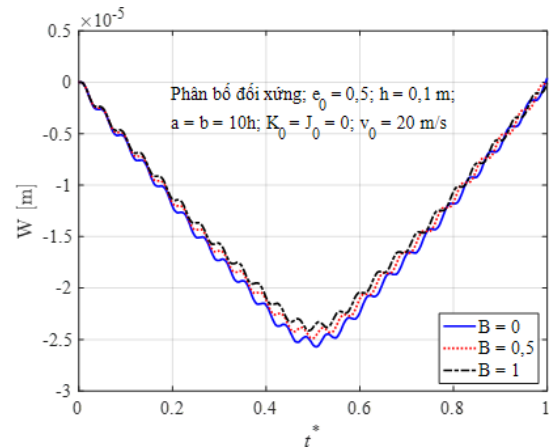
lỗ rỗng là phân bố đều và phân bố bất đối xứng cho kết quả khá gần nhau, và lớn hơn so với trường hợp phân bố đối xứng (phân bố đối xứng có độ cứng uốn lớn nhất). Khảo sát hệ số rỗng của vật liệu cũng cho thấy rằng, khi tăng hệ số rỗng, độ võng lớn nhất của tấm tăng (độ cứng giảm), như thể hiện trên Hình 6 (với các tham số:  $h = 0,1 \text{ m}$ ;  $a = b = 10h$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ;  $B = 0,5$ ;  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ; phân bố đối xứng). Hệ số Skempton cũng ảnh hưởng đáng kể đến đường cong đáp ứng độ võng-thời gian của tấm như trên Hình 7 (với các tham số:  $h = 0,1 \text{ m}$ ;  $a = b = 10h$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ,  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ , phân bố đối xứng,  $e_0 = 0,5$ ). Rõ ràng là khi tăng hệ số Skempton  $B$  thì độ võng tấm giảm (độ cứng tấm tăng). Tiếp theo chúng ta có thể thấy trên Hình 8 (với các tham số:  $h = 0,1 \text{ m}$ ;  $a = b = 10h$ ;  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ;  $B = 0,5$ ; phân bố đối xứng,  $e_0 = 0,5$ ), sự có mặt của nền đàn hồi (thông qua các tham số nền  $K_0, J_0$ ) cũng làm tăng độ cứng của kết cấu, nền Pasternak cứng nhất, sau đó là nền Winkler.



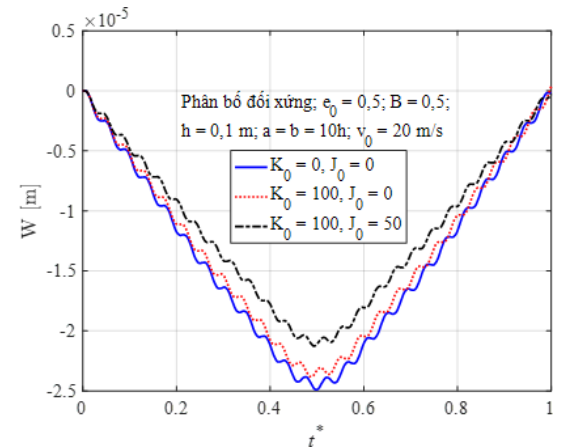
Hình 5. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xốp



Hình 6. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xốp



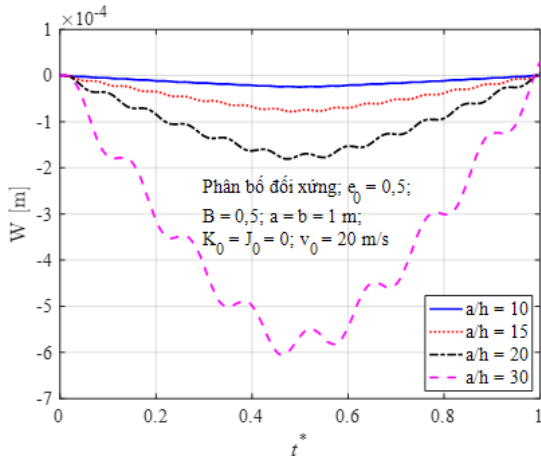
Hình 7. Ảnh hưởng của hệ số Skempton lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xốp



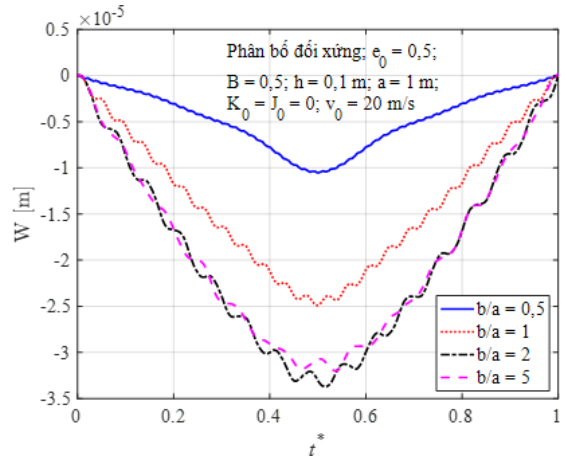
Hình 8. Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xốp

Tiếp theo, các ảnh hưởng của các tham số hình học tấm đến đường cong độ võng tại tâm tấm  $W$  theo thời gian của tấm FGM xốp được thể hiện trên Hình 9 và Hình 10. Cụ thể, chúng ta có thể thấy rằng khi tăng tỷ số  $a/h$  (giảm chiều dày tấm), thì độ võng của tấm tăng (độ cứng giảm), như thể hiện trên Hình 9 (với các tham số:  $a = b = 1 \text{ m}$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ;  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ;  $B = 0,5$ ; phân bố đối xứng;  $e_0 = 0,5$ ). Khi tăng tỷ số kích thước cạnh  $b/a$  từ 0,5 lên 2, thì độ võng tấm tăng (độ cứng giảm) như thể

hiện trên Hình 10 (với các tham số:  $h = 0,1$  m;  $a = 1$  m;  $K_0 = J_0 = 0$ ;  $v_0 = 20$  m/s;  $B = 0,5$ ; phân bố đối xứng;  $e_0 = 0,5$ ). Sự thay đổi về độ võng của tấm là nhỏ khi tỷ số  $b/a > 2$  (tấm chuyển từ làm việc hai chiều sang làm việc theo một chiều).

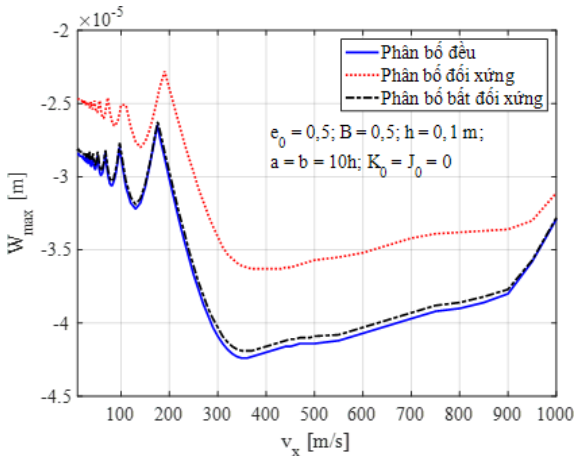


Hình 9. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước tấm  $a/h$  lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xấp

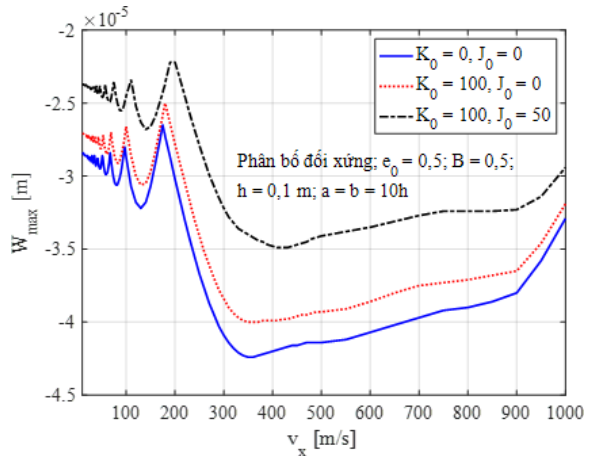


Hình 10. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước cạnh  $b/a$  lên đường cong độ võng-thời gian của tấm FGM xấp

Các Hình 11–13 mô tả các đường cong thể hiện quan hệ giữa độ võng lớn nhất tại tâm tấm  $W_{max}$  và vận tốc di chuyển  $v_0$  của lực di động. Cụ thể, ảnh hưởng của các dạng phân bố lỗ rỗng, hệ số nền đàn hồi, và ảnh hưởng của hệ số Skempton đến đường cong đáp ứng động  $W_{max}$  được thể hiện lần lượt trên các Hình 11, Hình 12 và Hình 13. Các tham số đầu vào của mỗi trường hợp khảo sát được thể hiện trên hình vẽ. Kết quả từ các đồ thị này cho thấy, quy luật chung của chúng khá giống nhau, khi tăng dần vận tốc di chuyển của lực di động, độ võng lớn nhất  $W_{max}$  thay đổi khá phức tạp, khi  $v_0$  đạt tới một giá trị nhất định, độ võng  $W_{max}$  đơn điệu tăng, đạt cực trị rồi lại giảm dần.

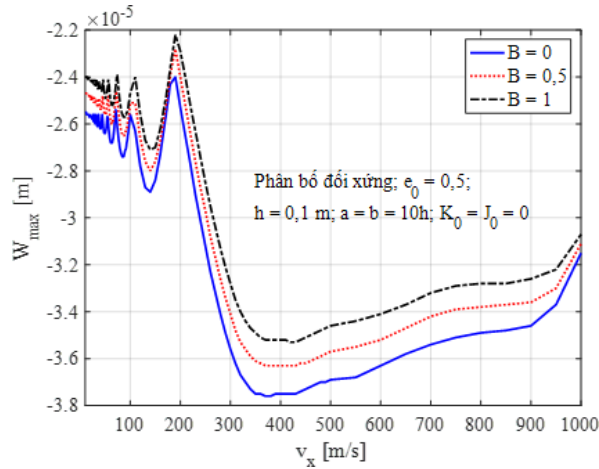


Hình 11. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng đến đường cong đáp ứng (độ võng-vận tốc) của tấm FGM xấp



Hình 12. Ảnh hưởng của hệ số nền đàn hồi đến đường cong đáp ứng của tấm FGM xấp

Cụ thể, trên Hình 11 (với các tham số:  $h = 0,1$  m;  $a = b = 10h$ ;  $e_0 = 0,5$ ;  $B = 0,5$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ), có thể thấy rằng, cũng như các khảo sát trước, hai quy luật phân bố lỗ rỗng là phân bố đều và phân bố bất đối xứng cho kết quả khá gần nhau, và lớn hơn so với trường hợp phân bố đối xứng (phân bố đối xứng có độ cứng lớn nhất). Hệ số nền cũng làm tăng độ cứng của kết cấu, nền Pasternak cứng nhất,



Hình 13. Ảnh hưởng của hệ số Skempton lên đường cong đáp ứng của tấm FGM xốp

sau đó là Winkler, và trường hợp không đặt trên nền đàn hồi như thể hiện trên Hình 12 (với các tham số:  $h = 0,1 \text{ m}$ ;  $a = b = 10h$ ;  $B = 0,5$ ; phân bố đối xứng;  $e_0 = 0,5$ ). Hệ số Skempton cũng ảnh hưởng đáng kể đến đường cong đáp ứng độ võng  $W_{\max}$  của tấm như minh họa trên Hình 13 (với các tham số bài toán:  $h = 0,1 \text{ m}$ ;  $a = b = 10h$ ;  $K_0 = J_0 = 0$ ; FGM xốp phân bố đối xứng;  $e_0 = 0,5$ ). Có thể thấy rằng, với tấm FGM xốp bão hòa chất lưu ( $B > 0$ ) có độ cứng lớn hơn tấm FGM xốp không có chất lưu ( $B = 0$ ); rõ ràng là khi giảm hệ số Skempton  $B$  thì độ võng tấm tăng (độ cứng uốn của tấm giảm).

## 6. Kết luận

Bài báo đã xây dựng lời giải giải tích để tính toán tần số dao động riêng và đáp ứng chuyển vị tấm FGM xốp bão hòa chất lưu, đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng tập trung di động. Trong đó, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, lý thuyết đàn hồi của Biot (cho vật liệu FGM xốp bão hòa chất lưu), và nguyên lý Hamilton đã được sử dụng để thiết lập phương trình chủ đạo của bài toán. Sau đó, lời giải giải tích dạng Navier được trình bày cho bài toán tấm có biên tựa khớp trên chu vi. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học tấm, nền đàn hồi, vận tốc di chuyển của tải trọng đến các đặc trưng động học tấm (tần số dao động riêng và đáp ứng động của chuyển vị tấm) cũng đã được khảo sát. Một số nhận xét chính từ kết quả bài báo:

- Kết cấu tấm FGM xốp với quy luật phân bố không đều đối xứng tỏ ra hiệu quả hơn (tần số dao động riêng lớn hơn và độ võng động bé hơn) so với hai quy luật phân bố còn lại (phân bố đều và phân bố không đều bất đối xứng).
- Khi tăng hệ số rỗng, giảm hệ số Skempton, giảm hệ số nền đàn hồi, giảm chiều dày tấm, thì độ cứng của kết cấu tấm giảm (tần số dao động riêng giảm, độ võng của tấm tăng).
- Kết cấu tấm FGM xốp có chất lưu ( $B > 0$ ) có độ cứng lớn hơn tấm FGM xốp không có chất lưu ( $B = 0$ ).
- Ảnh hưởng của hệ số Skempton đến tần số dao động riêng của tấm là đáng kể khi hệ số rỗng của vật liệu đủ lớn.

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2023-XDA-10.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., Eslami, M. R. (2016). [Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. Thin-Walled Structures, 99:83–90.](#)



- [2] Kitipornchai, S., Chen, D., Yang, J. (2017). Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Materials & Design*, 116:656–665.
- [3] Thang, P. T., Nguyen-Thoi, T., Lee, D., Kang, J., Lee, J. (2018). Elastic buckling and free vibration analyses of porous-cellular plates with uniform and non-uniform porosity distributions. *Aerospace Science and Technology*, 79:278–287.
- [4] Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Limkatanyu, S., Rungamornrat, J. (2022). Free vibration analysis of rotating FGP sandwich cylindrical shells with metal-foam core layer. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 30(16):3318–3331.
- [5] Dang, X.-H., Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Thi, B.-P. N. (2020). Free vibration characteristics of rotating functionally graded porous circular cylindrical shells with different boundary conditions. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 46(1):167–183.
- [6] Binh, C. T., Long, N. V., Tú, T. M., Anh, N. T. (2022). Phân tích động lực học dầm Timoshenko bằng vật liệu xốp (FGP) chịu tác dụng của tải trọng di động theo tiếp cận giải tích. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 16(5V):74–86.
- [7] Binh, C. T., Long, N. V., Tú, T. M., Hải, L. T. (2022). Nghiệm giải tích của dầm Timoshenko FGM xốp chịu uốn có xét đến ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 16(3V):86–99.
- [8] Leclair, P., Horoshenkov, K. V., Cummings, A. (2001). Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 247(1):1–18.
- [9] Rezaei, A. S., Saidi, A. R. (2015). Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*, 134:1051–1060.
- [10] Xiang, Y., Jiang, H., Lu, J. (2017). Analyses of dynamic characteristics of a fluid-filled thin rectangular porous plate with various boundary conditions. *Acta Mechanica Sinica*, 30(1):87–97.
- [11] Arani, A. G., Maraghi, Z. K., Khani, M., Alinaghian, I. (2017). Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories. *Journal of Engineering*, 2017:1–13.
- [12] Khouzestani, L. B., Khorshidvand, A. R. (2019). Axisymmetric free vibration and stress analyses of saturated porous annular plates using generalized differential quadrature method. *Journal of Vibration and Control*, 25(21-22):2799–2818.
- [13] Lixian, W. (2020). Dynamic response analysis of fluid-saturated porous rectangular plates. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 75(12):1009–1023.
- [14] Jabbari, M., Hashemitaheri, M., Mojahedin, A., Eslami, M. R. (2013). Thermal buckling analysis of functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials. *Journal of Thermal Stresses*, 37(2):202–220.
- [15] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC Press.
- [16] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 128:70–86.
- [17] Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Nguyen, V.-L., Le, Q.-H. (2023). Static behaviour of functionally graded plates resting on elastic foundations using neutral surface concept. *Archive of Mechanical Engineering*.
- [18] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109:14–22.
- [19] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2017). Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions. *Composite Structures*, 182:91–98.
- [20] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4):745–752.
- [21] Detournay, E., Cheng, A. H.-D. (1993). *Fundamentals of poroelasticity. Analysis and Design Methods*, Elsevier, 113–171.
- [22] Tru, V. N., Long, N. V., Tu, T. M., Trang, V. T. T. (2023). Static analysis of functionally graded saturated porous plate rested on pasternak elastic foundation by using a new quasi-3D higher-order shear deformation theory. *Archive of Applied Mechanics*, 93(6):2565–2583.
- [23] Rad, E. S., Saidi, A. R., Rezaei, A. S., Askari, M. (2020). Shear deformation theories for elastic buckling of fluid-infiltrated porous plates: An analytical approach. *Composite Structures*, 254:112829.

- [24] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [25] Rezaei, A. S., Saidi, A. R. (2016). [Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates](#). *Composites Part B: Engineering*, 91: 361–370.
- [26] Ebrahimi, F., Habibi, S. (2016). [Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate](#). *Steel and Composite Structures*, 20(1):205–225.
- [27] Sahoo, P. R., Barik, M. (2020). [A numerical investigation on the dynamic response of stiffened plated structures under moving loads](#). *Structures*, 28:1675–1686.
- [28] Vosoughi, A. R., Malekzadeh, P., Razi, H. (2013). [Response of moderately thick laminated composite plates on elastic foundation subjected to moving load](#). *Composite Structures*, 97:286–295.

### Phụ lục

Các số hạng trong ma trận độ cứng kết cấu  $[K_{mn}]$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2; s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta; s_{13} = -\kappa D_{11}\alpha^3 - \kappa(D_{12} + 2D_{66})\alpha\beta^2; \\
 s_{14} &= (B_{11} - \kappa D_{11})\alpha^2 + (B_{66} - \kappa D_{66})\beta^2; s_{15} = (B_{12} + B_{66} - \kappa D_{12} - \kappa D_{66})\alpha\beta; \\
 s_{21} &= (A_{21} + A_{66})\alpha\beta; s_{22} = (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2); s_{23} = -\kappa(D_{21} + 2D_{66})\alpha^2\beta - \kappa D_{22}\beta^3; \\
 s_{24} &= (B_{21} + B_{66} - \kappa D_{21} - \kappa D_{66})\alpha\beta; s_{25} = (B_{66} - \kappa D_{66})\alpha^2 + (B_{22} - \kappa D_{22})\beta^2; \\
 s_{31} &= -\kappa D_{11}\alpha^3 - \kappa(D_{21} + 2D_{66})\alpha\beta^2; s_{32} = -\kappa(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta - \kappa D_{22}\beta^3; \\
 s_{33} &= \kappa^2 G_{11}\alpha^4 + \kappa^2(G_{12} + G_{21} + 4G_{66})\alpha^2\beta^2 + \kappa^2 G_{22}\beta^4 + A^s(\alpha^2 + \beta^2) + k_w + k_{sx}\alpha^2 + k_{sy}\beta^2; \\
 s_{34} &= A^s\alpha - (\kappa E_{11} - \kappa^2 G_{11})\alpha^3 - (\kappa E_{21} + 2\kappa E_{66} - \kappa^2 G_{21} - 2\kappa^2 G_{66})\alpha\beta^2; \\
 s_{35} &= A^s\beta - (\kappa E_{12} + 2\kappa E_{66} - \kappa^2 G_{12} - 2\kappa^2 G_{66})\alpha^2\beta - (\kappa E_{22} - \kappa^2 G_{22})\beta^3; \\
 s_{41} &= (B_{11} - \kappa D_{11})\alpha^2 + (B_{66} - \kappa D_{66})\beta^2; s_{42} = (B_{12} + B_{66} - \kappa D_{12} - \kappa D_{66})\alpha\beta; \\
 s_{43} &= -(\kappa E_{11} - \kappa^2 G_{11})\alpha^3 + A^s\alpha - (\kappa E_{12} - \kappa^2 G_{12} + 2\kappa E_{66} - 2\kappa^2 G_{66})\alpha\beta^2; \\
 s_{44} &= (C_{11} - 2\kappa E_{11} + \kappa^2 G_{11})\alpha^2 + (C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66})\beta^2 + A^s; \\
 s_{45} &= (C_{12} + C_{66} - 2\kappa E_{12} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{12} + \kappa^2 G_{66})\alpha\beta; \\
 s_{51} &= (B_{21} + B_{66} - \kappa D_{21} - \kappa D_{66})\alpha\beta; s_{52} = (B_{66} - \kappa D_{66})\alpha^2 + (B_{22} - \kappa D_{22})\beta^2; \\
 s_{53} &= A^s\beta - (\kappa E_{21} + 2\kappa E_{66} - \kappa^2 G_{21} - 2\kappa^2 G_{66})\alpha^2\beta - (\kappa E_{22} - \kappa^2 G_{22})\beta^3; \\
 s_{54} &= (C_{21} + C_{66} - 2\kappa E_{21} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{21} + \kappa^2 G_{66})\alpha\beta; \\
 s_{55} &= (C_{66} - 2\kappa E_{66} + \kappa^2 G_{66})\alpha^2 + (C_{22} - 2\kappa E_{22} + \kappa^2 G_{22})\beta^2 + A^s
 \end{aligned}$$

Các số hạng trong ma trận khối lượng  $[M_{mn}]$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= I_0; m_{13} = -\kappa I_3\alpha; m_{14} = J_1; m_{22} = I_0; m_{23} = -\kappa I_3\beta; m_{25} = J_1; \\
 m_{31} &= -\kappa I_3\alpha; m_{32} = -\kappa I_3\beta; m_{33} = I_0 + \kappa^2 I_6(\alpha^2 + \beta^2); m_{34} = -\kappa J_4\alpha; m_{35} = -\kappa J_4\beta; \\
 m_{41} &= J_1; m_{43} = -\kappa J_4\alpha; m_{44} = K_2; m_{52} = J_1; m_{53} = -\kappa J_4\beta; m_{55} = K_2
 \end{aligned}$$