

ĐẶC ĐIỂM PHÂN BỐ ỨNG SUẤT TRONG TẤM COMPOSITE LỚP GIA CƯỜNG ỚNG NANO CARBON ĐƠN VÁCH

Đặng Xuân Hùng^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 05/5/2023, Sửa xong 25/5/2023, Chấp nhận đăng 25/5/2023

Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu đặc điểm phân bố của các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm composite lớp gia cường ống carbon đơn vách (laminated functionally graded single-walled carbon nanotubes reinforced composite plates: FG-CNTRC). Ống carbon gia cường phân bố trong từng lớp theo bốn quy luật: đều (UD), dạng chữ V (FG-V), dạng chữ O (FG-O) và dạng chữ X (FG-X). Mô hình bài toán tấm chữ nhật composite lớp gia cường SWCNT chịu tải trọng phân bố đều được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 5 ẩn số của Reddy và phương pháp Ritz để tính toán trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong tấm. Các kết quả khảo sát số cho thấy đặc điểm phân bố của các thành phần ứng suất theo phương chiều dày tấm phụ thuộc vào quy luật phân bố của CNTs cũng như các tham số vật liệu khác. Các phân tích, bình luận sau đó làm rõ ưu điểm của việc sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao trong mô tả quy luật phân bố của ứng suất tiếp theo chiều dày tấm và mối liên hệ logic định tính của quy luật phân bố ứng suất với các dạng phân bố của SWCNT.

Từ khóa: composite lớp gia cường CNT; SWCNT; phân tích Eng suât; FG-CNTRC; phương pháp Ritz.

STRESS DISTRIBUTION IN LAMINATED FUNCTIONALLY GRADED SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBE REINFORCED COMPOSITE PLATES

Abstract

This paper studies the stress distribution along the thickness of laminated functionally graded single-walled carbon nanotubes reinforced composite plates (FG-SWCNTRC). Four types of the distribution patterns of the CNTs in each layer are considered: uniform distribution (UD), functionally graded distribution type V (FG-V), functionally graded distribution type O (FG-O) and functionally graded distribution type X (FG-X). The computational model of FG-SWCNTRC plate is established based on Reddy's higher-order shear deformation plate theory and the Ritz method to determine the displacement, deformation and stress fields in the plate. The numerical result indicates the distribution law of the stress components along the thickness of the plate. The efficiency of the higher-order shear deformation theory in the modeling of transverse shear stress along the thickness of the plate and the relation between the stress distribution characteristics and the CNT distribution patterns are examined in detail.

Keywords: CNT reinforced composite; SWCNT; stress field analysis; FG-CNTRC; Ritz method.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17\(2V\)-14](https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(2V)-14) © 2023 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Ống nano carbon (carbon nanotube - CNT), với những ưu điểm vượt trội về tính chất cơ lý, có tiềm năng rất lớn trong việc ứng dụng làm vật liệu gia cường cho kết cấu composite. Vì vậy, các nghiên

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: hungdx@huce.edu.vn (Hùng, Đ. X.)

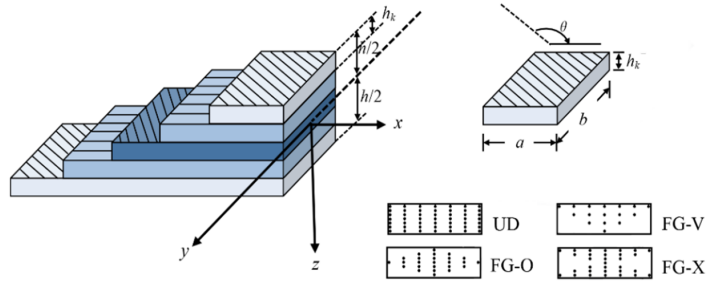
cứu về ứng xử cơ học của tấm composite gia cường CNT (FG-CNTRC) đã và đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước trong thời gian gần đây. Về bài toán phân tích tĩnh tấm FG-CNTRC, Duc và cs. [1], Huang và cs. [2] tiến hành phân tích tuyến tính tĩnh với tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp, đặt và không đặt trên nền đàn hồi Winkler - Pasternak. Ardestani và cs. [3] nghiên cứu ảnh hưởng của góc phương sợi đến ứng xử uốn của tấm FG-CNTRC. Cũng nghiên cứu về ứng xử uốn của tấm FG-CNTRC nhưng Truong-Thi và cs. [4] lại đặt sự quan tâm vào nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên khác nhau đến sự làm việc của tấm chữ nhật. Bài toán phân tích tuyến tính và phi tuyến tĩnh của loại kết cấu này cũng được Zhang và cs. [5], Fan và Wang [6] quan tâm nghiên cứu đối với các hình dạng tấm khác nhau, có và không có nền đàn hồi Pasternak. Ngoài ra, bài toán phân tích tấm FG-CNTRC có lớp áp điện hay tấm sandwich có lớp bề mặt bằng FG-CNTRC cũng được nghiên cứu bởi Selim và cs. [7], Rafiee và cs. [8]. Những nghiên cứu trên đây, mặc dù đã phân tích tương đối kỹ về trường chuyển vị của tấm FG-CNTRC nhưng rất tiếc lại chưa nghiên cứu đầy đủ về trường ứng suất.

Cải tiến một số hạn chế của các nghiên cứu đã nêu ở trên, các tác giả Zhu và cs. [9], Alibeigloo và Emtehani [10], Phung và cs. [11] đã tiến hành khảo sát cả trường chuyển vị và trường ứng suất trong bài toán phân tích tĩnh tấm FG-CNTRC. Tương tự như vậy, Garcia-Macias và cs. [12] phân tích tĩnh tấm xiên FG-CNTRC; Jeyaraj và Rajkumar [13] phân tích tấm FG-CNTRC làm việc trong trường nhiệt độ thay đổi; Lei và cs. [14] phân tích tĩnh tấm composite đơn và đa lớp FG-CNTRC; Mehar và Panda [15] phân tích tĩnh tấm FG-CNTRC dưới tác dụng của tải trọng cơ - nhiệt. Tuy vậy, các nghiên cứu này cũng chỉ mới xét đến các thành phần ứng suất pháp mà chưa nghiên cứu hoàn chỉnh toàn bộ trường ứng suất.

Vì vậy, một loạt những nghiên cứu sau đó của nhiều tác giả về ứng xử tĩnh của tấm FG-CNTRC đã được công bố, trong đó có xét đến đầy đủ trường chuyển vị và trường ứng suất trong tấm. Alibeigloo và cs. trong [16], Heydarpour trong [17] lần lượt phân tích tĩnh tấm composite gia cường FG-CNT chịu tải trọng cơ, nhiệt hay có lớp áp điện. Các nghiên cứu về ứng xử uốn của tấm FG-CNTRC trên nền đàn hồi chịu tải trọng cơ, nhiệt được Wattanasakulpong và cs. trình bày trong [18]. Sobhy [19] lại xét tấm FG-CNTRC dưới tác dụng của tải phân bố đều, tải tập trung, tải hình sin và tải phân bố theo quy luật hàm mũ. Có thể thấy rằng số lượng các nghiên cứu như vậy còn tương đối hạn chế. Các khảo sát về lựa chọn mô hình và phương pháp tính phù hợp, các bình luận đánh giá sâu về vấn đề này còn nhiều điểm cần được làm rõ. Bài báo vì vậy hướng đến việc tập trung phân tích kỹ về đặc điểm phân bố các thành phần ứng suất theo phương chiều dày tấm, bình luận, lý giải và làm rõ mối quan hệ giữa quy luật phân bố các thành phần ứng suất theo phương chiều dày tấm với các đặc điểm về cấu tạo vật liệu hay lý thuyết tính toán tấm.

2. Mô hình tấm FG-CNTRC chịu uốn

Xét tấm chữ nhật composite lớp kích thước $a \times b \times h$ với mỗi lớp vật liệu thứ k có chiều dày h_k , được gia cường bằng SWCNT như thể hiện trên Hình 1. Trong mỗi lớp vật liệu, SWCNT phân bố đồng phương với góc phương sợi θ_k trong mặt phẳng (xy) và phân bố theo một quy luật liên tục theo phương chiều dày (z). Theo Shen [20], hiện nay có bốn quy luật phân bố phổ biến của SWCNT là UD (uniform distribution), FG-V (functionally graded type V), FG-O (functionally graded type O) và FG-X (functionally graded type X) như thể hiện trên Hình 1 và có tỷ phần thể tích xác định theo (1).



Hình 1. Mô hình tấm composite gia cường ống nano carbon đơn vách SWCNT (FG-CNTRC)

$$\begin{aligned}
 UD : V_{CNT} &= V_{CNT}^* ; \quad FG - V : V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^* ; \quad \eta_2 \\
 FG - O : V_{CNT}(z) &= \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* ; \quad FG - X : V_{CNT}(z) = \frac{4|z|}{h} V_{CNT}^* \quad (1) \\
 V_{CNT}^* &= \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho^{CNT}/\rho^m) - (\rho^{CNT}/\rho^m)w_{CNT}}
 \end{aligned}$$

Các hằng số vật liệu hiệu dụng của composite gia cường SWCNT trong từng lớp xác định theo công thức:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E^m ; \quad \frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E^m} ; \quad \frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G^m} ; \\
 \nu_{12} &= V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu^m ; \quad \rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (2)
 \end{aligned}$$

trong đó E_{11}^{CNT} , E_{22}^{CNT} và G_{12}^{CNT} lần lượt là mô đun đàn hồi kéo (nén) và mô đun đàn hồi trượt của SWCNT; E_m và G_m là mô đun đàn hồi kéo (nén) và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu nền đẳng hướng; η_1, η_2 và η_3 là các hệ số ảnh hưởng của CNT được xác định như trong Bảng 1; V_{CNT} và V_m là tỷ phần thể tích của CNT và của vật liệu nền ($V_{CNT} + V_m = 1$); ν_{12}^{CNT} , ρ^{CNT} và ν^m, ρ^m lần lượt là hệ số Poisson và khối lượng riêng của CNT và của vật liệu nền.

Bảng 1. Hệ số ảnh hưởng của CNT theo tỷ phần thể tích [20]

V_{CNT}^*	η_1	η_2	η_3
0,11	0,149	0,934	0,934
0,14	0,150	0,941	0,941
0,17	0,149	1,381	1,381

Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 5 ẩn số của Reddy giả thiết trường chuyển vị có dạng [2]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) \quad (3)
 \end{aligned}$$

trong đó u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của một điểm trên mặt trung bình lần lượt theo các

phương x, y, z ; θ_x, θ_y lần lượt là các góc xoay của pháp tuyến với mặt trung bình tại vị trí $z = 0$ quanh các trục y, x .

Trường biến dạng được xác định từ quan hệ chuyển vị - biến dạng theo lý thuyết đàn hồi:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{cases} = \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{cases} + z \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{cases} + z^3 \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases} = \begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{cases} + z^2 \begin{cases} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases}; \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{cases}; \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{cases} = -\frac{4}{3h^2} \begin{cases} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \end{cases}; \begin{cases} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{cases} = -\frac{4}{h^2} \begin{cases} \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (5)$$

Trong từng lớp thứ k , trường ứng suất được xác định theo quan hệ ứng suất - biến dạng

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{cases}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{cases} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{cases}^{(k)} \quad (6)$$

với \bar{Q}_{ij}^k là ma trận độ cứng thu gọn của lớp thứ k được trình bày chi tiết trong [21].

Thế năng biến dạng đàn hồi của tấm được xác định bởi

$$U = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \mathbf{S} \varepsilon dA \quad (7)$$

trong đó [21]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(3)} \\ \gamma^{(0)} \\ \gamma^{(2)} \end{cases}; \mathbf{S} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] & 0 & 0 \\ [B] & [D] & [F] & 0 & 0 \\ [E] & [F] & [H] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [A_S] & [D_S] \\ 0 & 0 & 0 & [D_S] & [F_S] \end{bmatrix}$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz; \quad i = 1, 2, 6 \quad (8)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^4) dz dz; \quad i = 4, 5$$

Đối với tấm chịu tải trọng ngang phân bố đều trên bề mặt, thế năng của ngoại lực được xác định bởi

$$W = - \int_A qwdA \tag{9}$$

Thế năng toàn phần trong tấm sẽ bằng tổng của thế năng biến dạng đàn hồi và thế năng của ngoại lực

$$\Pi = U + W \tag{10}$$

Phương pháp Pb2-Ritz giả thiết các thành phần chuyển vị của một điểm trên mặt trung bình được khai triển dưới dạng chuỗi đa thức thỏa mãn các điều kiện biên chuyển vị như sau [22]

$$\left\{ \begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n U_{ij} f_{ij}(x, y) \psi^u(x, y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_{ij} f_{ij}(x, y) \psi^v(x, y) \\ w_0(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij} f_{ij}(x, y) \psi^w(x, y) \\ \theta_x(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^x f_{ij}(x, y) \psi^{\theta_x}(x, y) \\ \theta_y(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^y f_{ij}(x, y) \psi^{\theta_y}(x, y) \end{aligned} \right. \tag{11}$$

trong đó m và n là bậc lớn nhất của đa thức trong chuỗi hàm theo các phương x, y ; $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, \theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y$ là các hệ số chưa xác định và $f_{ij}(x, y)$ là các hàm đa thức hai chiều có dạng:

$$f_{ij}(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^{i-1} \left(\frac{y}{b}\right)^{j-1} \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{12}$$

với a, b là chiều dài và chiều rộng của tấm và $\psi^\alpha(x, y)$ là hàm đặc trưng điều kiện biên ($\alpha = u, v, w, \theta_x, \theta_y$), có dạng [22]:

$$\psi^\alpha(x, y) = \prod_{k=1}^{n_e} [\Gamma_k(x, y)]^{\Omega_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n_e) \tag{13}$$

trong đó n_e là số biên của tấm; Γ_k là phương trình của biên thứ k ; Ω_k là các tham số đặc trưng điều kiện biên được cho trong Bảng 2.

Bảng 2. Tham số đặc trưng điều kiện biên trong một số trường hợp thông dụng (C - ngàm, S - khớp, F - tự do)

α	Ω^k		
	F	S	C
$u; v; w$	0	1	1
$\theta_x; \theta_y$	0	0	1

Áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu ta thu được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các hệ số chưa biết $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, \theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_{ij}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial V_{ij}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial W_{ij}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_{ij}^x} = 0 ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_{ij}^y} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right) \quad (14)$$

3. Đánh giá sự hội tụ và kiểm chứng chương trình tính

3.1. Đối tượng khảo sát

Bài báo tiến hành khảo sát tấm chữ nhật FG-CNTRC nhiều lớp kích thước $a \times b \times h$, có vật liệu nền làm từ poly(m-phenylenevinylene)-co-[(2,5-dioctoxy-p-phenylene) vinylene] (PmPV) và vật liệu gia cường là các ống carbon đơn vách dạng armchair (10,10) với bốn quy luật phân bố UD, FG-V, FG-O, FG-X. Các hằng số của vật liệu nền PmPV và vật liệu gia cường SWCNT được lấy theo tài liệu [23] và các mô đun đàn hồi trượt được giả thiết $G_{13} = G_{12} = G_{23}$.

Bảng 3. Các hằng số của vật liệu nền PmPV và vật liệu gia cường SWCNT [23]

PmPV	E^m (GPa)	-	-	ν^m	α^m (K)	ρ^m (g/cm ³)
		2.1	-	-	0,34	45.10 ⁻⁶
SWCNT	E_{11}^{CNT} (TPa)	E_{22}^{CNT} (TPa)	G_{12}^{CNT} (TPa)	ν_{12}^{CNT}	-	ρ^{CNT} (g/cm ³)
	5,6466	7,0800	1,9455	0,175	-	1.4

Để thuận lợi cho việc so sánh kiểm chứng, các đại lượng không thứ nguyên định nghĩa theo (15), (16) được sử dụng trong các khảo sát. Cụ thể là chiều rộng, chiều dài và chiều cao không thứ nguyên của tấm được xác định bởi:

$$\bar{a} = \frac{a}{h}; \quad \bar{b} = \frac{b}{h}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (15)$$

và độ võng, ứng suất không thứ nguyên được xác định bởi:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{a^2 q_0}; & \bar{\sigma}_{yy} &= \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{a^2 q_0} \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \sigma_{xy} \left(\frac{a}{6}, \frac{b}{6}, -\frac{h}{2} \right) \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right); & \bar{\sigma}_{xz} &= \sigma_{xz} \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}, 0 \right) \left(\frac{h}{a q_0} \right) \\ \bar{\sigma}_{yz} &= \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, 0 \right) \left(\frac{h}{a q_0} \right); & \bar{w} &= \frac{w \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) E_m h^3}{q a^4} \times 10^3 \end{aligned} \quad (16)$$

3.2. Sự hội tụ của kết quả

Xét một tấm FG-CNTRC dạng UD với tỷ lệ thể tích $V_{CNT}^* = 0,11$; kích thước $b/a = 1, a/h = 10$; cấu hình phản xứng vuông góc $[0^\circ/90^\circ]_5$; bốn biên tựa khớp SSSS. Bảng 4 thể hiện sự thay đổi của độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên khi giá trị của $m \times n$ trong chuỗi đa thức tăng dần. Kết quả khảo sát cho thấy tất cả các đại lượng khảo sát đều đạt hội tụ khi $m \times n$ bằng 7×7 . Mặc dù vậy, để đảm bảo tính chính xác, trong các tính toán khảo sát tiếp theo, tác giả lựa chọn giá trị của $m \times n$ bằng 8×8 .

Bảng 4. Sự hội tụ của độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông composite lớp gia cường SWCNT (UD), bốn biên tựa khớp, $[0^\circ/90^\circ]_5$, ($a/h = 10$)

$m \times n$	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
\bar{w}	2,394	4,651	5,507	6,336	6,374	6,359	6,353	6,353
$\bar{\sigma}_{xx}$	0	0,328	0,583	0,831	0,861	0,848	0,831	0,831
$\bar{\sigma}_{yy}$	0	0,010	0,017	0,026	0,027	0,027	0,026	0,026
$\bar{\sigma}_{xy}$	0	0	0,008	0,010	0,010	0,010	0,010	0,011
$\bar{\sigma}_{xz}$	0	0	0,004	0,141	0,150	0,134	0,128	0,128
$\bar{\sigma}_{yz}$	0	0	0,004	0,142	0,150	0,134	0,128	0,128

3.3. Kiểm chứng độ tin cậy của chương trình tính

Để kiểm chứng độ tin cậy của chương trình đã lập, tác giả sẽ so sánh kết quả độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của bài báo với kết quả tính bằng của phần mềm Ansys sử dụng phần tử “shell-181”. Xét tấm vuông composite lớp gia cường SWCNT có quy luật phân bố UD, tỷ lệ thể tích $V_{CNT}^* = 0,11$, cấu hình góc phương sợi $[0^\circ/90^\circ]_5$, với các điều kiện biên khác nhau. Kết quả kiểm chứng được giới thiệu trong Bảng 5.

Bảng 5. Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông composite lớp gia cường SWCNT (UD, $V_{CNT}^* = 0,11$), $[0^\circ/90^\circ]_5$, với các điều kiện biên khác nhau

		\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
SSSS	Bài báo	6,3537	0,8314	0,0266	0,0114	0,1288	0,1288
	Ansys	6,4495	0,8377	0,0269	0,0116	0,1302	0,1302
	Sai lệch	1,49%	0,75%	0,93%	1,87%	1,07%	1,07%
CCCC	Bài báo	3,1353	0,2554	0,0091	0,0026	0,1304	0,1304
	Ansys	3,2260	0,2554	0,0091	0,0026	0,1304	0,1304
	Sai lệch	2,81%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
CSCS	Bài báo	4,2161	0,3527	0,0161	0,0057	0,0708	0,1878
	Ansys	4,3187	0,3535	0,0162	0,0058	0,0722	0,1881
	Sai lệch	2,37%	0,22%	0,90%	0,98%	1,90%	0,15%
CFCF	Bài báo	5,2181	0,4537	0,0033	0,0000848	0,0007	0,2471
	Ansys	5,3712	0,4535	0,0033	0,0000868	0,0007	0,2471
	Sai lệch	2,85%	0,06%	0,00%	2,30%	0,00%	0,00%
SFSF	Bài báo	10,6138	1,4277	0,0103	0,000247	0,0008	0,2468
	Ansys	10,7663	1,4273	0,0103	0,000241	0,0008	0,2468
	Sai lệch	1,42%	0,03%	0,00%	2,83%	0,00%	0,00%

Bảng so sánh chỉ ra rằng kết quả tính bằng chương trình Matlab của bài báo có sai lệch rất nhỏ so với kết quả tính bằng phần mềm ANSYS, sai lệch lớn nhất chỉ ở mức dưới 3%. Điều này khẳng định độ tin cậy của kết quả bài báo.

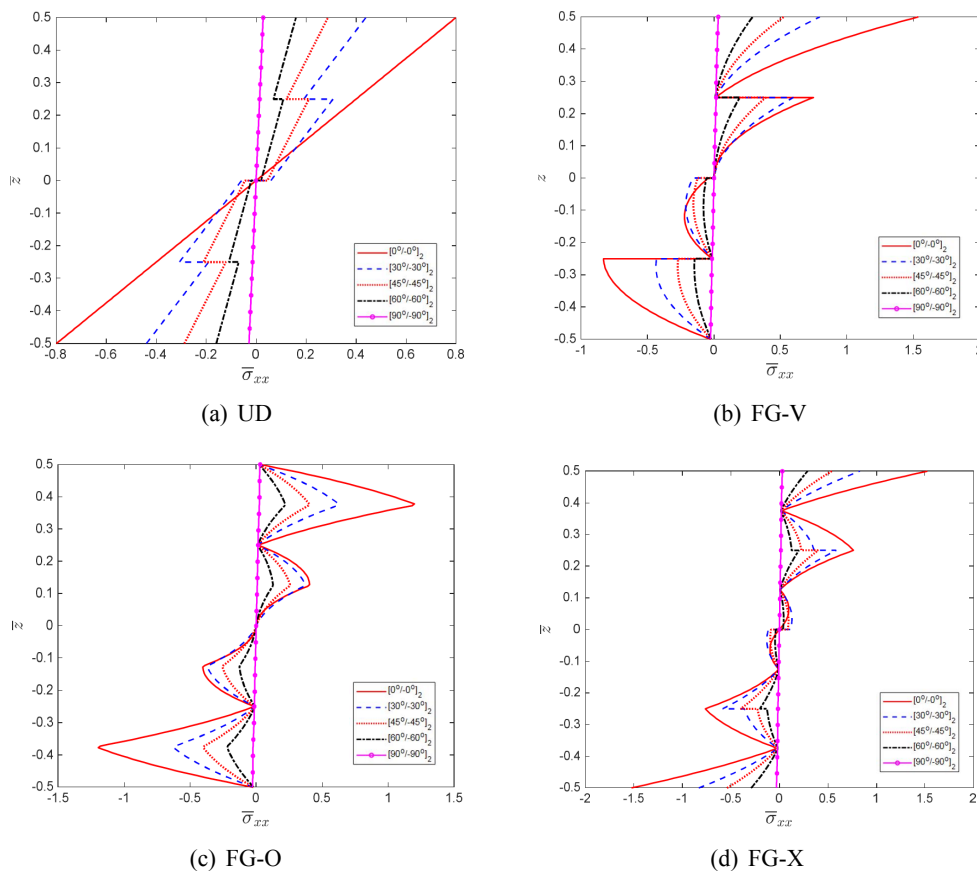
4. Đặc điểm phân bố ứng suất theo phương chiều dày tấm

Khi phân tích bài toán tĩnh của kết cấu tấm, đối với các thành phần ứng suất thì quy luật phân bố ứng suất theo phương chiều dày tấm được quan tâm nhất. Một cách định tính, dạng phân bố của ứng suất phụ thuộc vào cấu hình của tấm composite lớp, quy luật phân bố của vật liệu gia cường và quy luật của thành phần biến dạng tương ứng mà không phụ thuộc vào điều kiện biên hay các tham số khác. Vì vậy trong các khảo sát sau đây bài báo chỉ xét đến điều kiện biên bốn biên tựa khớp SSSS.

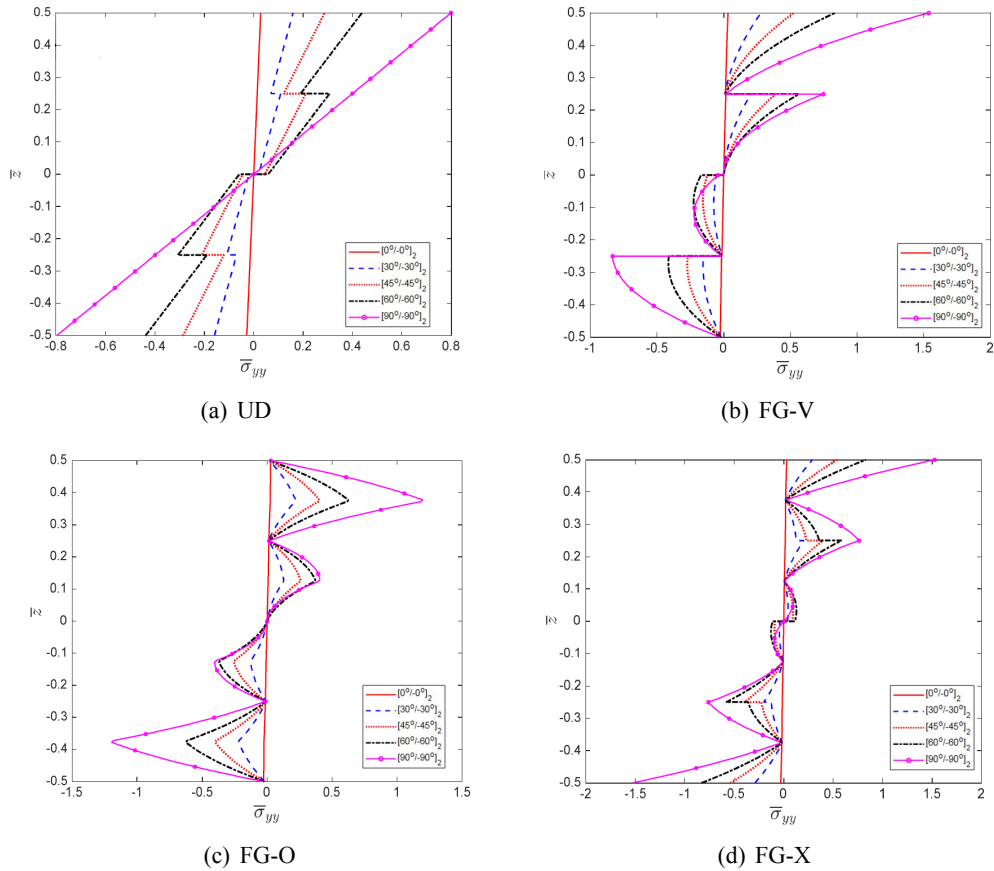
4.1. Quy luật phân bố các thành phần ứng suất pháp

Hình 2 và Hình 3 thể hiện phân bố của các thành phần ứng suất pháp $\bar{\sigma}_{xx}$ và $\bar{\sigma}_{yy}$ theo hai phương của tấm vuông ($a/b = 1$), với các cấu hình (vuông góc và xiên góc), và quy luật phân bố SWCNT khác nhau. Trước hết chúng ta quan sát được quy luật phân bố của $\bar{\sigma}_{xx}$ trong hình này với góc phương sợi θ giống kết quả của $\bar{\sigma}_{yy}$ trong hình kia với góc phương sợi $90^\circ - \theta$. Cụ thể, chúng ta có thể quan sát thấy các đường $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ trên Hình 2 sẽ tương ứng với các đường $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ trên Hình 3, riêng đường 45 độ trên hai hình sẽ trùng nhau. Điều này cũng dễ hiểu bởi đối với tấm vuông, khi hai trường hợp khảo sát có tổng góc phương sợi bằng 90° thì vai trò của $\bar{\sigma}_{xx}$ và $\bar{\sigma}_{yy}$ sẽ đổi cho nhau.

Quy luật phân bố của các thành phần ứng suất pháp theo phương chiều dày tấm được quy định bởi quy luật phân bố của biến dạng tương ứng, của cấu hình composite và của quy luật phân bố sợi



Hình 2. Phân bố ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{xx}$ theo chiều dày của tấm composite lớp FG-CNTRC: $b/a = 1, [\theta^\circ / -\theta^\circ]_2$, SSSS, UD, FG-V, FG-O, FG-X



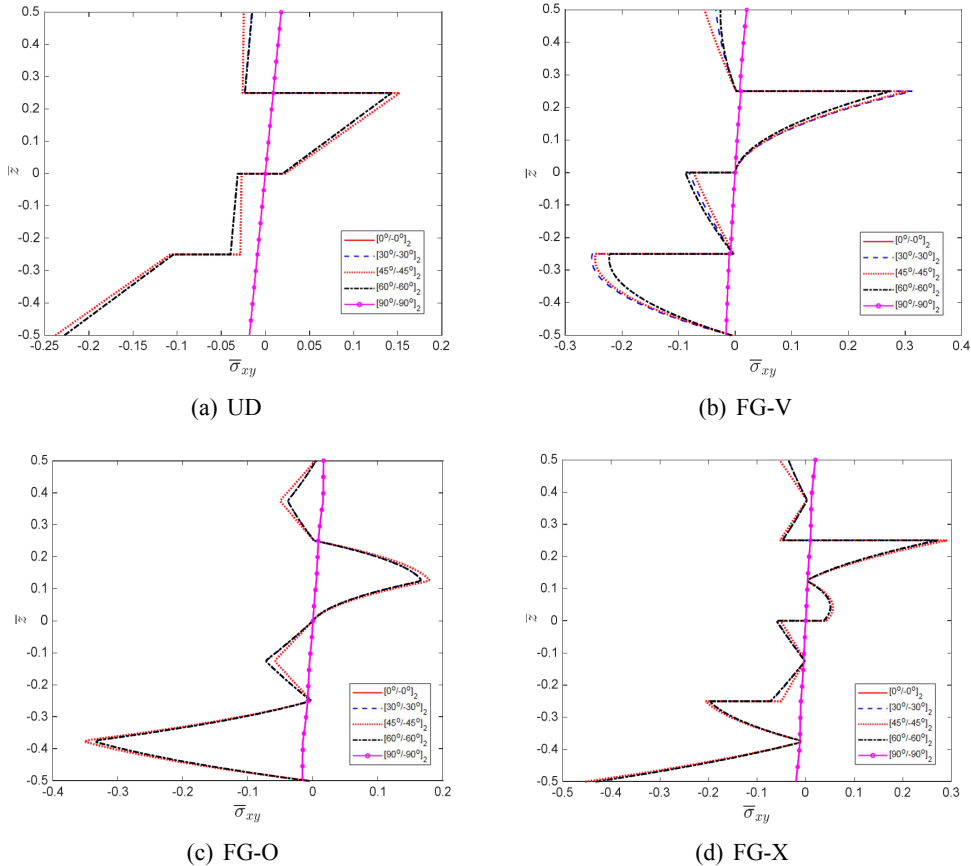
Hình 3. Phân bố ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{yy}$ theo chiều dày của tấm composite lớp FG-CNTRC: $b/a = 1, [\theta^\circ / -\theta^\circ]_2$, SSSS, UD, FG-V, FG-O, FG-X

gia cường. Riêng trường hợp UD (Hình 2, Hình 3) do SWCNT phân bố đều theo chiều dày tấm nên quy luật phân bố của ứng suất chỉ phụ thuộc vào quy luật của biến dạng và cấu hình composite. Cấu hình composite phản xứng xiên góc sẽ làm cho ứng suất pháp phân bố theo quy luật phản xứng trên toàn bộ chiều dày tấm (ứng suất tại vị trí $z = 0$ có giá trị khác 0, trừ trường hợp góc phương sợi 00 và 900 ứng với trường hợp tấm trục hướng). Hiện tượng này chỉ có thể quan sát được đối với trường hợp UD, các trường hợp khác do có thêm ảnh hưởng của quy luật phân bố cốt sợi sẽ không thể quan sát thấy.

Trong từng lớp vật liệu, cấu hình composite không ảnh hưởng đến quy luật phân bố của ứng suất pháp mà chỉ có ảnh hưởng của quy luật của biến dạng tương ứng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$. Có thể quan sát thấy rằng, trong trường hợp UD, phân bố của ứng suất pháp trong từng lớp gần như tuyến tính. Vì vậy có thể suy ra biến dạng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ cũng có phân bố xấp xỉ tuyến tính. Điều này mâu thuẫn với các biểu thức biến dạng (4), (5), trong đó thành phần biến dạng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ có quy luật phân bố bậc 3 theo tọa độ chiều cao z . Như vậy chỉ có thể giải thích rằng thành phần biến dạng bậc cao $\varepsilon_{xx}^{(3)}, \varepsilon_{yy}^{(3)}$ là rất bé và hầu như không ảnh hưởng gì đến quy luật phân bố của biến dạng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$. Kết quả này phù hợp với logic định tính và với kết quả phân tích trạng thái ứng suất, biến dạng của kết cấu tấm composite bằng các lý thuyết khác.

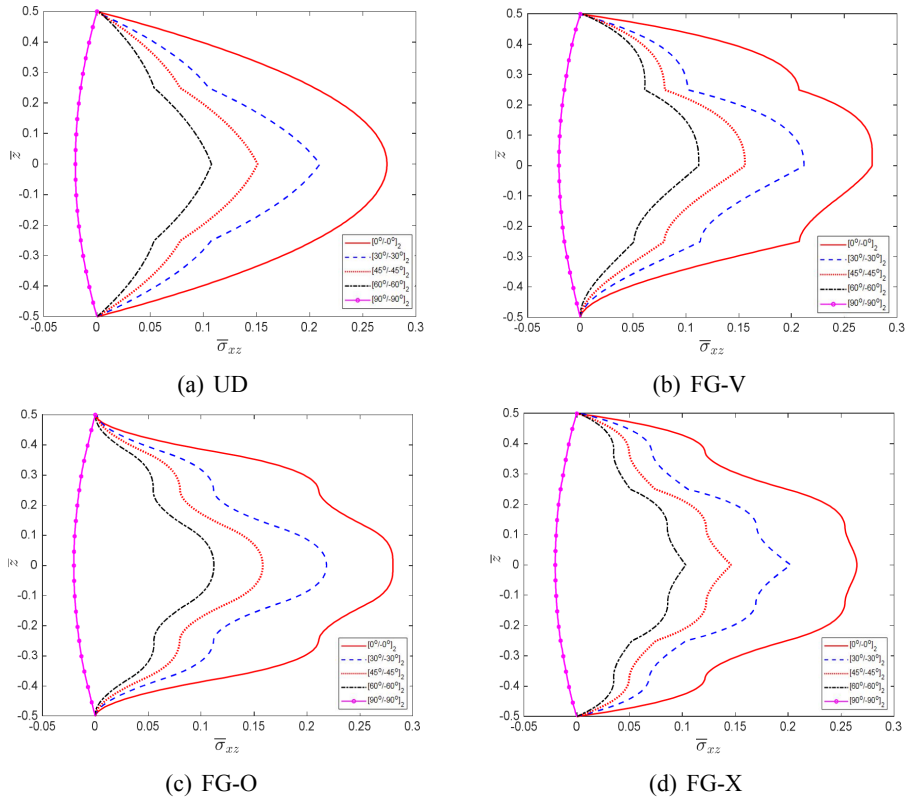
4.2. Quy luật phân bố các thành phần ứng suất tiếp

Hình 4 thể hiện quy luật phân bố của thành phần ứng suất màng $\bar{\sigma}_{xy}$. Có thể nhận thấy rằng, mặc dù không thực sự rõ nét nhưng chúng ta vẫn có thể quan sát được các hiện tượng như đối với dạng phân bố ứng suất pháp. Cụ thể là, trường hợp UD có ứng suất màng chỉ phụ thuộc vào quy luật của biến dạng tương ứng nên có phân bố bậc nhất trong từng lớp; các trường hợp khác có phân bố ứng suất màng phù hợp với quy luật phân bố của cốt sợi và cũng có dạng các chữ cái V, O, X tương ứng với các quy luật phân bố cốt sợi FG-V, FG-O và FG-X. Điều này cũng có thể giải thích giống như đối với quy luật phân bố ứng suất pháp ở trên.



Hình 4. Phân bố ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{xy}$ theo chiều dày của tấm composite lớp FG-CNTRC: $b/a = 1, [\theta^\circ / -\theta^\circ]_2$, SSSS, UD, FG-V, FG-O, FG-X

Hình 5 thể hiện quy luật phân bố của thành phần ứng suất cắt ngang $\bar{\sigma}_{xz}$ theo phương chiều dày tấm. Trước hết chúng ta có thể nhận thấy phân bố ứng suất cắt ngang thỏa mãn điều kiện biên bằng 0 ở mặt trên và mặt dưới của tấm. Đây chính là một trong những cải tiến quan trọng của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao của Reddy so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Hơn nữa, riêng hai trường hợp tấm cấu hình vuông góc (tương ứng với góc phương sợi bằng 0° và 90°) thì ứng suất cắt ngang phân bố dạng parabol trên toàn chiều dày tấm. Điều này phù hợp với các biểu thức tính biến dạng (4), (5), trong đó thành phần biến dạng γ_{xz} có quy luật phân bố bậc 2. Đối với các trường hợp khác (FG-V, FG-O, FG-X), trong từng lớp, biến dạng cắt ngang có phân bố bậc 2 và cốt sợi phân bố theo quy luật tuyến tính nên ứng suất sẽ có dạng đường cong bậc 3.



Hình 5. Phân bố ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{xz}$ theo chiều dày của tấm composite lớp FG-CNTRC: $b/a = 1, [\theta^\circ / -\theta^\circ]_2$, SSSS, UD, FG-V, FG-O, FG-X

5. Kết luận

Bài báo nghiên cứu về đặc điểm phân bố của các thành phần ứng suất theo chiều dày tấm composite lớp gia cường SWCNT làm cơ sở cho việc phân tích tấm theo điều kiện bền. Tác giả đã xây dựng thành công mô hình phân tích tĩnh tấm chữ nhật FG-CNTRC chịu uốn bằng phương pháp Pb2-Ritz, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao 5 ẩn số chuyển vị của Reddy. Sau khi khảo sát sự hội tụ của lời giải, nghiên cứu so sánh đã được thực hiện nhằm kiểm chứng độ tin cậy của các kết quả số. Bài báo sau đó tiến hành khảo sát sự phân bố của các thành phần ứng suất theo chiều dày tấm; phân tích, bình luận và chỉ ra mối liên hệ giữa quy luật phân bố ứng suất với quy luật phân bố các thành phần biến dạng, quy luật phân bố của SWCNT gia cường cũng như cấu hình composite. Các kết quả của bài báo là nguồn tham khảo hữu ích cho các hoạt động đào tạo và nghiên cứu trong cùng lĩnh vực.

Tài liệu tham khảo

- [1] Duc, N. D., Lee, J., Nguyen-Thoi, T., Thang, P. T. (2017). [Static response and free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite rectangular plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations](#). *Aerospace Science and Technology*, 68:391–402.
- [2] Huang, B., Guo, Y., Wang, J., Du, J., Qian, Z., Ma, T., Yi, L. (2016). [Bending and free vibration analyses of antisymmetrically laminated carbon nanotube-reinforced functionally graded plates](#). *Journal of Composite Materials*, 51(22):3111–3125.
- [3] Ardestani, M. M., Zhang, L., Liew, K. (2017). [Isogeometric analysis of the effect of CNT orientation on the static and vibration behaviors of CNT-reinforced skew composite plates](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317:341–379.

- [4] Truong-Thi, T., Vo-Duy, T., Ho-Huu, V., Nguyen-Thoi, T. (2019). [Static and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Carbon Nanotube Reinforced Composite Plates using CS-DSG3](#). *International Journal of Computational Methods*, 17(03):1850133.
- [5] Zhang, L., Song, Z., Liew, K. (2015). [Nonlinear bending analysis of FG-CNT reinforced composite thick plates resting on Pasternak foundations using the element-free IMLS-Ritz method](#). *Composite Structures*, 128:165–175.
- [6] Fan, Y., Wang, H. (2016). [Nonlinear bending and postbuckling analysis of matrix cracked hybrid laminated plates containing carbon nanotube reinforced composite layers in thermal environments](#). *Composites Part B: Engineering*, 86:1–16.
- [7] Selim, B. A., Yin, B. B., Liew, K. M. (2018). [Impact analysis of CNT-reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers based on Reddy's higher-order shear deformation theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 136:10–19.
- [8] Rafiee, M., He, X. Q., Mareishi, S., Liew, K. M. (2015). [Nonlinear Response of Piezoelectric Nanocomposite Plates: Large Deflection, Post-Buckling and Large Amplitude Vibration](#). *International Journal of Applied Mechanics*, 07(05):1550074.
- [9] Zhu, P., Lei, Z., Liew, K. (2012). [Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory](#). *Composite Structures*, 94(4):1450–1460.
- [10] Alibeigloo, A., Emtehani, A. (2014). [Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plate using differential quadrature method](#). *Meccanica*, 50(1):61–76.
- [11] Phung-Van, P., Abdel-Wahab, M., Liew, K., Bordas, S., Nguyen-Xuan, H. (2015). [Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 123:137–149.
- [12] García-Macías, E., Castro-Triguero, R., Flores, E. I. S., Friswell, M. I., Gallego, R. (2016). [Static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced skew plates](#). *Composite Structures*, 140:473–490.
- [13] Jeyaraj, P., Rajkumar, I. (2013). [Static Behavior of FG-CNT Polymer Nano Composite Plate under Elevated Non-uniform Temperature Fields](#). *Procedia Engineering*, 64:825–834.
- [14] Lei, Z. X., Zhang, L. W., Liew, K. M. (2016). [Analysis of laminated CNT reinforced functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Composites Part B: Engineering*, 84:211–221.
- [15] Mehar, K., Panda, S. K. (2017). [Thermoelastic Analysis of FG-CNT Reinforced Shear Deformable Composite Plate Under Various Loadings](#). *International Journal of Computational Methods*, 14(02):1750019.
- [16] Alibeigloo, A., Liew, K. M. (2013). [Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity](#). *Composite Structures*, 106:873–881.
- [17] Malekzadeh, P., Heydarpour, Y. (2014). [Mixed Navier-layerwise differential quadrature three-dimensional static and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite laminated plates](#). *Meccanica*, 50(1):143–167.
- [18] Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A. (2015). [Exact solutions for static and dynamic analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates with Pasternak elastic foundation](#). *Applied Mathematical Modelling*, 39(18):5459–5472.
- [19] Sobhy, M. (2019). [Levy solution for bending response of FG carbon nanotube reinforced plates under uniform, linear, sinusoidal and exponential distributed loadings](#). *Engineering Structures*, 182:198–212.
- [20] Shen, H.-S. (2009). [Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments](#). *Composite Structures*, 91(1):9–19.
- [21] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.
- [22] Wang, C. M., Ang, K. K., Yang, L., Watanabe, E. (2001). [Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Sandwich Plates via Ritz Method](#). *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 8(2):101–118.
- [23] Lei, Z. X., Zhang, L. W., Liew, K. M. (2016). [Analysis of laminated CNT reinforced functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Composites Part B: Engineering*, 84:211–221.