

PHÂN TÍCH KHUNG THÉP CÓ LIÊN KẾT NỬA CỨNG PHI TUYẾN CHỊU TẢI TRỌNG THAY ĐỔI LẶP

Vũ Quốc Anh^{a,*}, Nguyễn Hải Quang^b, Lê Dũng Bảo Trung^a

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội,
km10, đường Nguyễn Trãi, quận Thanh Xuân, Hà Nội, Việt Nam

^bKhoa Xây dựng, trường Đại học Điện lực
số 235 đường Hoàng Quốc Việt, quận Bắc Từ Liêm, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 25/5/2023, Sửa xong 24/11/2023, Chấp nhận đăng 04/12/2023

Tóm tắt

Đối với khung thép, liên kết nối cột, dầm và đặc biệt là các liên kết nối dầm và cột (liên kết dầm-cột) đóng vai trò quan trọng trong phân tích kết cấu khung. Khi tính toán khung thép với liên kết nửa cứng sẽ có một mô hình phân tích gần hơn với sự làm việc thực tế của khung, nội lực phân bố đều hơn, đạt hiệu quả kinh tế cao hơn so với phương pháp tính toán truyền thống với liên kết cứng hoặc khớp. Bài báo này trình bày một phương pháp thiết lập ma trận độ cứng mới cho phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng phi tuyến. Chương trình tính được xây dựng bằng phần mềm Matlab, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, tải trọng thay đổi lặp tăng dần, cho phép tiến hành khảo sát số với khối lượng tính toán lớn. Kết quả được kiểm chứng với tính toán lý thuyết và thực nghiệm đã được công bố.

Từ khoá: khung thép; liên kết nửa cứng phi tuyến; công thức ma trận độ cứng; phần tử thanh; tải trọng lặp.

ANALYSIS OF NONLINEAR SEMI-RIGID CONNECTIONS STEEL FRAMES WITH CYCLIC LOADS

Abstract

For the steel frames, the connection between columns, beams and especially the connections between beam and column (beam-column connections) plays an important role in the analysis of the frame structure. When calculating steel frames with semi-rigid connections, we have an analytical model closer to the actual working of the frame, internal forces are more balanced distributing, achieve higher economic efficiency than the traditional calculation method with rigid or pin connections. This paper presents a new method to establishing a stiffness matrix for a frame element with nonlinear semi-rigid connections at two ends. The calculation program was built by Matlab software, using the finite element method, the increases cyclic loads, allowing the authors to conduct numerical surveys with a large amount of computation. The results are verified with theoretical and experimental calculations that have been published.

Keywords: steel frame; nonlinear semi-rigid connections; stiffness matrix formulation; frame element; cyclic loads.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(1V\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(1V)-03) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Đối với khung thép, liên kết nối các cấu kiện cột, dầm và dầm-cột có vai trò quan trọng đối với sự làm việc của khung. Liên kết dạng khớp dễ chế tạo và có chi phí nhỏ nhất, liên kết cứng có cấu tạo phức tạp nhất và chi phí chế tạo lớn nhất, liên kết nửa cứng là trung gian cả về mặt cấu tạo và chi phí sản xuất. Phần tử thanh (dầm hoặc cột khung) có hai đầu liên kết cứng hoặc khớp là trường hợp riêng tương ứng khi liên kết nửa cứng có giá trị độ cứng xoay tiến đến vô cùng hoặc tiến về không.

Khi tính toán khung thép, để đơn giản hoá khi tính toán nội lực, chuyển vị theo phương pháp truyền thống thường giả thiết liên kết cột và dầm là liên kết cứng tuyệt đối hoặc liên kết khớp lý tưởng. Tuy

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: anhvq@hau.edu.vn (Anh, V. Q.)

nhien, liên kết trong khung thép được cấu tạo từ các bộ phận như thép tấm, thép hình, bu lông, đường hàn nên khi chịu tải trọng các bộ phận này bị biến dạng tạo nên tính chất nửa cứng cho liên kết. Khái niệm, phân loại, một số kết quả nghiên cứu về đặc tính ứng xử liên kết nửa cứng cũng như một số mô hình quan hệ mô men-góc xoay của liên kết nửa cứng phi tuyến, trình bày trong [1], gồm: các mô hình đa tuyến; các mô hình có mối quan hệ giữa mô men với góc xoay là đường cong như mô hình của Richard-Abbott hay còn gọi là mô hình bốn tham số, mô hình hai và ba tham số, mô hình hàm mũ của Lui và Chen, mô hình hàm mũ của Frye-Moris, mô hình Kishi và Chen, mô hình do Kishi N, Chen W. F, Goto Y và Matsuo K.

Mô hình liên kết theo dạng đường thẳng có hệ số độ cứng của liên kết xác định theo từng giai đoạn chịu lực nên khối lượng tính toán nhỏ hơn, mô hình liên kết theo dạng đường cong cần có khối lượng tính toán lớn, nhưng kết quả tính toán thu được sẽ chính xác hơn. Trong các mô hình liên kết hiện đại mối quan hệ giữa mô men và góc xoay có thể có dạng đường cong hoặc đường thẳng tùy theo từng giai đoạn làm việc của liên kết. Do các cấu kiện trong khung thép là những cấu kiện mảnh nên độ cứng của liên kết thực tế sẽ có ảnh hưởng lớn đến sự làm việc của khung, do vậy các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu thép của các nước tiên tiến như tiêu chuẩn Anh BS 449-2:1969 [2], tiêu chuẩn Mỹ AISC-LRDF 1999 [3], tiêu chuẩn châu Âu EN 1993-1-8:2005 [4], đã sớm đưa ra các mô hình liên kết một cách tương đối đơn giản để thuận tiện cho tính toán, thiết kế khung thép, trong đó độ cứng của liên kết được xây dựng theo cấu tạo của liên kết.

Nghiên cứu tính toán khung thép với liên kết nửa cứng là một chủ đề thu hút sự quan tâm của rất nhiều nhà khoa học. Trên thế giới, nghiên cứu sớm nhất có thể kể đến của Batho và Rowan đã đề xuất phương pháp đường thẳng dầm phổ biến để phân loại độ cứng liên kết, Monforton và Wu [5] đã tiên phong trong việc áp dụng phương pháp ma trận độ cứng vào bài toán phân tích khung có liên kết đàn hồi. Tại Việt Nam, Ngọc [6] sử dụng mô hình liên kết một lò xo chuyển vị xoay, sau đó xây dựng ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút của phần tử thanh, sử dụng phương pháp ma trận chuyển để giải bài toán nội lực, chuyển vị của khung thép. Anh [7] đã xây dựng ma trận độ cứng, ma trận hình học và ma trận khối lượng của phần tử thanh và giải được bài toán về nội lực, chuyển vị của khung có kể đến phi tuyến hình học, xác định tần số dao động riêng và chiều dài tính toán của cột bậc. Sơn [8] đã xây dựng mô hình siêu phần tử gồm hai đoạn cứng và đoạn dầm, cùng ba lò xo gồm 1 lò xo xoay và 2 lò xo thẳng để giải bài toán tìm nội lực, chuyển vị khung thép liên kết nửa cứng theo mô hình đa tuyến tính, dưới tác dụng của tải trọng tĩnh và động. Quang [9] đã xây dựng ma trận độ cứng, véc tơ tải trọng, ma trận khối lượng của phần tử thanh hai đầu liên kết nửa cứng theo mô hình đàn dẻo và giải bài toán phân tích nội lực, chuyển vị, dao động và khảo sát ảnh hưởng của liên kết nửa cứng đến dao động của khung thép. Hùng, H. M. và Hùng, T. V. [10] đã nghiên cứu thiết kế tối ưu khung thép phi tuyến có liên kết nửa cứng xét đến gia cường các khu vực vùng cứng nút khung chịu tải trọng tĩnh, trong đó nút khung được gia cường bằng bản thép theo tiêu chuẩn AISC-LRFD theo trường hợp để có thể bỏ qua hiệu ứng cắt trong nút khung, để nút khung không ảnh hưởng đến ứng xử của khung thép. Các tác giả đã mô hình hoá và phân tích khung theo phương pháp khớp dẻo hiệu chỉnh do Waifah Chen xây dựng, trong đó khớp dẻo coi như chỉ hình thành tại hai đầu với chiều dài vùng dẻo = 0. Phân tích xét đến hiệu ứng P- δ bằng các hàm ổn định của Chen và Lui, xét đến hiệu ứng phi tuyến vật liệu trong trường hợp phần tử chịu lực dọc trục bằng cách sử dụng mô đun tiếp tuyến CRC, trường hợp phần tử chịu cả lực dọc trục và uốn, sử dụng mô hình giảm độ cứng cho khớp dẻo do Kim và Choi xây dựng, với mô hình mặt chảy Orbison và cs. đề xuất. Sau khi xây dựng được hàm tối ưu cho trọng lượng khung thép với các điều kiện ràng buộc về cấu tạo, chuyển vị, các tác giả đã phân tích, tính toán tiết diện và sử dụng thuật toán tiến hoá vi phân (DE) cải tiến, tên là mEpDE, do Ha và cs. xây dựng để giải bài toán tối ưu trọng lượng khung.

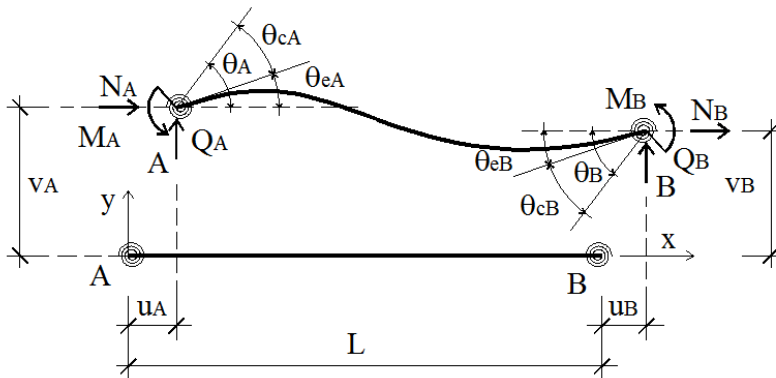
Qua các nghiên cứu này, nhận thấy việc tính toán khung thép với liên kết nửa cứng phi tuyến là việc cần thiết, có ý nghĩa thực tiễn, đã được nhiều nhà khoa học nghiên cứu, đã được đưa vào trong tiêu chuẩn thiết kế kết cấu thép của những nước tiên tiến. Bài báo này trình bày một phương pháp mới xây dựng ma trận độ cứng của phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng phi tuyến để phục vụ cho việc tính toán nội lực, chuyển vị của khung thép với mối quan hệ giữa mô men và góc xoay là đường cong hoặc đường thẳng nhằm làm phong phú thêm vốn kiến thức đã có của chuyên ngành.

2. Phương pháp phân tích khung thép có liên kết nửa cứng phi tuyến

2.1. Xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng phi tuyến

Xét phần tử thanh e có hai đầu A và B là liên kết nửa cứng phi tuyến với mối quan hệ giữa mô men và góc xoay theo đường cong. Kí hiệu A, I, L, E tương ứng là diện tích tiết diện, mô men quán tính với trục z của tiết diện, chiều dài thanh và mô đun đàn hồi của vật liệu làm thanh. Phân tích kết cấu khung thép có liên kết nửa cứng phi tuyến chịu tải trọng tĩnh theo phương pháp đẩy dần. Ở bước gia tăng tải trọng thứ i , kí hiệu: N_A, Q_A, M_A và N_B, Q_B, M_B tương ứng là các nội lực nút gồm: lực dọc (theo trục x), lực cắt (theo trục y), mô men uốn (quanh trục z) tại nút A và nút B; u_A, v_A và u_B, v_B tương ứng là chuyển vị dọc trục (chuyển vị thẳng theo trục x), chuyển vị đứng (chuyển vị thẳng theo trục y) của nút A và nút B; θ_A, θ_B là chuyển vị xoay (góc xoay) quanh trục z của nút A và nút B; θ_{eA}, θ_{eB} là góc xoay quanh trục z của mút dầm A và mút dầm B; θ_{cA}, θ_{cB} là góc xoay của liên kết quanh trục z tại nút A và nút B; k_A, k_B là độ cứng xoay của liên kết quanh trục z tại nút A và nút B; M_{A0}, M_{B0} là mô men ban đầu trong mỗi bước tăng tải trọng liên kết tại A và B; θ_{A0}, θ_{B0} là góc xoay ban đầu trong mỗi bước tăng tải trọng của liên kết tại A và B; PTHH là phương pháp phần tử hữu hạn.

Xét phần tử thanh điển hình là phần tử dầm khung có liên kết nửa cứng với cột. Mối quan hệ giữa chuyển vị và nội lực nút ở hai đầu dầm thể hiện như trên Hình 1. Quan niệm liên kết giữa dầm và cột không có kích thước nên chuyển vị thẳng và nội lực tại nút và mút dầm là bằng nhau.



Hình 1. Phần tử dầm khung có liên kết nửa cứng

Tại đầu dầm, góc xoay của nút A và nút B được viết là:

$$\begin{cases} \theta_A = \theta_{eA} + \theta_{cA} \\ \theta_B = \theta_{eB} + \theta_{cB} \end{cases} \quad (1)$$

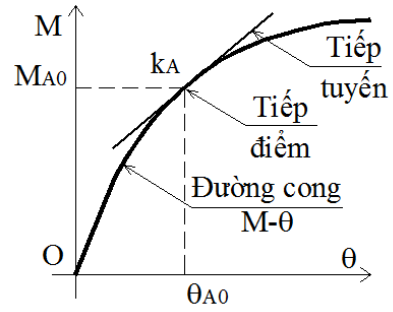
$$\begin{cases} \theta_{eA} = \theta_A - \theta_{cA} \\ \theta_{eB} = \theta_B - \theta_{cB} \end{cases} \quad (2)$$

Khi mối quan hệ giữa mô men và góc xoay $M - \theta$ là đường thẳng, độ cứng xoay của liên kết là hệ số góc của đường thẳng đó; còn khi mối quan hệ $M - \theta$ là đường cong độ cứng xoay chính là hệ số

góc của đường thẳng tiếp tuyến với đường cong $M-\theta$. Tại đầu nút A của dầm, mối quan hệ về hình học giữa phương trình đường thẳng tiếp tuyến có hệ số góc k_A với đường cong $M-\theta$ tại điểm có tọa độ (M_{A0}, θ_{A0}) thể hiện như trên Hình 2; tương tự đối với đầu nút B của dầm.

Trong mỗi bước gia tăng của tải trọng, phương trình đường thẳng tiếp tuyến tại điểm (M_{A0}, θ_{A0}) có hệ số góc k_A và đường thẳng tiếp tuyến tại điểm (M_{B0}, θ_{B0}) có hệ số góc k_B là:

$$\begin{cases} M_A = k_A(\theta_{cA} - \theta_{A0}) + M_{A0} \\ M_B = k_B(\theta_{cB} - \theta_{B0}) + M_{B0} \end{cases} \quad (3)$$



Hình 2. Mô men, góc xoay, độ cứng xoay ban đầu mỗi bước tải trọng tại nút A

Phương trình này đã được Quang, N. H. sử dụng để xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử thanh hai đầu liên kết nửa cứng theo mô hình đàn dẻo đa tuyến, [9]. Từ đó có được:

$$\begin{cases} \theta_{cA} = \theta_{A0} + \frac{M_A - M_{A0}}{k_A} \\ \theta_{cB} = \theta_{B0} + \frac{M_B - M_{B0}}{k_B} \end{cases} \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta được:

$$\begin{cases} \theta_{eA} = \theta_A - \frac{M_A}{k_A} + \frac{M_{A0}}{k_A} - \theta_{A0} \\ \theta_{eB} = \theta_B - \frac{M_B}{k_B} + \frac{M_{B0}}{k_B} - \theta_{B0} \end{cases} \quad (5)$$

Do các chuyển vị dọc trục và chuyển vị đứng độc lập với nhau nên mối liên hệ giữa nội lực nút, độ cứng và chuyển vị nút của phần tử dầm khung có thể được thiết lập độc lập đối với phần tử thanh chịu lực dọc trục và phần tử dầm chịu uốn ngang phẳng.

Đối với phần tử thanh chịu lực dọc trục, dễ dàng có được mối liên hệ giữa véc tơ nội lực nút, ma trận độ cứng và véc tơ chuyển vị nút như sau:

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ N_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Đối với phần tử thanh chịu uốn ngang phẳng, gọi $w = w(x)$ là phương trình độ võng của dầm theo biến x , phương trình vi phân của độ võng có dạng:

$$\frac{w'''}{(1 + w'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M}{EI} \quad (7)$$

Với dầm có chuyển vị nhỏ, bỏ qua w^2 so với đơn vị, phương trình vi phân gần đúng của độ võng có dạng:

$$M = \pm EIw'' \quad (8)$$

Dựa trên mối quan hệ vi phân giữa mô men và lực cắt có:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \pm EIw''' \quad (9)$$

Tại đầu mút A, $x = 0$, có:

$$M_A = -EI \frac{d^2w(x)_{x=0}}{dx^2} \quad (10)$$

$$Q_A = EI \frac{d^3w(x)_{x=0}}{dx^3} \quad (11)$$

Tại đầu mút B, $x = L$, có:

$$M_B = EI \frac{d^2w(x)_{x=L}}{dx^2} \quad (12)$$

$$Q_B = -EI \frac{d^3w(x)_{x=L}}{dx^3} \quad (13)$$

Phương trình độ võng cũng chính là hàm chuyển vị thẳng theo trục y của dầm trong phương pháp PTHH. Véc tơ hàm chuyển vị có dạng:

$$\{w(x)\} = [\psi(x)] \{\delta\}_{ee} = [\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \ \psi_4(x)] \{v_A \ \theta_{eA} \ v_B \ \theta_{eB}\}^T \quad (14)$$

trong đó $[\psi] = [\psi_1(x) \ \psi_2(x) \ \psi_3(x) \ \psi_4(x)]$ là ma trận hàm dạng của phần tử dầm; $\{\delta\}_{ee} = \{v_A \ \theta_{eA} \ v_B \ \theta_{eB}\}^T$ là véc tơ chuyển vị đầu mút của dầm.

Thay thế các phương trình (5) vào (14) được:

$$\{w(x)\} = [\psi(x)] \left\{ v_A \ \theta_A - \frac{M_A}{k_A} + \frac{M_{A0}}{k_A} - \theta_{A0} \ v_B \ \theta_B - \frac{M_B}{k_B} + \frac{M_{B0}}{k_B} - \theta_{B0} \right\}^T \quad (15)$$

Ta cũng có:

$$\{w''(x)\} = [\psi''(x)] \{\delta\}_{ee} \quad (16)$$

$$\{w'''(x)\} = [\psi'''(x)] \{\delta\}_{ee} \quad (17)$$

Phần tử dầm có bốn bậc tự do, lựa chọn hàm dạng là các hàm Hermite bậc 3, có:

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \Rightarrow \psi_1''(x) = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}; \quad \psi_1'''(x) = \frac{12}{L^3} \quad (18)$$

$$\psi_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \Rightarrow \psi_2''(x) = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \psi_2'''(x) = \frac{6}{L^2} \quad (19)$$

$$\psi_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \Rightarrow \psi_3''(x) = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}; \quad \psi_3'''(x) = -\frac{12}{L^3} \quad (20)$$

$$\psi_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \Rightarrow \psi_4''(x) = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}; \quad \psi_4'''(x) = \frac{6}{L^2} \quad (21)$$

Tại đầu mút A, thay $x = 0$ vào công thức (18), (19), (20), (21) tiếp đến thay tương ứng các giá trị vừa tính được vào công thức (10), (11) và công thức (16), (17) được:

$$\begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \left\{ \theta_A - \frac{M_A}{k_A} + \frac{M_{A0}}{k_A} - \theta_{A0} \right\} \quad (22)$$

Tại đầu mút B, thay $x = L$ vào công thức (18), (19), (20), (21) tiếp đến thay tương ứng các giá trị vừa tính được vào công thức (12), (13) và công thức (16), (17) được:

$$\begin{Bmatrix} Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B - \frac{M_B}{k_B} + \frac{M_{B0}}{k_B} - \theta_{B0} \\ v_B \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Kết hợp công thức (22) và (23) ta có:

$$\begin{Bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A - \frac{M_A}{k_A} + \frac{M_{A0}}{k_A} - \theta_{A0} \\ v_A \\ \theta_B - \frac{M_B}{k_B} + \frac{M_{B0}}{k_B} - \theta_{B0} \\ v_B \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Trong công thức (24) biểu thức góc xoay gồm đồng thời cả độ cứng xoay, góc xoay ban đầu và mô men ban đầu của mỗi bước tính. Để thiết lập được ma trận độ cứng của phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng, cần tách và đưa góc xoay θ_A, θ_B về giá trị độc lập; đưa độ cứng xoay k_A, k_B vào ma trận độ cứng đàn hồi của phần tử dầm và tách riêng các giá trị mô men ban đầu M_{A0}, M_{B0} , góc xoay ban đầu θ_{A0}, θ_{B0} . Sau khi biến đổi toán học công thức (24) có:

$$Q_A = \frac{6EI \left(L^2 k_A k_B \theta_A + L^2 k_A k_B \theta_B + 2EILk_A \theta_A + 2EILk_B \theta_B + 2Lk_A k_B v_A \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$+ \frac{6EI \left(-2Lk_A k_B v_B + 2EIk_A v_A - 2EIk_A v_B + 2EIk_B v_A - 2EIk_B v_B \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$+ \frac{6EI \left(-L^2 k_A k_B \theta_{A0} - L^2 k_A k_B \theta_{B0} - 2EILk_A \theta_{A0} - 2EILk_B \theta_{B0} + L^2 k_B M_{A0} \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$+ \frac{6EI \left(+L^2 k_A M_{B0} + 2EILM_{A0} + 2EILM_{B0} \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$M_A = \frac{2EI \left(2L^2 k_A k_B \theta_A + L^2 k_A k_B \theta_B + 6EILk_A \theta_A + 3Lk_A k_B v_A \right)}{L (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$- \frac{2EI \left(-3Lk_A k_B v_B + 6EIk_A v_A - 6EIk_A v_B \right)}{L (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$+ \frac{2EI \left(-2L^2 k_A k_B \theta_{A0} - L^2 k_A k_B \theta_{B0} - 6EILk_A \theta_{A0} \right)}{L (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$+ \frac{2EI \left(+2L^2 k_B M_{A0} + L^2 k_A M_{B0} + 6EILM_{A0} \right)}{L (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$Q_B = - \frac{6EI \left(L^2 k_A k_B \theta_A + L^2 k_A k_B \theta_B + 2EILk_A \theta_A + 2EILk_B \theta_B + 2Lk_A k_B v_A \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$- \frac{6EI \left(-2Lk_A k_B v_B + 2EIk_A v_A - 2EIk_A v_B + 2EIk_B v_A - 2EIk_B v_B \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$- \frac{6EI \left(-L^2 k_A k_B \theta_{A0} - L^2 k_A k_B \theta_{B0} - 2EILk_A \theta_{A0} - 2EILk_B \theta_{B0} + L^2 k_B M_{A0} \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$- \frac{6EI \left(+L^2 k_A M_{B0} + 2EILM_{A0} + 2EILM_{B0} \right)}{L^2 (L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

$$M_B = \frac{2EI \left(\begin{array}{c} L^2 k_A k_B \theta_A + 2L^2 k_A k_B \theta_B + 6EILk_B \theta_B + 3Lk_A k_B v_A \\ -3Lk_A k_B v_B + 6EIk_B v_A - 6EIk_B v_B \end{array} \right)}{L(L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)} + \frac{2EI \left(\begin{array}{c} -L^2 k_A k_B \theta_{A0} - 2L^2 k_A k_B \theta_{B0} - 6EILk_B \theta_{B0} \\ +L^2 k_B M_{A0} + 2L^2 k_A M_{B0} + 6EILM_{B0} \end{array} \right)}{L(L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}$$

Đặt:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{EA}{L}; & b_1 &= \frac{2EI}{L^2(L^2 k_A k_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2 I^2)}; \\ b_2 &= 6(Lk_A k_B + EIk_A + EIk_B); & b_3 &= 2L^2 k_A(Lk_B + 3EI); \\ b_4 &= 2L^2 k_B(Lk_A + 3EI); & b_5 &= 3Lk_A(Lk_B + 2EI); & b_6 &= 3Lk_B(Lk_A + 2EI); \\ b_7 &= L^3 k_A k_B; & b_8 &= 3L[(Lk_B + 2EI)(M_{A0} - k_A \theta_{A0}) + (Lk_A + 2EI)(M_{B0} - k_B \theta_{B0})]; \\ b_9 &= L^2 [2(Lk_B + 3EI)(M_{A0} - k_A \theta_{A0}) + Lk_A (M_{B0} - k_B \theta_{B0})]; \\ b_{10} &= L^2 [Lk_B (M_{A0} - k_A \theta_{A0}) + 2(Lk_A + 3EI)(M_{B0} - k_B \theta_{B0})] \end{aligned}$$

Nhóm các số hạng theo từng thành phần tương ứng véc tơ chuyển vị nút được:

$$\begin{aligned} Q_A &= b_1 b_2 v_A + b_1 b_5 \theta_A - b_1 b_2 v_B + b_1 b_6 \theta_B + b_1 b_8; \\ M_A &= b_1 b_5 v_A + b_1 b_3 \theta_A - b_1 b_5 v_B + b_1 b_7 \theta_B + b_1 b_9; \\ Q_B &= -b_1 b_2 v_A - b_1 b_5 \theta_A + b_1 b_2 v_B - b_1 b_6 \theta_B - b_1 b_8; \\ M_B &= b_1 b_6 v_A + b_1 b_7 \theta_A - b_1 b_6 v_B + b_1 b_4 \theta_B + b_1 b_{10} \end{aligned}$$

Tổng hợp, sắp xếp thành dạng ma trận, bao gồm cả thành phần lực dọc và chuyển vị dọc trục, có biểu thức liên hệ giữa véc tơ nội lực nút, ma trận độ cứng, véc tơ chuyển vị nút và véc tơ nội lực nút dư như sau:

$$\begin{pmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 & b_1 b_5 & 0 & -b_1 b_2 & b_1 b_6 \\ 0 & b_1 b_5 & b_1 b_3 & 0 & -b_1 b_5 & b_1 b_7 \\ -b_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 b_2 & -b_1 b_5 & 0 & b_1 b_2 & -b_1 b_6 \\ 0 & b_1 b_6 & b_1 b_7 & 0 & -b_1 b_6 & b_1 b_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 b_8 \\ b_1 b_9 \\ 0 \\ -b_1 b_8 \\ b_1 b_{10} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Công thức (25) có dạng:

$$\{N\}_e = [k_s]_e \{\delta\}_e + \{N_0\}_e \quad (26)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \{N\}_e &= \{N_A \quad Q_A \quad M_A \quad N_B \quad Q_B \quad M_B\}^T \\ \{\delta\}_e &= \{u_A \quad v_A \quad \theta_A \quad u_B \quad v_B \quad \theta_B\}^T \end{aligned} \quad (27)$$

tương ứng là véc tơ nội lực và véc tơ chuyển vị nút của phần tử thanh e ở bước thứ i ;

$$[k_s]_e = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1b_2 & b_1b_5 & 0 & -b_1b_2 & b_1b_6 \\ 0 & b_1b_5 & b_1b_3 & 0 & -b_1b_5 & b_1b_7 \\ -b_0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1b_2 & -b_1b_5 & 0 & b_1b_2 & -b_1b_6 \\ 0 & b_1b_6 & b_1b_7 & 0 & -b_1b_6 & b_1b_4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

là ma trận độ cứng của phần tử thanh e có hai đầu liên kết nửa cứng ở bước thứ i ;

$$\begin{aligned} \{N_0\}_e &= \{N_{0,A} \quad Q_{0,A} \quad M_{0,A} \quad N_{0,B} \quad Q_{0,B} \quad M_{0,B}\}^T \\ &= \{0 \quad b_1b_8 \quad b_1b_9 \quad 0 \quad -b_1b_8 \quad b_1b_{10}\}^T \end{aligned} \quad (29)$$

là véc tơ nội lực nút dư của phần tử thanh e ở bước thứ i .

So sánh ma trận $[k_s]_e$ với các tài liệu [11–22] thấy rằng mặc dù được thiết lập theo các phương pháp khác nhau nhưng có giá trị như nhau. Công thức (25) cho thấy rõ ràng về bản chất và sự biến đổi của nội lực nút qua mỗi bước tính. Bên cạnh đó, việc tách công thức (25) thành hai thành phần là thuận tiện trong xây dựng ma trận độ cứng cho các trường hợp riêng của liên kết (khi đó các liên kết nửa cứng trở thành cứng hoặc khớp); qua đó cho phép kiểm chứng sự đúng đắn của ma trận độ cứng được thiết lập theo phương pháp ở trên so với ma trận độ cứng của các phần tử mẫu tiêu chuẩn đã có trong phương pháp PTHH.

2.2. Các trường hợp riêng của ma trận độ cứng

a. Ứng với ma trận độ cứng của phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng $[k_s]_e$

Bảng 1. Số hạng của ma trận độ cứng phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng trong trường hợp riêng

TT	Giá trị	Hai đầu	Đầu A cứng,	Đầu A khớp,	Hai đầu
		cứng	đầu B khớp	đầu B cứng	khớp
		$k_A \rightarrow \infty$	$k_A \rightarrow \infty$	$k_A \rightarrow 0$	$k_A \rightarrow 0$
		$k_B \rightarrow \infty$	$k_B \rightarrow 0$	$k_B \rightarrow \infty$	$k_B \rightarrow 0$
b_1b_2	$\frac{12EI(Lk_Ak_B + EIk_A + EIk_B)}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{3EI}{L^3}$	$\frac{3EI}{L^3}$	0
b_1b_5	$\frac{6EILk_A(Lk_B + 2EI)}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{3EI}{L^2}$	0	0
b_1b_6	$\frac{6EILk_B(Lk_A + 2EI)}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{3EI}{L^2}$	0
b_1b_3	$\frac{4EIL^2k_A(Lk_B + 3EI)}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	0	0
b_1b_7	$\frac{2EIL^3k_Ak_B}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{2EI}{L}$	0	0	0
b_1b_4	$\frac{4EIL^2k_B(Lk_A + 3EI)}{L^2(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$\frac{3EI}{L}$	0

Trường hợp riêng của ma trận độ cứng phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng là khi các liên kết nửa cứng có dạng khớp (độ cứng tiến tới không) hoặc cứng (độ cứng tiến tới vô cùng). Như vậy,

phần tử thanh hai đầu liên kết nửa cứng có bốn trường hợp riêng gồm: hai đầu liên kết cứng; một đầu liên kết cứng, một đầu liên kết khớp; một đầu liên kết khớp, một đầu liên kết cứng hoặc cả hai đầu liên kết khớp. Để tìm được biểu thức ma trận độ cứng các trường hợp riêng này, ta tìm giới hạn của các số hạng trong công thức (28). Kết quả tính toán tổng hợp trong Bảng 1.

b. Ứng với véc tơ nội lực nút dư $\{N_0\}_e$

Tương tự, véc tơ nội lực nút dư cũng có bốn trường hợp riêng tương ứng bốn trường hợp riêng của ma trận độ cứng khi các liên kết nửa cứng tại mỗi đầu thanh tiến đến khớp hoặc cứng.

Mặt khác ta cũng có: khi $k_A \rightarrow 0$ thì $M_{A0} - k_A\theta_{A0} = M_{A0}$, $k_B \rightarrow 0$ thì $M_{B0} - k_B\theta_{B0} = M_{B0}$, $k_A \rightarrow \infty$ thì $M_{A0} - k_A\theta_{A0} = 0$, $k_B \rightarrow \infty$ thì $M_{B0} - k_B\theta_{B0} = 0$.

Để tìm được biểu thức véc tơ nội lực dư của các trường hợp riêng này, ta tìm giới hạn của các số hạng trong công thức (29). Kết quả tính toán tổng hợp trong Bảng 2.

Bảng 2. Số hạng của véc tơ nội lực nút dư phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng trong trường hợp riêng

TT	Giá trị	Hai đầu	Đầu A cứng,	Đầu A khớp,	Hai đầu
		cứng	đầu B khớp	đầu B cứng	khớp
		$k_A \rightarrow \infty$	$k_A \rightarrow \infty$	$k_A \rightarrow 0$	$k_A \rightarrow 0$
		$k_B \rightarrow \infty$	$k_B \rightarrow 0$	$k_B \rightarrow \infty$	$k_B \rightarrow 0$
b_1b_8	$\frac{6EI \left[(Lk_B + 2EI)(M_{A0} - k_A\theta_{A0}) + (Lk_A + 2EI)(M_{B0} - k_B\theta_{B0}) \right]}{L(L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2)}$	0	$\frac{3M_{B0}}{2L}$	$\frac{3M_{A0}}{2L}$	$\frac{M_{A0} + M_{B0}}{L}$
b_1b_9	$\frac{2EI \left[2(Lk_B + 3EI)(M_{A0} - k_A\theta_{A0}) + Lk_A(M_{B0} - k_B\theta_{B0}) \right]}{L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2}$	0	$\frac{M_{B0}}{2}$	M_{A0}	M_{A0}
b_1b_{10}	$\frac{2EI \left[Lk_B(M_{A0} - k_A\theta_{A0}) + 2(Lk_A + 3EI)(M_{B0} - k_B\theta_{B0}) \right]}{L^2k_Ak_B + 4EILk_A + 4EILk_B + 12E^2I^2}$	0	M_{B0}	$\frac{M_{A0}}{2}$	M_{B0}

c. Tổng hợp biểu thức liên hệ đối với các trường hợp riêng

- Thanh hai đầu cứng

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

- Thanh đầu A cứng, đầu B khớp

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M_{B0}}{2L} \\ \frac{M_{B0}}{2} \\ 0 \\ -\frac{3M_{B0}}{2L} \\ M_{B0} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

- Thanh đầu A khớp, đầu B cứng

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3M_{A0}}{2L} \\ M_{A0} \\ 0 \\ -\frac{3M_{A0}}{2L} \\ \frac{M_{A0}}{2} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

- Thanh hai đầu khớp

$$\begin{Bmatrix} N_A \\ Q_A \\ M_A \\ N_B \\ Q_B \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta_A \\ u_B \\ v_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_{A0} + M_{B0}}{L} \\ M_{A0} \\ 0 \\ -\frac{M_{A0} + M_{B0}}{L} \\ M_{B0} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Các trường hợp riêng cho thấy các ma trận độ cứng đã thiết lập chính bằng các ma trận độ cứng của phần tử mẫu tiêu chuẩn trong phương pháp PTHH.

2.3. Hệ phương trình cân bằng và phương pháp giải

2.4. Thiết lập hệ phương trình cân bằng

Trong một bước tải trọng do có cùng các tham số ban đầu nên từ công thức (26) có thể viết là:

$$\{N + \Delta N\}_e = [k_s]_e \{\delta + \Delta \delta\}_e + \{N_0\}_e \quad (34)$$

$$\{N\} + \{\Delta N\}_e = [k_s]_e \{\delta\}_e + [k_s]_e \{\Delta \delta\}_e + \{N_0\}_e \quad (35)$$

So sánh công thức (26) và công thức (35) ta có

$$\{\Delta N\}_e = [k_s]_e \{\Delta \delta\}_e \quad (36)$$

trong đó $\{\Delta N\}_e, \{\Delta \delta\}_e$ là nội lực và chuyển vị biến thiên trong bước tải đang xét.

Trong các công thức (36) véc tơ nội lực, ma trận độ cứng, véc tơ chuyển vị nút được thiết lập trong hệ toạ độ riêng của phần tử. Do kết cấu khung được tạo bởi nhiều phần tử khác nhau với các hệ toạ độ riêng khác nhau nên trong tính toán cần đưa về cùng một hệ toạ độ chung. Phần tử e trong hệ toạ độ chung $Ox'y'z'$ có véc tơ nội lực, ma trận độ cứng, véc tơ chuyển vị nút lần lượt kí hiệu là: $\{\Delta N'\}_e, [k'_s]_e, \{\Delta \delta'\}_e$ theo phương pháp PTHH ta có mối liên hệ của các đại lượng này giữa hai hệ toạ độ là:

$$\{\Delta N'\}_e = [T]_e^T \{\Delta N\}_e \quad (37)$$

$$[k'_s]_e = [T]_e^T [k_s]_e [T]_e \quad (38)$$

$$\{\Delta \delta'\}_e = [T]_e^T \{\Delta \delta\}_e \quad (39)$$

trong đó $[T]_e$ là ma trận biến đổi toạ độ của phần tử thành e .

Phạm vi bài báo đề đơn giản hoá chỉ tính toán khung với tải trọng tập trung tại nút khung. Trong hệ toạ độ chung tổng nội lực và tổng ngoại lực của toàn bộ các phần tử tham gia liên kết tại mỗi nút khung luôn cân bằng nên ta có:

$$\sum \{\Delta N'\}_e = \{\Delta J'_i\} \quad (40)$$

trong đó $\{\Delta J'_i\}$ là biến thiên của véc tơ tải trọng gia tăng tác dụng tại nút.

Từ công thức (36) và (40) ta có hệ phương trình cân bằng đối với các nút khung

$$\sum [k'_s]_e \{\Delta \delta'\}_e = \{\Delta J'_i\} \quad (41)$$

Trong công thức (41) dấu tổng được thực hiện theo các nguyên tắc kết cấu. Tiến hành tính toán theo công thức (41) đối với toàn bộ các nút khung, ghép nối các phần tử và xử lý điều kiện biên theo phương pháp phần tử hữu hạn ta được phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu (sau khi đã áp đặt điều kiện biên) trong hệ toạ độ chung

$$\sum [k_s^*] \{\Delta \delta^*\} = \{\Delta J_i^*\} \quad (42)$$

Viết công thức (42) dưới dạng rút gọn như sau:

$$[K^*] \{\Delta \delta^*\} = \{\Delta F^*\} \quad (43)$$

a. Phương pháp phân tích khung thép liên kết nửa cứng phi tuyến chịu tải trọng tĩnh tác dụng lặp

Chia đều giá trị tải trọng cho mỗi bước tính. Phương trình (43) có $[K^*]$ phụ thuộc vào $\{\Delta \delta^*\}$, ở bước gia tăng tải trọng thứ i , trình tự giải như sau:

- Bước 1: Xác định độ cứng xoay k_i tại từng liên kết trong khung theo giá trị mô men ở bước thứ $i - 1$ và mô hình liên kết (tại bước tải thứ nhất, độ cứng xoay k_1 lấy bằng độ cứng xoay ban đầu của mô hình liên kết); từ đó tính được giá trị biến thiên của độ cứng tổng thể của toàn hệ kết cấu trong hệ toạ độ chung $[K^*]_i$;

- Bước 2: Giải hệ phương trình (43) ta có nghiệm là véc tơ chuyển vị gia tăng $\{\Delta \delta^*\}_i$ của toàn hệ kết cấu trong hệ toạ độ chung;

- Bước 3: Từ $\{\Delta\delta^*\}_i$ thu được véc tơ chuyển vị gia tăng cho riêng từng phần tử thanh trong hệ tọa độ chung $\{\Delta\delta'\}_{e,i}$, chuyển $\{\Delta\delta'\}_{e,i}$ sang hệ tọa độ riêng ta có:

$$\{\Delta\delta\}_{e,i} = [T]_e \{\Delta\delta'\}_{e,i} \quad (44)$$

- Bước 4: Tính nội lực gia tăng cho phần tử thanh e trong hệ tọa độ riêng

$$\{\Delta N\}_{e,i} = [k_s]_{e,i} \{\Delta\delta\}_{e,i} \quad (45)$$

ở đây $\{\Delta N\}_{e,i}$, $\{\Delta\delta\}_{e,i}$, $[k_s]_{e,i}$, lần lượt là các phần gia tăng véc tơ nội lực, véc tơ chuyển vị, ma trận độ cứng của phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng trong hệ tọa độ riêng của phần tử thanh.

- Bước 5: Tính chuyển vị, nội lực cho phần tử thanh e trong hệ tọa độ riêng

$$\{\delta\}_{e,i} = \{\delta\}_{e,i-1} + \{\Delta\delta\}_{e,i} \quad (46)$$

$$\{N\}_{e,i} = \{N\}_{e,i-1} + \{\Delta N\}_{e,i} \quad (47)$$

trong đó $\{\delta\}_{e,i-1}$, $\{N\}_{e,i-1}$ là chuyển vị và nội lực của phần tử e ở bước phân tích thứ $i - 1$.

- Bước 6: Cập nhật độ cứng của liên kết

+ Ở bước tính đầu tiên thì sử dụng độ cứng ban đầu k_1 của mỗi liên kết để gắn cho liên kết đó rồi xây dựng ma trận độ cứng của hệ.

+ Sau mỗi một bước tính phải cập nhật độ cứng của từng liên kết. Để cập nhật độ cứng của từng liên kết thì phải kiểm tra sự thay đổi trong mối quan hệ giữa mô men và góc xoay của từng liên kết:

1) Nếu mối quan hệ đó là đảo chiều (Giá trị mô men đang tăng, chuyển sang giảm hoặc ngược lại) thì phải cập nhật độ cứng của liên kết đó là độ cứng ban đầu k_1 ;

2) Nếu mối quan hệ đó không phải là đảo chiều (Giá trị mô men đang tăng, vẫn tiếp tăng, hoặc đang giảm vẫn tiếp tục giảm) thì phải kiểm tra giá trị mô men đó vẫn nằm trong khoảng phù hợp với độ cứng k_1 , k_2 hoặc k_3 .

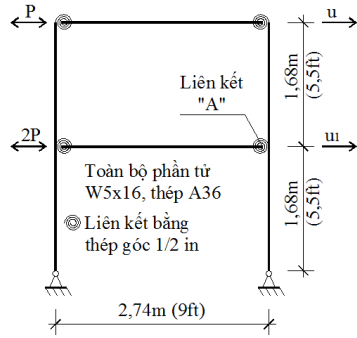
Trường hợp giá trị mô men đó vẫn nằm trong khoảng phù hợp với độ cứng k_1 , k_2 hoặc k_3 thì tiếp tục cập nhật giá trị độ cứng đó để tính toán cho bước tiếp theo.

Trường hợp giá trị mô men không còn phù hợp trong đoạn độ cứng k_1, k_2 mà đã chuyển từ độ cứng này sang độ cứng khác thì phải kiểm tra độ dài đoạn thay đổi của bước tính AB (với $A(M_i, \theta_i)$; $B(M_{i+1}, \theta_{i+1})$). Trường hợp độ dài đoạn thay đổi của bước tính AB nhỏ hơn $0,01l$ (với l là chiều dài của đoạn tương ứng với k_1) thì cập nhật độ cứng của liên kết đã được chuyển tiếp độ cứng để tính cho bước tiếp theo. Trường hợp ngược lại thì phải chia nhỏ bước gia tải hơn nữa (đối với bài toán tải tĩnh) hoặc chia nhỏ hơn nữa bước thời gian (đối với bài toán tải động).

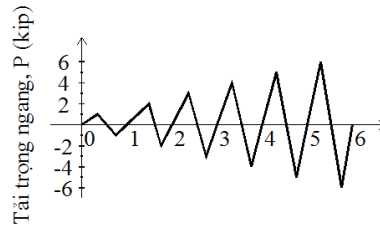
Tiếp tục tính khi nào hết các bước tải thì kết thúc.

3. Ví dụ tính toán

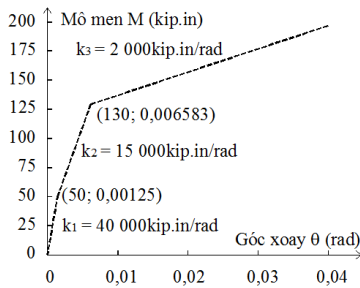
Cho khung thép với sơ đồ tính như Hình 3(a). Tất cả các phần tử cột, dầm đều là thép A36, tiết diện $W5 \times 16$ (theo tiêu chuẩn ASTM). Liên kết giữa cột với cột là liên kết cứng, liên kết cột với móng là liên kết khớp cố định, liên kết cột với dầm là liên kết nửa cứng. Ví dụ được tính với mô hình ba đoạn thẳng do Stelmack và cs. đề xuất có $k_1 = 4519,4 \text{ kN.m/rad}$ (40000 kip.in/rad), $k_2 = 1694,8 \text{ kN.m/rad}$ (15000 kip.in/rad), $k_3 = 226,0 \text{ kN.m/rad}$ (2000 kip.in/rad), $M_y = 5,6 \text{ kN.m}$ (50 kip.in), $M_p = 14,7 \text{ kN.m}$ (130 kip.in) như trên Hình 3(c). Tương quan mô hình ba đoạn thẳng so với mô hình 4 tham số của Richard-Abbott như trên Hình 3(d). Khung chịu tải trọng theo chu kỳ với gia tải bằng $\pm 4,45 \text{ kN}$ ($1,0 \text{ kip}$) và tăng đến $\pm 26,69 \text{ kN}$ ($6,0 \text{ kip}$). Đối với tầng thứ hai, tải trọng luôn bằng một nửa tầng thứ nhất. Lịch sử tải trọng trên Hình 3(b).



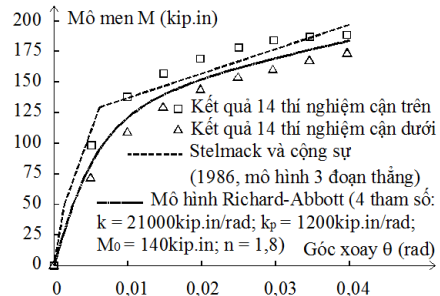
(a) Sơ đồ tính khung thép



(b) Lịch sử tải trọng ngang P



(c) Quan hệ mô men-góc xoay mô hình ba đoạn thẳng

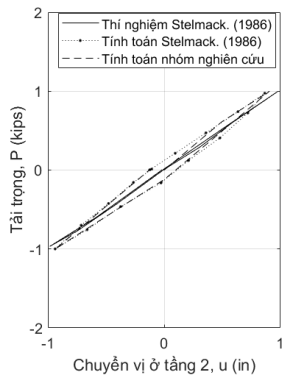


(d) Mô hình ba đoạn thẳng và mô hình bốn tham số

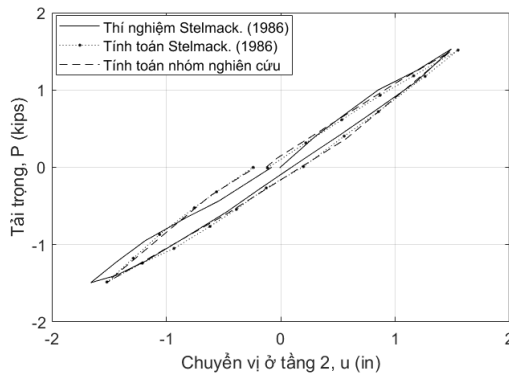
Hình 3. Sơ đồ chịu lực, mô hình liên kết và tải trọng

Yêu cầu: sử dụng phương pháp đề xuất ở trên với mô hình ba đoạn thẳng tính toán chuyển vị tại tầng 1 và tầng 2, so sánh với kết quả thí nghiệm và tính toán lý thuyết do Stelmack và cs. đã trình bày ở [23].

Sau khi lập trình bằng phần mềm Matlab để tính toán khảo sát, kết quả tính toán gồm: đường cong chuyển vị ngang tại điểm u và tải trọng P với chu kỳ 2 và chu kỳ 3 như trên Hình 4, đường cong chuyển vị ngang tại điểm u_1 và tải trọng $2P$ như trên Hình 5, đường cong quan hệ mô men-góc xoay trong liên kết A như trên Hình 6. Với A là liên kết nửa cứng nối cánh trên và dưới của dầm và cột bằng thép góc số hiệu L4×4×1/2 in theo quy cách tiêu chuẩn ASTM và bu lông, trong đó 1/2 in là chiều dày cánh



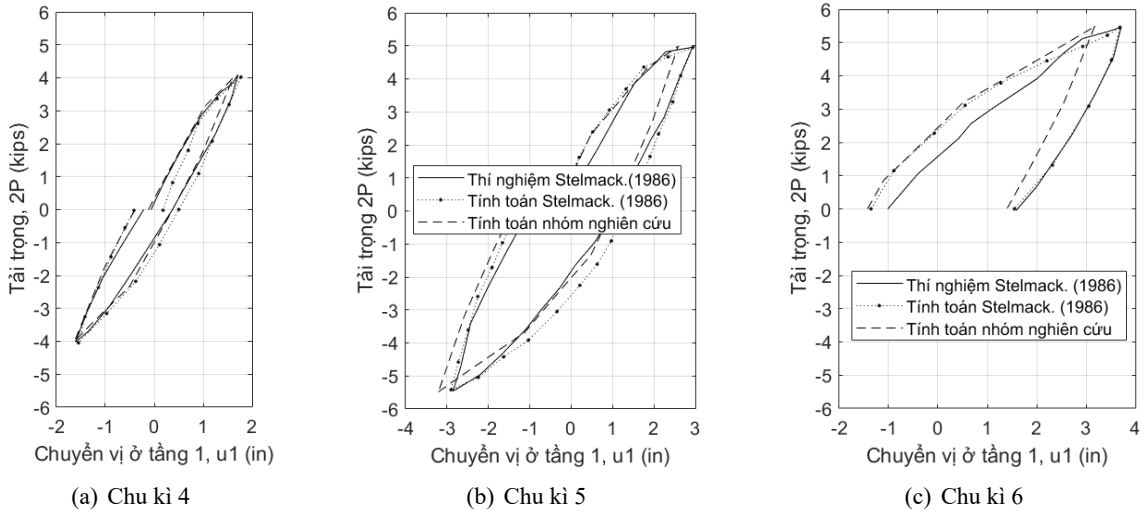
(a) Chu kỳ 2



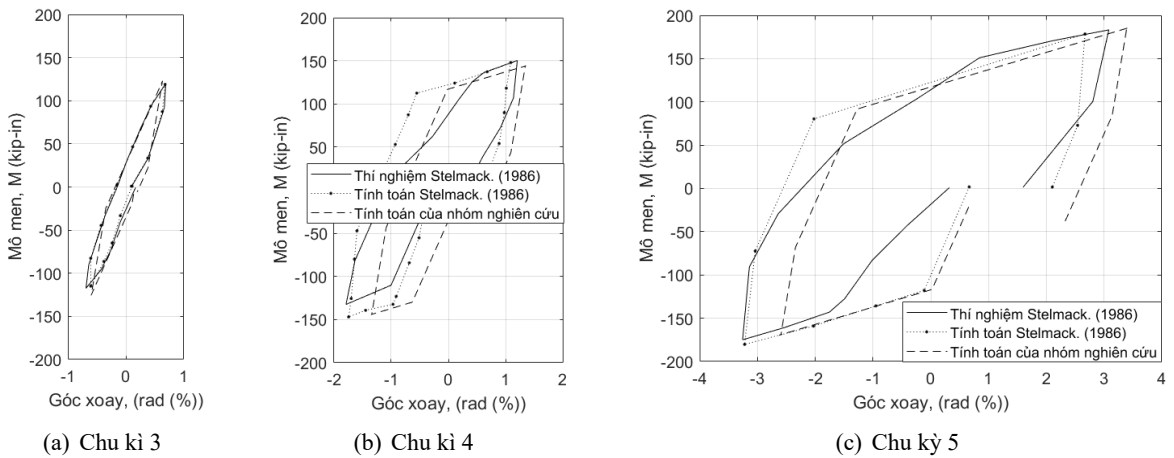
(b) Chu kỳ 3

Hình 4. Quan hệ giữa chuyển vị u và tải trọng P

thép góc. Đây là loại liên kết được sử dụng trong thí nghiệm góc của Stelmack được nhóm tác giả sử dụng so sánh. Thấy rằng trong đa số các trường hợp kết quả tính toán bằng lý thuyết của nhóm tác giả gần với kết quả thí nghiệm của Stelmack và cs. thiết lập.



Hình 5. Quan hệ giữa chuyển vị u_1 và tải trọng 2P



Hình 6. Quan hệ giữa mô men và góc xoay của liên kết A

4. Kết luận

Bài báo đã xây dựng được ma trận độ cứng của phần tử thanh có hai đầu liên kết nửa cứng phi tuyến có mối quan hệ giữa mô men và góc xoay tại liên kết là đường cong hoặc đường thẳng, cho trường hợp tổng quát và các trường hợp riêng, khi liên kết nửa cứng có dạng khớp hoặc cứng lý tưởng; từ đó xây dựng phương pháp phân tích khung thép có liên kết nửa cứng phi tuyến chịu tải trọng tĩnh. Kết quả phân tích được so sánh với kết quả tính toán bằng lý thuyết và thí nghiệm của Stelmack và cs. cho thấy sai số về hình dạng và giá trị của biểu đồ các đại lượng được xem xét với toàn bộ các chu kỳ tải trọng là đáng tin cậy.

Kết quả nghiên cứu bước đầu khả quan này là tiền đề để tiếp tục phát triển, mở rộng cho các dạng tải trọng khác, xây dựng những phương pháp phân tích chuyên sâu, nghiên cứu những đặc tính ứng

xử mới của khung thép có liên kết nửa cứng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Quang, N. H., Trung, L. D. B., Anh, V. Q. (2022). Tổng quan về các mô hình liên kết nửa cứng trong kết cấu khung thép. *Tạp chí Xây dựng, Bộ Xây dựng*, 4:88–92.
- [2] BS 449-2:1969. *Specification for the use of structural steel in building - Part 2: Metric units*. British Standard Publishing Limited, UK.
- [3] AISC-LRFD (1999). *Load and resistance factor design specification for structural steel buildings*. Chicago, Illinois, USA.
- [4] EN 1993-1-8 (2005). *Design of steel structures, Part 1-8: Design of joint*. Brussels, Belgium.
- [5] Hùng, Đ. X., Hà, N. T., Hưng, N. T. Đánh giá độ tin cậy của khung thép theo điều kiện bền của nút khung đàn hồi. *Tuyển tập Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Tập 3, Cơ học vật rắn, Quyển 1*, 520–526.
- [6] Ngọc, Đ. T. (2002). Một số nhận xét khi tính kết cấu có kê tới độ đàn hồi của nút liên kết. *Tuyển tập công trình khoa học công nghệ, trường Đại học Kiến trúc Hà Nội*, 11:108–111.
- [7] Anh, V. Q. (2003). *Nghiên cứu phương pháp phân tích và tính toán khung thép với các liên kết đàn hồi*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật, trường Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [8] Sơn, N. H. (2007). *Phân tích kết cấu khung thép phẳng có liên kết nửa cứng phi tuyến*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật, trường Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [9] Quang, N. H. (2012). *Tính toán khung thép có liên kết nửa cứng theo mô hình đàn - dẻo chịu tải trọng động*. Luận án tiến sĩ kỹ thuật, trường Đại học Kiến trúc Hà Nội.
- [10] Hùng, H. M., Hùng, T. V. (2020). [Tối ưu khung thép có liên kết nửa cứng xét đến gia cường vùng cứng nút khung panel zone](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXD*, 14(2V):64–74.
- [11] Lui, E. M., Lopes, A. (1997). [Dynamic analysis and response of semirigid frames](#). *Engineering Structures*, 19(8):644–654.
- [12] Kim, S.-E., Choi, S.-H. (2001). [Practical advanced analysis for semi-rigid space frames](#). *International Journal of Solids and Structures*, 38(50–51):9111–9131.
- [13] Öztürk, A., Seçer, M. (2005). [An investigation for semi-rigid frames by different connection models](#). *Mathematical and Computational Applications*, 10(1):35–44.
- [14] Chen, W.-F., Kishi, N., Komuro, M. (2011). *Semi-rigid connections handbook*. J.Ross Publishing, Inc, USA.
- [15] Awkar, J. C., Lui, E. M. (1999). [Seismic analysis and response of multistory semirigid frames](#). *Engineering Structures*, 21(5):425–441.
- [16] Tran, T. T. V., Tran, T. H. (2021). [Different models of connection flexibility in dynamic analysis of plane frame systems](#). *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, 1015(1): 012022.
- [17] Öztürk, A. U., Yeşilce, Y. (2005). The statical analysis of semi-rigid frames by different connection types. *Journal of Science and Technology of Dumlupınar University*, (008):19–34.
- [18] Degertekin, S. O., Hayalioglu, M. S. (2004). [Design of non-linear semi-rigid steel frames with semi-rigid column bases](#). *Electronic Journal of Structural Engineering*, 4:1–16.
- [19] Dhillon, B. S., O'Malley III, J. W. (1999). [Interactive design of semirigid steel frames](#). *Journal of Structural Engineering*, 125(5):556–564.
- [20] Sekulovic, M. S., Salatic, R. M., Mandic, R. S. (2000). Seismic analysis of frames with semi-rigid eccentric connections. *12 WCEE 2000*, 1:3.
- [21] Soares Filho, M., Guimarães, M. J. R., Sahlit, C. L., Brito, J. L. V. (2004). [Wind pressures in framed structures with semi-rigid connections](#). *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 26:180–189.
- [22] Dhillon, B. S., Abdel-Majid, S. (1990). [Interactive analysis and design of flexibly connected frames](#). *Computers & Structures*, 36(2):189–202.
- [23] Chan, S.-L., Chui, P.-T. (2000). *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier.