

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH DẦM HỘP SANDWICH FGM THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT

Phạm Trung Hiếu^a, Nguyễn Ngọc Dương^{a,*}

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành Phố Hồ Chí Minh, số 1 đường Võ Văn Ngân, Phường Linh Chiểu, TP. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Nhận ngày 21/4/2023, Sửa xong 24/8/2023, Chấp nhận đăng 21/9/2023

Tóm tắt

Bài báo này áp dụng phương pháp Ritz để phân tích ổn định tuyến tính của dầm hộp sandwich với vật liệu cơ tính biến thiên (FGM), sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Thuộc tính vật liệu biến đổi theo qui luật hàm lũy thừa. Ba loại dầm hộp sandwich FGM được phân tích. Phương trình chủ đạo được thiết lập dựa trên nguyên lý Lagrange. Các hàm xấp xỉ dạng mũ kết hợp với đa thức được sử dụng để mô tả trường chuyển vị. Các ví dụ số được thực hiện trên dầm hộp sandwich FGM với các điều kiện biên khác nhau để đánh giá độ chính xác và sự hiệu quả của phương pháp. Ngoài ra, bài báo khảo sát sự ảnh hưởng của qui luật phân bố vật liệu và độ mảnh đến lực tới hạn của dầm. Kết quả cho thấy vai trò quan trọng của những yếu tố vừa nêu đến ứng xử ổn định của dầm hộp sandwich FGM.

Từ khóa: dầm hộp thành mỏng; phương pháp Ritz; lực tới hạn; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất; vật liệu cơ tính biến thiên.

BUCKLING ANALYSIS OF THIN-WALLED FG SANDWICH BOX BEAM USING FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Abstract

This article applies the Ritz method to analyse the linear stability of a thin-walled functionally grade (FG) sandwich material box beam using the first-order shear deformation theory. The property of the material changes according to the exponential function. The study examines three types of FGM sandwich box beams. The governing equations are established from the Lagrange principle. Exponential functions combined with polynomial functions are used to describe the displacement fields. Numerical examples are conducted on FGM sandwich box beams with different boundary conditions to assess the accuracy and efficiency of the method. In addition, the article investigates the influence of material distribution and slenderness ratio on the critical buckling load of FGM beams. The present results show the vital role of the factors mentioned above in the stability analysis of FGM sandwich box beams.

Keywords: thin-walled box beam; Ritz method; critical buckling load; first-order shear deformation theory; functionally graded material.

[https://doi.org/10.31814/stce.huice2024-18\(1V\)-08](https://doi.org/10.31814/stce.huice2024-18(1V)-08) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) là một loại vật liệu composite tiên tiến được các nhà khoa học Nhật Bản chế tạo vào năm 1984 [1]. Ưu điểm nổi bật của FGM là khắc phục được hiện tượng tách lớp trong điều kiện nhiệt độ và tải trọng cao. Nhờ đặc tính cơ học ưu việt trên, FGM áp dụng vào nhiều lĩnh vực kỹ thuật như hàng không vũ trụ, cơ khí, xây dựng, ... [2]. Tại Việt Nam, vật liệu cơ tính biến thiên được đánh giá là tiềm năng và nhiều ứng dụng thực tiễn [3]. Dầm và tấm làm bằng FGM cũng đã được nhiều nhà khoa học trong nước quan tâm [4–7]. Tuy vậy, dầm thành mỏng FGM thì chưa có nhiều nghiên cứu thực hiện.

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: duongnn@hcmute.edu.vn (Dương, N. N.)

Lý thuyết dầm thành mỏng đàn hồi tuyến tính với tiết diện hở lần đầu tiên được Vlasov [8] trình bày vào năm 1940. Tiếp đó, Gjelsvik [9] trình bày lý thuyết thanh thành mỏng từ lý thuyết vỏ và phát triển bài toán sang tiết diện kín có xét đến tính phi tuyến hình học. Lý thuyết này đã được nhiều tác giả mở rộng sang vật liệu composite và FGM. Các nghiên cứu nổi bật như: Bauld và Lih-Shyng [10] đã phát triển lý thuyết Vlasov để phân tích tĩnh dầm composite thành mỏng tiết diện hở. Pandey và cs. [11] đã dùng phương pháp Galerkin để phân tích ổn định, uốn-xoắn của dầm I-composite thành mỏng. Tiếp đó, Lee [12] phân tích uốn của dầm chữ I-composite nhiều lớp dưới tải trọng phân bố đều dựa trên lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Vo và Lee [13] đã sử dụng FEM và lý thuyết dầm biến dạng cắt bậc nhất để phân tích uốn-xoắn của dầm composite thành mỏng tiết diện kín. Gần đây, dầm thành mỏng FGM đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học: Nguyễn và cs. [14–16] đã dùng lý thuyết cổ điển để phân tích tĩnh, dao động và ổn định của dầm FG thành mỏng tiết diện hở bằng FEM. Lý thuyết cổ điển cũng được Lanc và cs. [17] sử dụng để phân tích ổn định tuyến tính và phi tuyến hình học dầm FGM thành mỏng tiết diện kín bằng FEM. Kim và Lee [18–22] đã nghiên cứu về uốn-xoắn, dao động tự do, mất ổn định phi tuyến dầm FG sandwich tiết diện chữ I. Ziane và cs. [23] phân tích dao động tự do dầm thành mỏng tiết diện hình hộp FGM, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và phương pháp ma trận độ cứng động học. Nguyễn và cs. [24, 25] dùng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất kết hợp với phương pháp Ritz để phân tích tĩnh, dao động tự do và ổn định cho dầm FGM và composite thành mỏng tiết diện hở. Có thể thấy, dầm thành mỏng FGM tiết diện hở đã có nhiều nghiên cứu, nhưng đối với tiết diện kín thì số lượng các công bố vẫn còn hạn chế. Dầm tiết diện kín tồn tại ứng suất cắt theo chu trình tiết diện [26]. Điều này dẫn đến việc phân tích ứng xử dầm thành mỏng tiết diện kín phức tạp hơn so với dầm tiết diện hở. Thành phần ứng suất cắt theo chu trình tiết diện này ảnh hưởng lớn đến ứng xử của kết cấu. Việc phức tạp trong tính toán cùng với thực tiễn sử dụng phổ biến là động lực để tác giả thực hiện nghiên cứu về ứng xử dầm thành mỏng FGM tiết diện kín.

Mục tiêu của bài báo này là phân tích ổn định dầm hộp sandwich FGM sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lời giải Ritz. Các hàm xấp xỉ dạng mũ được kết hợp với đa thức để mô tả trường chuyển vị. Kết quả được kiểm chứng với nghiên cứu trước và phân tích các yếu tố ảnh hưởng đến ổn định của dầm.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Vật liệu cơ tính biến thiên

Trong bài báo này, mô hình vật liệu FGM theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM) được nghiên cứu, thuộc tính vật liệu phân bố trong dầm được cho bởi luật phân phối vật liệu theo mô hình Voigt:

$$P = (P_c - P_m) V_c(n) + P_m \quad (1)$$

trong đó P_c , P_m lần lượt là các đặc trưng cơ học vật liệu như mô-đun đàn hồi E , hệ số Poisson ν và khối lượng riêng ρ của gốm và kim loại; V_c , V_m lần lượt là tỷ lệ thể tích của pha gốm và kim loại; n là biến chiều dày của thành hộp ($0 \leq n \leq t$).

2.2. Lý thuyết dầm thành mỏng

a. Hệ tọa độ

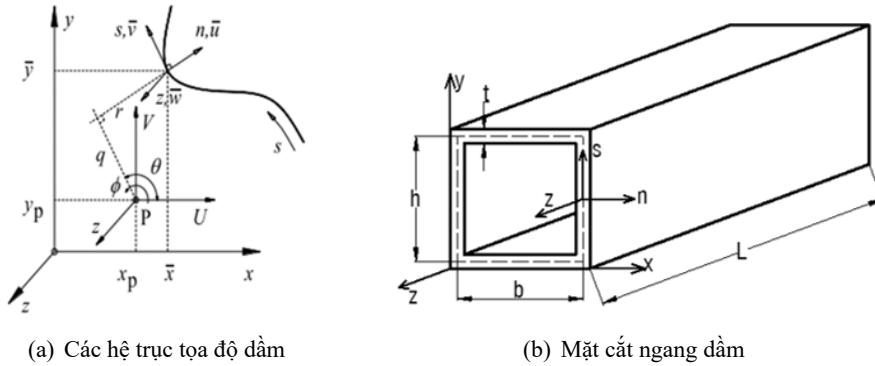
Ba hệ trục tọa độ mô tả bài toán dầm hộp FGM như Hình 1:

+ Hệ trục tọa độ Descartes (x, y, z) với trục x và trục y nằm trong mặt phẳng ngang và trục z song song với trục dọc của dầm (Hình 1(a)).

+ Hệ trục tọa độ địa phương của thành mỏng (n, s, z) với trục s tiếp tuyến với đường bao của tiết diện, trục n là pháp tuyến vuông góc với trục tiếp tuyến s , trục z theo phương vuông góc với mặt phẳng tạo bởi trục s và n (Hình 1(b)).

+ Chu trình S chạy theo tiết diện thành mỏng.

Điểm $P(x_p, y_p)$ là tâm cắt của tiết diện. Trục đi qua tâm cắt P và song song với trục z gọi là trục cực [27].



Hình 1. Các hệ tọa độ dầm thành mỏng [24]

b. Các thành phần chuyển vị

Các giả thuyết được sử dụng như sau [24]:

- + Lý thuyết biến dạng nhỏ và mặt cắt ngang không bị biến dạng.
- + Các biến dạng cắt $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{\varpi}^0$ phân bố đều trên mặt cắt tiết diện.
- + Hiện tượng mất ổn định cục bộ và trước mất ổn định được bỏ qua.
- + Hệ số Poisson là hằng số.

Các thành phần chuyển vị tại một điểm trên mặt trung bình của thành mỏng $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ trong hệ tọa độ địa phương (n, s, z) được biểu thị dưới dạng chuyển vị U, V, W và các góc xoay ψ_x, ψ_y và ψ_{ϖ} như sau [12, 24]:

$$\bar{u}(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \phi(z)q(s) \tag{2}$$

$$\bar{v}(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \phi(z)r(s) \tag{3}$$

$$\bar{w}(s, z) = W(z) + \psi_y(z)x(s) + \psi_x(z)y(s) + \psi_{\varpi}(z)\varpi(s) \tag{4}$$

trong đó U, V, W là chuyển vị của P tương ứng với các trục x, y, z ; ϕ là góc quay quanh trục cực; q là khoảng cách từ P đến trục n ; r là khoảng cách từ P đến trục s ; ψ_x, ψ_y và ψ_{ϖ} các góc quay của mặt cắt đối với x, y và ϖ .

$$\psi_y = \gamma_{xz}^0 - U' \tag{5}$$

$$\psi_x = \gamma_{yz}^0 - V' \tag{6}$$

$$\psi_{\varpi} = \gamma_{\varpi}^0 - \phi' \tag{7}$$

ϖ là hàm quạt của dầm thành mỏng, đối với tiết diện kín được cho bởi công thức sau [28]:

$$\varpi(s) = \int_{s_0}^s \left[r(s) - \frac{F_s(s)}{t(s)} \right] ds \tag{8}$$

trong đó $F_s(s)$ là hàm thể hiện sự phân bố ứng suất cắt theo chu trình mặt cắt ngang của tiết diện. Đối với tiết diện hở thì hàm $F_s(s) = 0$; $t(s)$ là chiều dày của thành hộp.

Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong thành mỏng u, v, w có mối liên hệ với các thành phần chuyển vị tại một điểm trên mặt trung bình của thành hộp $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ như sau:

$$u(n, s, z) = \bar{u}(s, z) \quad (9)$$

$$v(n, s, z) = \bar{v}(s, z) + n\bar{\psi}_s(s, z) \quad (10)$$

$$w(n, s, z) = \bar{w}(s, z) + n\bar{\psi}_z(s, z) \quad (11)$$

với $\bar{\psi}_s$ và $\bar{\psi}_z$ được xác định bởi [13]:

$$\bar{\psi}_s(s, z) = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad (12)$$

$$\bar{\psi}_z = \psi_y \sin \theta - \psi_x \cos \theta - \psi_w q \quad (13)$$

Trường biến dạng được định nghĩa như sau [24]:

$$\varepsilon_s(n, s, z) = \bar{\varepsilon}_s(s, z) + n\bar{\kappa}_s(s, z) \quad (14)$$

$$\varepsilon_z(n, s, z) = \bar{\varepsilon}_z(s, z) + n\bar{\kappa}_z(s, z) \quad (15)$$

$$\gamma_{sz}(n, s, z) = \bar{\gamma}_{sz}(s, z) + n\bar{\kappa}_{sz}(s, z) \quad (16)$$

$$\gamma_{nz}(n, s, z) = \bar{\gamma}_{nz}(s, z) + n\bar{\kappa}_{nz}(s, z) \quad (17)$$

trong đó:

$$\bar{\varepsilon}_s = 0 \quad (18)$$

$$\bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \varepsilon_z^0 + x\kappa_y + y\kappa_x + w\kappa_w \quad (19)$$

$$\bar{\kappa}_s = 0 \quad (20)$$

$$\bar{\kappa}_z = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial z} = \kappa_y \sin \theta - \kappa_x \cos \theta - \kappa_w q \quad (21)$$

$$\bar{\kappa}_{sz} = \kappa_{sz} \quad (22)$$

$$\bar{\kappa}_{nz} = 0 \quad (23)$$

$$\varepsilon_z^0 = W' \quad (24)$$

$$\kappa_x = \psi'_x \quad (25)$$

$$\kappa_y = \psi'_y \quad (26)$$

$$\kappa_w = \psi'_w \quad (27)$$

$$\kappa_{sz} = \phi' - \psi_w \quad (28)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^0 + (x + n \sin \theta)\kappa_y + (y - n \cos \theta)\kappa_x + (w - nq)\kappa_w \quad (29)$$

$$\gamma_{sz} = \gamma_{xz}^0 \cos \theta + \gamma_{yz}^0 \sin \theta + \gamma_w^0 r + n\kappa_{sz} \quad (30)$$

$$\gamma_{nz} = \gamma_{xz}^0 \sin \theta - \gamma_{yz}^0 \cos \theta - \gamma_w^0 q \quad (31)$$

c. Quan hệ ứng suất-biến dạng

Quan hệ ứng suất và biến dạng được xác định [24]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_{sz} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{66}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^* \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{sz} \\ \gamma_{nz} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

trong đó

$$\overline{Q_{11}^*} = E(n) \tag{33}$$

$$\overline{Q_{55}^*} = \overline{Q_{66}^*} = \frac{E(n)}{2(1 + \nu)} \tag{34}$$

$E(n)$ là mô-đun Young; ν là hệ số Poisson

Ba loại dầm hộp FGM được nghiên cứu trong bài báo này như sau [17]:

- Loại A (Hình 2(a)): Thể tích của pha gốm được định nghĩa bởi công thức dưới đây:

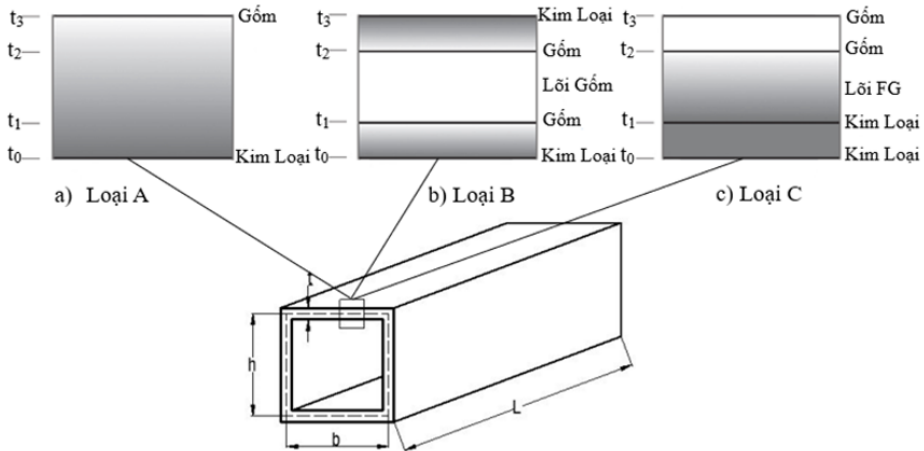
$$V_c(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{t}\right)^P, \quad t_0 \leq n \leq t_3 \tag{35}$$

- Loại B (Hình 2(b)): Thể tích pha gốm được định nghĩa như sau:

$$V_c(n) = \left(\frac{n - t_0}{t_1 - t_0}\right)^P, \quad t_0 \leq n \leq t_1 \tag{36}$$

$$V_c = 1, \quad t_1 \leq n \leq t_2 \tag{37}$$

$$V_c(n) = \left(\frac{n - t_3}{t_2 - t_3}\right)^P, \quad t_2 \leq n \leq t_3 \tag{38}$$



Hình 2. Minh họa ba loại dầm hộp FGM [17]

- Loại C (Hình 2(c)): Thể tích pha gốm được định nghĩa như sau:

$$V_c(n) = \left(\frac{n - t_1}{t_2 - t_1}\right)^P, \quad t_1 \leq n \leq t_2 \tag{39}$$

d. Năng lượng của dầm

Năng lượng biến dạng của dầm:

$$\Pi_E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{sz} \gamma_{sz} + k^s \sigma_{nz} \gamma_{nz}) d\Omega \tag{40}$$

trong đó: Ω là thể tích dầm; k^s là hệ số hiệu chỉnh cắt, trong nghiên cứu này $k^s = 1$ [24, 29, 30].

Thay công thức (29), (30), (31), (33) và (34) vào công thức (40) ta được [24]:

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[E_{11} W'^2 + 2E_{16} W' U' + 2E_{17} W' V' + 2(E_{15} + E_{18}) W' \phi' \right. \\ & + 2E_{12} W' \psi'_y + 2E_{16} W' \psi_y + 2E_{13} W' \psi'_x + 2E_{17} W' \psi_x + 2E_{14} W' \psi'_\omega \\ & + 2(E_{18} - E_{15}) W' \psi_\omega + E_{66} U'^2 + 2E_{67} U' V' + 2(E_{56} + E_{68}) U' \phi' + 2E_{26} U' \psi'_y \\ & + 2E_{66} U' \psi_y + 2E_{36} U' \psi'_x + 2E_{67} U' \psi_x + 2E_{46} U' \psi'_\omega + 2(E_{68} - E_{56}) U' \psi_\omega + E_{77} V'^2 \\ & + 2(E_{57} + E_{78}) V' \phi' + 2E_{27} V' \psi'_y + 2E_{67} V' \psi_y + 2E_{37} V' \psi'_x + 2E_{77} V' \psi_x + 2E_{47} V' \psi'_\omega \\ & + 2(E_{78} - E_{57}) V' \psi_\omega + (E_{55} + 2E_{58} + E_{88}) \phi'^2 + 2(E_{25} + E_{28}) \phi' \psi'_y \\ & + 2(E_{56} + E_{68}) \phi' \psi_y \\ & + 2(E_{35} + E_{38}) \phi' \psi'_x + 2(E_{57} + E_{78}) \phi' \psi_x + 2(E_{45} + E_{48}) \phi' \psi'_\omega + 2(E_{88} - E_{55}) \phi' \psi_\omega \\ & + E_{22} \psi_y'^2 + 2E_{26} \psi'_y \psi_y + E_{66} \psi_y^2 + 2E_{23} \psi'_y \psi'_x + 2E_{27} \psi'_y \psi_x + 2E_{36} \psi_y \psi'_x + 2E_{67} \psi_y \psi_x \\ & + 2E_{24} \psi'_y \psi'_\omega + 2(E_{28} - E_{25}) \psi'_y \psi_\omega + 2E_{46} \psi_y \psi'_\omega + 2(E_{68} - E_{56}) \psi_y \psi_\omega + E_{33} \psi_x'^2 \\ & + 2E_{37} \psi'_x \psi_x + E_{77} \psi_x^2 + 2E_{34} \psi'_x \psi'_\omega + 2(E_{38} - E_{35}) \psi'_x \psi_\omega + 2E_{47} \psi_x \psi'_\omega \\ & \left. + 2(E_{78} - E_{57}) \psi_x \psi_\omega + E_{44} \psi_\omega'^2 + 2(E_{48} - E_{45}) \psi'_\omega \psi_\omega + (E_{88} - 2E_{58} + E_{55}) \psi_\omega^2 \right] dz \end{aligned} \quad (41)$$

trong đó E_{ij} là các hệ số độ cứng [13]; L là chiều dài dầm.

Thế năng của dầm chịu tác động của lực nén dọc trục N_0 [24]:

$$\begin{aligned} \Pi_W &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{N_0}{A} (u'^2 + v'^2) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L N_0 (U'^2 + V'^2 + 2y_p U' \phi' - 2x_p V' \phi' + \frac{I_p}{A} \phi'^2) dz \end{aligned} \quad (42)$$

trong đó A là diện tích mặt cắt ngang dầm hộp; I_p là mô-men quán tính cực.

$$I_p = I_x + I_y \quad (43)$$

với I_x, I_y là mô-men quán tính đối với trục x và trục y .

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (44)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (45)$$

Tổng năng lượng của dầm:

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_W \quad (46)$$

e. Phương pháp Ritz

Các trường chuyển vị được xấp xỉ bởi các hàm dạng Ritz như sau [24]:

$$W(z) = \sum_{j=1}^m \varphi'_j(z) W_j \tag{47}$$

$$U(z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(z) U_j \tag{48}$$

$$V(z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(z) V_j \tag{49}$$

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(z) \phi_j \tag{50}$$

$$\psi_y(z) = \sum_{j=1}^m \varphi'_j(z) \psi_{yj} \tag{51}$$

$$\psi_x(z) = \sum_{j=1}^m \varphi'_j(z) \psi_{xj} \tag{52}$$

$$\psi_{\varpi}(z) = \sum_{j=1}^m \varphi'_j(z) \psi_{\varpi j} \tag{53}$$

trong đó $W_j, U_j, V_j, \phi_j, \psi_{yj}, \psi_{xj}, \psi_{\varpi j}$ là các thông số cần được xác định; φ_j là các hàm xấp xỉ theo điều kiện biên động học của bài toán, được trình bày ở Bảng 1. Trong nghiên cứu này, ba điều kiện biên: tựa đơn-tựa đơn (S-S), ngàm-tự do (C-F), ngàm-ngàm (C-C) được xem xét.

Bảng 1. Các hàm dạng Ritz với các điều kiện biên khác nhau [24]

ĐKB	$\frac{\varphi_j(z)}{(e^{-\frac{z}{L}})}$	$z = 0$	$z = L$
S-S	$\frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right)$	$U = V = \phi = 0$	$U = V = \phi = 0$
C-F	$\left(\frac{z}{L}\right)^2$	$U = V = \phi = 0$ $U' = V' = \phi' = 0$ $W = \psi_y = \psi_x = \psi_{\varpi} = 0$	
C-C	$\left(\frac{z}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2$	$U = V = \phi = 0$ $U' = V' = \phi' = 0$ $W = \psi_y = \psi_x = \psi_{\varpi} = 0$	$U = V = \phi = 0$ $U' = V' = \phi' = 0$ $W = \psi_y = \psi_x = \psi_{\varpi} = 0$

Để rút ra phương trình đặc trưng, ta sử dụng nguyên lý Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{d}_j} = 0 \tag{54}$$

trong đó d_j là các giá trị $W_j, U_j, V_j, \phi_j, \psi_{yj}, \psi_{xj}, \psi_{\varpi j}$.

Ứng xử của ổn định của dầm hộp thành mỏng FGM thu được bằng cách giải phương trình sau:

$$(\mathbf{K} - N_0\mathbf{G})\mathbf{d} = \mathbf{0} \tag{55}$$

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} & K^{16} & K^{17} \\ T K^{12} & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} & K^{26} & K^{27} \\ T K^{13} & T K^{23} & K^{33} & K^{34} & K^{35} & K^{36} & K^{37} \\ T K^{14} & T K^{24} & T K^{34} & K^{44} & K^{45} & K^{46} & K^{47} \\ T K^{15} & T K^{25} & T K^{35} & T K^{45} & K^{55} & K^{56} & K^{57} \\ T K^{16} & T K^{26} & T K^{36} & T K^{46} & T K^{56} & K^{66} & K^{67} \\ T K^{17} & T K^{27} & T K^{37} & T K^{47} & T K^{57} & T K^{67} & K^{77} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G^{22} & 0 & G^{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{33} & G^{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \\ v \\ \Phi \\ \psi_y \\ \psi_x \\ \psi_{\varpi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

trong đó \mathbf{K} là ma trận độ cứng, \mathbf{G} là ma trận hình học được cho ở Bảng 2 và 3.

Bảng 2. Các hệ số trong ma trận độ cứng \mathbf{K} [24]

$K_{ij}^{11} = E_{11} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j'' dz$	$K_{ij}^{34} = (E_{57} + E_{78}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{12} = E_{16} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{35} = E_{27} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{67} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{13} = E_{17} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{36} = E_{37} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{77} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{14} = (E_{15} + E_{18}) \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{37} = E_{47} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + (E_{78} - E_{57}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{15} = E_{12} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + E_{16} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{44} = (E_{55} + 2E_{58} + E_{88}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{16} = E_{13} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + E_{17} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{45} = (E_{25} + E_{28}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + (E_{56} + E_{68}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{17} = E_{14} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + (E_{18} - E_{15}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{46} = (E_{35} + E_{38}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + (E_{57} + E_{78}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{22} = E_{66} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{47} = (E_{45} + E_{48}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + (E_{88} - E_{55}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{23} = E_{67} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{55} = E_{22} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{26} \int_0^L (\varphi_i'' \varphi_j' + \varphi_i' \varphi_j'') dz + E_{66} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{24} = (E_{56} + E_{68}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{56} = E_{23} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + E_{27} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{36} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz + E_{67} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{25} = E_{26} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{66} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{57} = E_{24} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + (E_{28} - E_{25}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{46} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz + (E_{68} - E_{56}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{26} = E_{36} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{67} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{66} = E_{33} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + E_{37} \int_0^L (\varphi_i'' \varphi_j' + \varphi_i' \varphi_j'') dz + E_{77} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{27} = E_{46} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + (E_{68} - E_{56}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{67} = E_{34} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j' dz + (E_{38} - E_{35}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j'' dz + E_{47} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz + (E_{78} - E_{57}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$
$K_{ij}^{33} = E_{77} \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$	$K_{ij}^{77} = E_{44} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j'' dz + (E_{48} - E_{45}) \int_0^L (\varphi_i'' \varphi_j' + \varphi_i' \varphi_j'') dz + (E_{88} - 2E_{58} + E_{55}) \int_0^L \varphi_i' \varphi_j' dz$

Bảng 3. Các hệ số trong ma trận hình học **G**

$G_{ij}^{22} = G_{ij}^{33} = \int_0^l \varphi'_i \varphi'_j dz$	$G_{ij}^{34} = - \int_0^l x_p \varphi'_i \varphi'_j dz$
$G_{ij}^{24} = \int_0^l y_p \varphi'_i \varphi'_j dz$	$G_{ij}^{44} = \int_0^l \frac{I_p}{A} \varphi'_i \varphi'_j dz$

3. Ví dụ số

Trong phần này, các ví dụ số được thực hiện để khảo sát sự hội tụ của lời giải và so sánh với nghiên cứu trước. Các thông số vật liệu được sử dụng như sau [17]:

- Metal (Al): $E_m = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu_m = 0,3$.
- Ceramic (Al_2O_3): $E_c = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu_c = 0,3$.

Thông số hình học dầm hộp: Chiều dài $L = 8 \text{ m}$; Chiều cao $h = 0,1 \text{ m}$; Bề rộng dầm $b = 0,2 \text{ m}$; Độ dày thành hộp $t = 0,005 \text{ m}$ [17].

3.1. Khảo sát sự hội tụ của lời giải

Để khảo sát sự hội tụ của lời giải, tác giả đã thực hiện bài toán cho ba dạng dầm hộp A, B và C với chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 1$. Dầm B có 3 lớp với tỷ lệ chiều dày mỗi lớp là 1-1-1. Dầm C có tỷ lệ chiều dày mỗi lớp là 1-2-1. Bảng 4 thể hiện lực tới hạn dầm với các dạng điều kiện biên (ĐKB) C-F, S-S và C-C. Kết quả cho thấy lời giải hội tụ tại $m = 8$. Giá trị này được lấy để xuất kết quả cho các ví dụ số.

Bảng 4. Khảo sát sự hội tụ lực tới hạn (kN) dầm hộp sandwich FGM

Loại dầm	ĐKB	m					
		2	4	6	8	10	12
A	C-F	54,60	51,60	51,60	51,60	51,60	51,60
	S-S	212,60	207,80	206,30	206,30	206,30	206,30
	C-C	833,00	898,10	826,80	822,20	822,20	822,20
B (1-1-1)	C-F	65,80	62,20	62,20	62,20	62,20	62,20
	S-S	249,90	249,60	248,70	248,70	248,70	248,70
	C-C	1004,30	993,30	991,30	991,30	991,30	991,30
C (1-2-1)	C-F	55,00	52,00	52,00	52,00	52,00	52,00
	S-S	214,10	209,30	207,80	207,80	207,80	207,80
	C-C	839,00	829,70	828,10	828,10	828,10	828,10

3.2. Kiểm chứng và khảo sát sự ảnh hưởng của các thông số p và L/h

a. Kiểm chứng lời giải

Do không có dữ liệu về lực tới hạn của dầm hộp sandwich FGM dùng lý thuyết bậc nhất nên để đánh giá kết quả nghiên cứu, tác giả xác định lực tới hạn và so sánh với nghiên cứu sử dụng lý thuyết cổ điển của Lanc và cs. [17]. Các bảng 5, 6 và 7 trình bày lực tới hạn theo các phương x và y . Các kết quả này gần như trùng khớp với kết quả của tài liệu tham khảo [17]. Điều này là phù hợp, vì tỷ số $L/h = 80$ nên ảnh hưởng của biến dạng cắt là không đáng kể.

Bảng 5. Lực tới hạn (kN) của dầm hộp loại A

p	Nghiên cứu	Điều kiện biên					
		C-F		S-S		C-C	
		y	x	y	x	y	x
0	Lanc và cs. [17]	85,52	244,20	342,09	976,83	1369,03	3909,21
	Bài báo	85,50	243,76	341,68	970,16	1361,92	3804,52
0,2	Lanc và cs. [17]	74,35	211,46	297,40	845,87	1190,17	3385,12
	Bài báo	74,32	211,07	297,02	840,04	1183,89	3294,10
0,5	Lanc và cs. [17]	63,06	178,59	252,25	714,39	1009,47	2858,91
	Bài báo	63,04	178,27	251,94	709,49	1004,17	2782,04
1	Lanc và cs. [17]	51,63	145,59	206,54	582,37	826,55	2330,61
	Bài báo	51,62	145,32	206,29	578,37	822,19	2267,78
2	Lanc và cs. [17]	40,01	112,39	160,04	449,56	640,47	1799,12
	Bài báo	40,00	112,18	159,84	446,46	637,06	1750,50
5	Lanc và cs. [17]	28,10	78,90	112,40	315,62	449,82	1263,07
	Bài báo	28,09	78,76	112,26	313,43	447,42	1185,61
10	Lanc và cs. [17]	22,55	63,55	90,22	254,21	361,05	1017,32
	Bài báo	22,55	63,43	90,11	252,09	359,14	989,85
1000	Lanc và cs. [17]	15,83	45,19	63,32	180,76	253,40	723,40
	Bài báo	15,82	45,11	63,24	179,53	252,09	704,02

Bảng 6. Lực tới hạn (kN) của dầm hộp loại B(1-1-1)

p	Nghiên cứu	Điều kiện biên					
		C-F		S-S		C-C	
		y	x	y	x	y	x
0	Lanc và cs. [17]	85,52	244,20	342,09	976,83	1369,03	3909,21
	Bài báo	85,50	243,76	341,68	970,16	1361,92	3804,61
0,2	Lanc và cs. [17]	77,76	222,06	311,06	888,28	1244,84	3554,82
	Bài báo	77,74	221,67	310,69	882,23	1238,38	3459,66
0,5	Lanc và cs. [17]	70,01	199,93	280,03	799,73	1120,67	3200,43
	Bài báo	69,99	199,57	279,69	794,29	1114,85	3114,81
1	Lanc và cs. [17]	62,25	177,79	249,01	711,17	996,51	2846,06
	Bài báo	62,23	177,47	248,71	706,35	991,34	2769,95
2	Lanc và cs. [17]	54,50	155,65	217,99	622,63	872,38	2491,70
	Bài báo	54,48	155,38	217,73	618,41	867,86	2425,10
5	Lanc và cs. [17]	46,74	133,52	186,98	534,08	748,29	2137,35
	Bài báo	46,73	131,84	186,76	530,47	731,70	2080,25

p	Nghiên cứu	Điều kiện biên					
		C-F		S-S		C-C	
		y	x	y	x	y	x
10	Lanc và cs. [17]	43,22	123,46	172,89	493,84	691,89	1976,29
	Bài báo	43,21	117,58	172,68	490,50	688,30	1923,50
1000	Lanc và cs. [17]	38,99	111,38	155,98	445,54	624,23	1783,03
	Bài báo	39,03	111,32	155,98	443,06	621,73	1737,46

Bảng 7. Lực tới hạn (kN) của dầm hộp loại C(1-2-1)

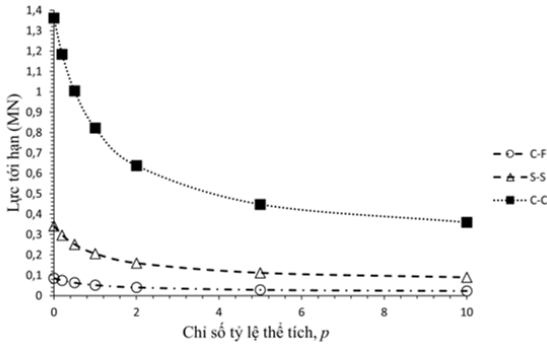
p	Nghiên cứu	Điều kiện biên					
		C-F		S-S		C-C	
		y	x	y	x	y	x
0	Lanc và cs. [17]	69,19	195,51	276,77	782,07	1107,61	3129,80
	Bài báo	69,17	195,16	253,66	728,83	1101,77	3045,59
0,2	Lanc và cs. [17]	63,49	179,03	253,98	716,13	1016,39	2865,87
	Bài báo	63,47	178,70	253,66	711,22	1011,02	2788,67
0,5	Lanc và cs. [17]	57,77	162,51	231,08	650,07	924,75	2601,52
	Bài báo	57,75	162,22	230,79	645,60	919,85	2531,33
1	Lanc và cs. [17]	52,01	145,96	208,03	583,87	832,53	2336,58
	Bài báo	51,99	145,70	207,78	579,84	828,10	2273,45
2	Lanc và cs. [17]	46,20	129,36	184,79	517,47	739,52	2070,86
	Bài báo	46,18	129,13	184,56	513,89	735,57	2014,81
5	Lanc và cs. [17]	40,31	112,69	161,26	450,78	645,36	1803,99
	Bài báo	40,30	112,48	161,06	447,65	641,91	1755,09
10	Lanc và cs. [17]	37,61	105,08	150,44	420,34	602,05	1682,16
	Bài báo	37,60	104,89	150,25	417,42	598,82	1636,54
1000	Lanc và cs. [17]	34,36	96,01	137,45	384,07	550,07	1537,02
	Bài báo	34,35	95,84	137,28	381,40	547,12	1495,32

b. Khảo sát sự ảnh hưởng của p và L/h đến lực tới hạn dầm

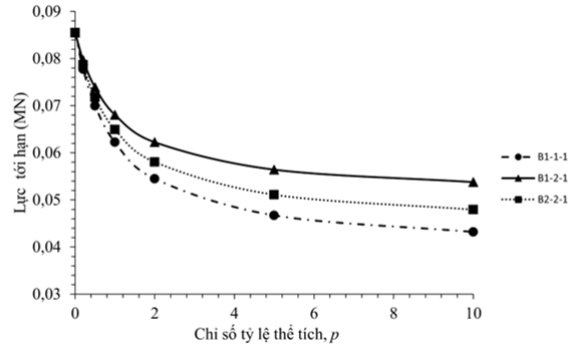
Hình 3 thể hiện sự biến thiên của lực tới hạn theo chỉ số tỷ lệ thể tích p của dầm loại A với các điều kiện biên khác nhau. Ta thấy rằng, p tăng thì lực tới hạn giảm. Điều này là vì mô-đun đàn hồi của gôm lớn hơn của kim loại ($E_c > E_m$). Khi $p = 0$, vật liệu là thuần gôm nên độ cứng của dầm là lớn nhất. Khi p tăng thì tỷ lệ thể tích gôm giảm dần và tỷ lệ thể tích kim loại tăng dần, dẫn đến độ cứng tổng thể của dầm giảm dần. Kết quả là lực tới hạn sẽ giảm. Mặt khác, với cùng chỉ số tỷ lệ thể tích p , lực tới hạn lớn nhất với dầm C-C và nhỏ nhất với dầm C-F.

Hình 4 thể hiện sự biến thiên lực tới hạn của 3 loại dầm B(1-1-1) (lớp gôm $\frac{1}{3}t$), B(1-2-1) (lớp gôm $\frac{2}{4}t$) và B(2-2-1) (lớp gôm $\frac{2}{5}t$) theo chỉ số tỷ lệ thể tích p . Có thể thấy rằng, khi $p = 0$, dầm thuần gôm

nên lực tới hạn của 3 loại dầm bằng nhau. Khi p tăng thì lực tới hạn giảm. Với cùng chỉ số tỷ lệ thể tích, do sự ảnh hưởng của chiều dày lớp gốm ($\frac{2}{4}t > \frac{2}{5}t > \frac{1}{3}t$) nên dầm B(1-2-1) và B(1-1-1) lần lượt có có lực tới hạn lớn nhất và bé nhất.

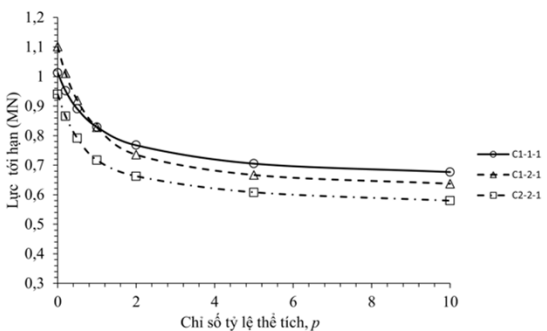


Hình 3. Biểu đồ mối liên hệ giữa lực tới hạn và chỉ số tỷ lệ thể tích p (Dầm loại A)

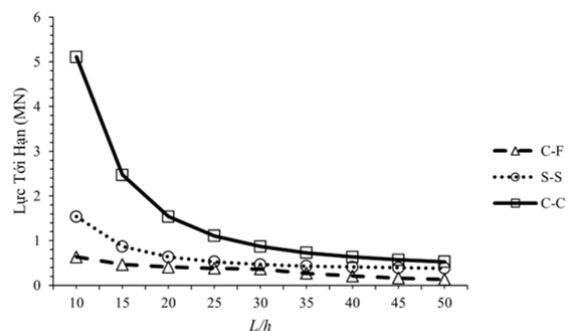


Hình 4. Biểu đồ mối liên hệ giữa lực tới hạn và chỉ số tỷ lệ thể tích p (Dầm loại B, ĐKB C-F)

Hình 5 thể hiện sự biến thiên lực tới hạn của 3 loại dầm C(1-1-1) (lớp gốm $\frac{1}{3}t$), C(1-2-1) (lớp gốm $\frac{1}{4}t$) và C(2-2-1) (lớp gốm $\frac{1}{5}t$) theo chỉ số tỷ lệ thể tích p . Khi $p = 0$, lớp lõi FG thuần là gốm nên chiều dày lớp gốm trong dầm C(1-1-1), C(1-2-1) và C(2-2-1) lần lượt là $\frac{2}{3}t$, $\frac{3}{4}t$ và $\frac{3}{5}t$, do vậy lực tới hạn của dầm loại C(1-2-1) là lớn nhất và dầm C(2-2-1) bé nhất. Khi p tăng thì hàm lượng gốm trong dầm sẽ giảm dần dẫn đến lực tới hạn giảm. Có thể thấy rằng, khi $p > 1$ thì lớp lõi FG dần chuyển sang pha kim loại, tỷ lệ các lớp gốm trong dầm C(1-1-1), C(1-2-1), C(2-2-1) lúc này lần lượt là $\frac{1}{3}t$, $\frac{1}{4}t$, $\frac{1}{5}t$. Do đó, dầm C(1-1-1) có lực tới hạn là lớn nhất vì tỷ lệ gốm trong dầm này lớn hơn hai loại dầm còn lại ($\frac{1}{3}t > \frac{1}{4}t > \frac{1}{5}t$).



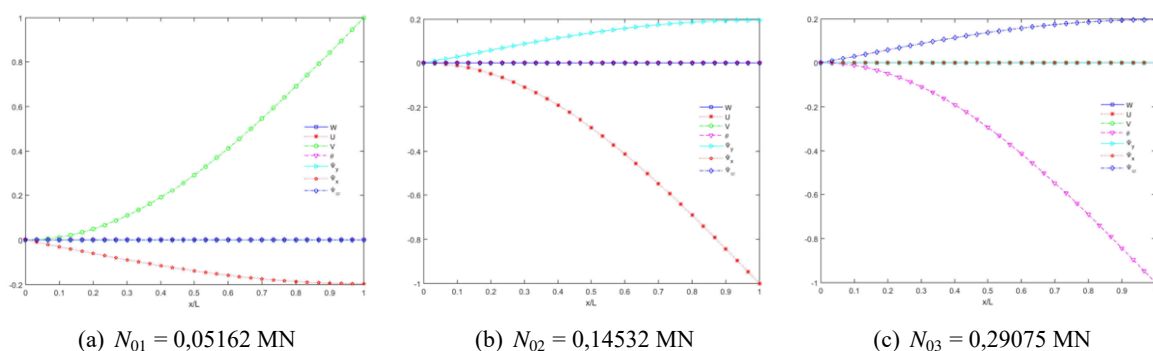
Hình 5. Biểu đồ mối liên hệ giữa lực tới hạn và chỉ số tỷ lệ thể tích p (Dầm loại C, ĐKB C-C)



Hình 6. Biểu đồ thể hiện sự ảnh hưởng của độ mảnh đến lực tới hạn của dầm

Để khảo sát sự ảnh hưởng của độ mảnh đến lực tới hạn dầm, xét dầm hộp FGM loại A với $p = 1$, chiều dài L thay đổi theo tỷ lệ L/h , các thông số kích thước khác không thay đổi. Lực tới hạn dầm với các điều kiện biên C-F, S-S và C-C thể hiện trong Hình 6. Ta thấy rằng, khi độ mảnh tăng lên thì lực tới hạn giảm. Điều này là phù hợp vì độ cứng dầm giảm khi độ mảnh tăng.

Ba dạng mất ổn định đầu tiên của loại dầm A ($p = 1$) với điều kiện biên C-F được thể hiện trên Hình 7. Có thể thấy rằng, ba dạng mất ổn định đầu tiên lần lượt là mất ổn định uốn theo trục y , x và xoắn.



Hình 7. Ba dạng mất ổn định của dầm loại A, ĐKB C-F

4. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích ổn định dầm hộp sandwich FGM. Phương pháp Ritz được sử dụng để giải bài toán. Ba loại dầm hộp sandwich FGM được khảo sát. Thông qua các ví dụ số, tác giả đã rút ra các kết luận sau:

- Với cùng dạng phân bố vật liệu và độ mảnh, dầm C-C có lực tới hạn lớn nhất và dầm C-F có lực tới hạn bé nhất.
- Chỉ số tỷ lệ thể tích tăng làm giảm độ cứng dầm nên dẫn đến lực tới hạn giảm.
- Độ mảnh tăng sẽ làm giảm lực tới hạn dầm.
- Lời giải Ritz với hàm xấp xỉ dạng mũ kết hợp với đa thức đơn giản và hiệu quả khi phân tích ứng xử ổn định dầm hộp sandwich FGM.

Tài liệu tham khảo

- [1] Somiya, S. (2015). Handbook of advanced ceramics. *Composite Part B*, 76:273–285.
- [2] El-Wazery, M. S., El-Desouky, A. R. (2015). A review on functionally graded ceramic-metal materials. *Journal of Materials and Environmental Science*, 6(5):1369–1376.
- [3] Bình, B. Q. (2009). Vật liệu chức năng và tiềm năng ứng dụng ở Việt Nam. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải*, 18:58–63.
- [4] Long, N. V., Tú, T. M., Quốc, T. H. (2021). Phân tích đặc trưng dao động của dầm FGM theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli bằng tiếp cận giải tích. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 15(3V):1–15.
- [5] Liên, T. V., Khiêm, N. T., Đức, N. T. (2017). Phân tích dao động cường bức của dầm Timoshenko bằng vật liệu FGM có nhiều vết nứt. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXDHN*, 11(3): 10–19.
- [6] Phương, N. B., Tú, T. M., Hiền, P. T. (2012). Tính toán tấm chịu uốn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXDHN*, 6(3):18–26.
- [7] Long, N. V., Tú, T. M., Trang, V. T. T. (2021). Lời giải Navier phân tích ổn định và dao động riêng tấm chữ nhật bằng vật liệu FGM rỗng bão hòa chất lỏng đặt trên nền đàn hồi Pasternak. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 15(5V):1–14.
- [8] Vlasov (1961). *Thin-walled elastic beams*. 2nd edition, Israel Program for Scientific Translation.
- [9] Gjelsvik, A. (1981). *The theory of thin walled bars*. Krieger Pub Co.
- [10] Bauld, N. R., Lih-Shyng, T. (1984). A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections. *International Journal of Solids and Structures*, 20(3):277–297.

- [11] Pandey, M. D., Kabir, M. Z., Sherbourne, A. N. (1995). [Flexural-torsional stability of thin-walled composite I-section beams](#). *Composites Engineering*, 5(3):321–342.
- [12] Lee, J. (2005). [Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory](#). *Composite Structures*, 70(2):212–222.
- [13] Vo, T. P., Lee, J. (2008). [Flexural–torsional behavior of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory](#). *Engineering Structures*, 30(7):1958–1968.
- [14] Nguyen, T.-T., Kim, N.-I., Lee, J. (2016). [Analysis of thin-walled open-section beams with functionally graded materials](#). *Composite Structures*, 138:75–83.
- [15] Nguyen, T.-T., Kim, N.-I., Lee, J. (2016). [Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams](#). *Composites Part B: Engineering*, 95:105–116.
- [16] Nguyen, T.-T., Thang, P. T., Lee, J. (2017). [Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams](#). *Composite Structures*, 160:952–963.
- [17] Lanc, D., Vo, T. P., Turkalj, G., Lee, J. (2015). [Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams](#). *Thin-Walled Structures*, 86:148–156.
- [18] Kim, N.-I., Lee, J. (2017). [Flexural-torsional analysis of functionally graded sandwich I-beams considering shear effects](#). *Composites Part B: Engineering*, 108:436–450.
- [19] Kim, N.-I., Lee, J. (2017). [Coupled vibration characteristics of shear flexible thin-walled functionally graded sandwich I-beams](#). *Composites Part B: Engineering*, 110:229–247.
- [20] Kim, N.-I., Lee, J. (2017). [Investigation of coupled instability for shear flexible FG sandwich I-beams subjected to variable axial force](#). *Acta Mechanica*, 229(1):47–70.
- [21] Kim, N.-I., Lee, J. (2018). [Nonlinear analysis of thin-walled Al/Al₂O₃ FG sandwich I-beams with mono-symmetric cross-section](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 69:55–70.
- [22] Kim, N.-I., Lee, J. (2017). [Improved formulation for spatial free vibration of thin-walled Al/Al₂O₃ FG sandwich beams with non-symmetric open, single- and double-cell sections](#). *Composite Structures*, 178: 162–185.
- [23] Ziane, N., Meftah, S. A., Belhadj, H. A., Tounsi, A., Bedia, E. A. A. (2013). [Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 66:273–282.
- [24] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, T.-N., Lee, S. (2019). [Vibration and buckling behaviours of thin-walled composite and functionally graded sandwich I-beams](#). *Composites Part B: Engineering*, 166:414–427.
- [25] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, L. B. (2020). [Bending, buckling and free vibration behaviors of thin-walled functionally graded sandwich and composite channel-section beams](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(2):932–960.
- [26] Rajagopalan, K. (2022). *Torsion of Thin Walled Structures*. Springer Nature Singapore.
- [27] Lee, J. (2001). [Center of gravity and shear center of thin-walled open-section composite beams](#). *Composite structures*, 52(2):255–260.
- [28] Salim, H. A., Davalos, J. F. (2005). [Torsion of Open and Closed Thin-Walled Laminated Composite Sections](#). *Journal of Composite Materials*, 39(6):497–524.
- [29] Nguyen, T.-K., Sab, K., Bonnet, G. (2008). [First-order shear deformation plate models for functionally graded materials](#). *Composite Structures*, 83(1):25–36.
- [30] Hutchinson, J. R. (2000). [Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory](#). *Journal of Applied Mechanics*, 68(1):87–92.