

LỰA CHỌN TIẾT DIỆN DẦM THÉP HỢP LÝ VỚI MỘT SỐ THUẬT TOÁN TỐI ƯU TRONG THIẾT KẾ CẦU DẦM THÉP CHỮ I LIÊN HỢP

Nguyễn Quốc Bảo^{a,*}

^a*Khoa Cầu Đường, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 11/4/2023, Sửa xong 12/5/2023, Chấp nhận đăng 17/5/2023

Tóm tắt

Cầu dầm thép liên hợp bản bê tông cốt thép hiện nay được ứng dụng rộng rãi do các ưu điểm của nó đem lại (kết cấu nhẹ, vượt nhịp lớn hơn so với cầu bê tông cốt thép, dễ vận chuyển, dễ lắp, sử dụng vật liệu chịu lực hợp lý,...), tuy nhiên kết cấu này lại có giá thành thường cao hơn so với cầu bê tông cốt thép cùng chiều dài nhịp. Để giảm giá thành xây dựng, bài báo phân tích và ứng dụng phương pháp tối ưu hóa (sử dụng ba thuật toán tối ưu: thuật toán di truyền, thuật toán tối ưu hóa bầy đàn và thuật toán cú cu) trong ba trường hợp nghiên cứu ứng với ba cầu dầm thép liên hợp có chiều dài nhịp lần lượt là 28 m, 38 m và 24 m để tìm tiết diện dầm thép hợp lý nhất đưa vào thiết kế. Thông qua việc phân tích kết quả có thể khẳng định sự hợp lý trong việc sử dụng thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (so với hai thuật toán còn lại) để giải quyết bài toán trên. Đồng thời, tiết diện dầm thép sau khi được tối ưu hóa có kích thước giảm đáng kể so với kích thước ban đầu (tương đương khoảng 55% kích thước ban đầu).

Từ khóa: dầm thép liên hợp; tối ưu; GA; PSO; Cuckoo.

SELECTING REASONABLE CROSS-SECTION OF STEEL GIRDER USING OPTIMIZATION ALGORITHMS IN THE DESIGN OF COMPOSITE I-GIRDER STEEL BRIDGES

Abstract

Currently, steel-concrete composite girder bridges are widely used due to their advantages (lightweight structure, greater span than concrete bridges, easy transportation, easy assembly, reasonable use of materials, etc.). However, this structure tends to have a higher construction cost than concrete girder bridges of the same span length. To reduce construction costs, this paper analyzes and applies optimization methods (using three optimization algorithms: Genetic Algorithm, Particle Swarm Optimization algorithm, and Cuckoo algorithm) in three study cases corresponding to three steel-concrete composite girder bridges with span lengths of 28 m, 38 m, and 24 m to find the most reasonable steel girder section for design. Through the analysis of the results, it can be confirmed that using the Particle Swarm Optimization algorithm (compared to the other two algorithms) is reasonable for solving this problem. At the same time, the optimized steel girder section has a significantly reduced size compared to the original size (equivalent to about 55% of the original size).

Keywords: steel-concrete composite girder; optimization; GA; PSO; Cuckoo.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17\(3V\)-10](https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(3V)-10) © 2023 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Kết cấu cầu dầm thép chữ I liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép nhịp giản đơn được chế tạo và thi công khá phổ biến tại Việt Nam và nhiều quốc gia trên thế giới. Hệ kết cấu liên hợp này được đảm bảo bởi đỉnh neo liên kết giữa dầm thép và bản bê tông cốt thép. Khi dầm thép được bố trí ở biên chịu kéo và bản bê tông cốt thép được bố trí ở biên chịu nén, hệ kết cấu liên hợp này có thể phát

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: baonq@huce.edu.vn (Bảo, N. Q.)

huy rất tốt khả năng làm việc của cả vật liệu thép và vật liệu bê tông. Ngoài ra, kết cấu này còn có trọng lượng kết cấu phần trên nhẹ hơn nhiều so với các loại kết cấu cầu bằng bê tông cốt thép hoặc bê tông cốt thép dự ứng lực thông thường cùng chiều dài nhịp, như dầm bê tông cốt thép dự ứng lực I33 hoặc dầm Super-T. Với trọng lượng kết cấu phần trên nhẹ, kết cấu mô trụ và móng cọc không yêu cầu quá lớn, do đó giảm được giá thành tổng thể công trình; đồng thời cũng có thể xây dựng các công trình cầu dạng này ở các vùng đất yếu do giảm được tải trọng xuống móng mô trụ. Cũng do trọng lượng kết cấu phần trên nhẹ nên công tác vận chuyển, cầu lắp dầm thép dễ dàng hơn so với dầm bê tông. Kết cấu này cũng thường được áp dụng trong các cầu thành phố do thời gian thi công nhanh. Tuy nhiên, khi xét các yếu tố về hiệu quả kinh tế thì cầu dầm thép lại thường không hiệu quả bằng cầu dầm bê tông cốt thép đối với chiều dài nhịp nhỏ và trung bình (suất vốn đầu tư của cầu dầm thép thường lớn hơn khá nhiều so với cầu bê tông cùng chiều dài nhịp, [1]). Do vậy, để tăng tính khả thi của việc áp dụng kết cấu cầu dầm thép (so với phương án cầu bê tông) thì một trong những yếu tố đặt ra là cần lựa chọn tiết diện dầm thép hợp lý để đảm bảo tất cả các yêu cầu chịu lực theo quy định và đồng thời tối ưu hóa các yếu tố kinh tế.

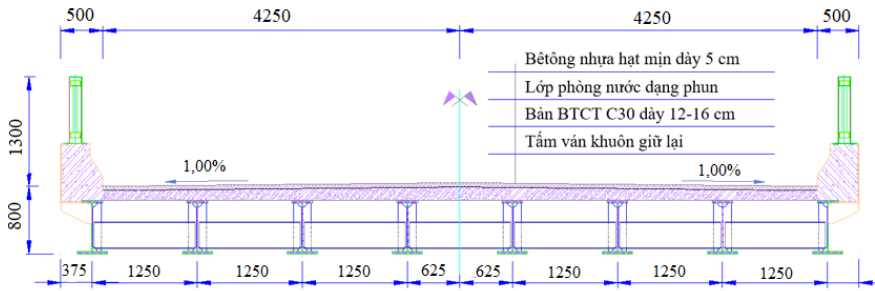
Hiện tại, các thiết kế truyền thống đi theo hướng lựa chọn kích thước tiết diện và sau đó kiểm tra kích thước và đồng thời kiểm toán tiết diện để đảm bảo các yêu cầu được nêu trong tiêu chuẩn thiết kế cầu TCVN 11823:2017 [2]. Một số tài liệu tham khảo và hướng dẫn thiết kế cầu dầm thép [3, 4] đã được biên soạn theo tiêu chuẩn thiết kế mới, tuy nhiên, quá trình thủ công này thường khó có thể lựa chọn được kích thước tối ưu, không mang lại hiệu quả kinh tế cao trong công tác thiết kế. Do vậy, việc lựa chọn kích thước tiết diện dựa trên lý thuyết tối ưu được quan tâm nghiên cứu. Mục tiêu của việc làm này là lựa chọn kích thước hợp lý nhất (thường là kinh tế nhất) trong tất cả các khả năng mà vẫn đảm bảo đầy đủ các yêu cầu kỹ thuật đặt ra.

Yazdani-Paraei và cs. [5] đã sử dụng các phân tích phi tuyến để thực hiện tối ưu hóa cầu dây văng và đã chỉ ra khả năng áp dụng vào thực tế thông qua các ví dụ số. Ferreira và cs. [6] đã phân tích thiết kế tối ưu một công trình cầu dây văng dài 350 m khi chịu tải trọng động đất với các biến cần tối ưu là độ cứng theo các phương khác nhau và hằng số giảm chấn. Cũng với cầu dây văng, Fabbrocino và cs. [7] đã tối ưu hóa lực căng cáp để đảm bảo sự phân bố đồng đều của mômen uốn trong dầm. Liên quan đến bài toán tối ưu trong cầu dây văng cũng có rất nhiều nghiên cứu đã được thực hiện [8–12]. Ở Việt Nam, Hùng và cs. [13] đã thực hiện tối ưu dầm thép chữ I bằng thuật toán tiến hóa vi phân, áp dụng cho kết cấu nhịp giản đơn có chiều dài nhịp 33 m và 50 m. Kết quả của nghiên cứu là khả quan khi có thể giảm được khối lượng dầm thép còn khoảng 65% đến 75%. Trong một nghiên cứu khác, Hùng [14] đã đề xuất tối ưu thiết kế dầm thép với các kích thước là biến rời rạc và sử dụng thuật toán tìm kiếm hàng hóa. Giá thành sau khi tối ưu của dầm thép dài 42 m giảm khoảng 15% so với thiết kế thông thường.

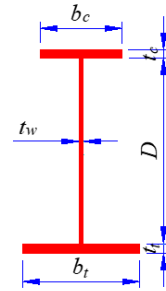
Các nghiên cứu kể trên thường dựa vào một thuật toán tối ưu duy nhất để đề xuất giải pháp hợp lý trong thiết kế công trình. Trong bài báo này, tác giả sử dụng một số thuật toán tối ưu thông dụng (thuật toán di truyền - Genetic Algorithm, thuật toán tối ưu hóa bầy đàn - Particle Swarm Optimization algorithm và thuật toán cú cu - Cuckoo algorithm) để lựa chọn tiết diện dầm thép chữ I hợp lý trong cầu dầm thép chữ I liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép nhịp giản đơn theo tiêu chuẩn thiết kế cầu TCVN 11823:2017 [2]. So sánh các kết quả nhận được từ các thuật toán kể trên cho phép xác định thuật toán nào phù hợp nhất để giải bài toán tối ưu này.

2. Các yêu cầu của bài toán thiết kế theo tiêu chuẩn TCVN 11823:2017

Đối với mỗi công trình cầu dầm thép chữ I liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép nhịp giản đơn, xem Hình 1 và Hình 2, được thiết kế theo tiêu chuẩn thiết kế cầu TCVN 11823:2017 [2] cần thỏa mãn các yêu cầu về cấu tạo cũng như các yêu cầu về chịu lực như sau:



Hình 1. Mặt cắt ngang cầu dầm thép chữ I liên hợp với bản bê tông cốt thép



Hình 2. Mặt cắt ngang dầm thép chữ I

2.1. Các yêu cầu về cấu tạo

- Tỷ lệ giữa chiều cao bản bụng D và chiều dài nhịp L : $0,033 \leq D/L$ (mục 5.2.6.3 phần 2 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ giữa chiều cao bản bụng D và chiều dày bản bụng t_w : $D/t_w \leq 150$ (mục 10.2.1.1 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ kích thước bản cánh trên: $b_c/(2t_c) \leq 12$, trong đó b_c, t_c lần lượt là bề rộng và chiều dày bản cánh trên (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ kích thước bản cánh dưới: $b_t/(2t_t) \leq 12$, trong đó b_t, t_t lần lượt là bề rộng và chiều dày bản cánh dưới (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ giữa chiều rộng bản cánh trên và chiều cao bản bụng: $D/b_c \leq 6$ (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ giữa chiều rộng bản cánh dưới và chiều cao bản bụng: $D/b_t \leq 6$ (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ giữa chiều dày bản cánh trên và chiều dày bản bụng: $1,1 \leq t_c/t_w$ (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Tỷ lệ giữa chiều dày bản cánh dưới và chiều dày bản bụng: $1,1 \leq t_t/t_w$ (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Giới hạn mômen quán tính của tiết diện $0,1 \leq I_{yc}/I_{yt} \leq 10$, trong đó: I_{yc} là mômen quán tính bản cánh chịu nén của mặt cắt thép với trục thẳng đứng đi qua bản bụng và I_{yt} là mômen quán tính của bản cánh chịu kéo với trục thẳng đứng đi qua bản bụng (mục 10.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017).
- Yêu cầu về tính dè: $D_p/D_t \leq 0,42$, trong đó D_p là khoảng cách từ đỉnh của bản bê tông tới trục trọng tâm của mặt cắt liên hợp xuất hiện mômen dè và D_t là tổng chiều cao của mặt cắt liên hợp (mục 10.7.3 phần 6 TCVN 11823:2017).

2.2. Các yêu cầu về chịu lực

- a. Yêu cầu về sức kháng uốn ở trạng thái giới hạn cường độ (mục 10.7 phần 6 TCVN 11823:2017)
 - Đối với tiết diện đặc chắc: $M_u \leq \Phi_f M_n$, trong đó: Φ_f là hệ số sức kháng uốn, M_u là mômen uốn do tải trọng tác dụng, được tổ hợp ở trạng thái giới hạn cường độ, M_n là sức kháng uốn danh định của tiết diện.
 - Đối với tiết diện không đặc chắc: $f_{bu} \leq \Phi_f F_{nc}$, trong đó: f_{bu} là ứng suất trong bản cánh không tính đến uốn ngang bản cánh, F_{nc} là sức kháng uốn danh định của bản cánh chịu nén. Yêu cầu này cần được thỏa mãn đối với bản cánh trên và bản cánh dưới.
- b. Yêu cầu về sức kháng cắt ở trạng thái giới hạn cường độ (mục 10.9 phần 6 TCVN 11823:2017)

Điều kiện về sức kháng cắt cần được thỏa mãn: $V_u \leq \Phi_v V_n$, trong đó: Φ_v là hệ số sức kháng cắt, V_u là lực cắt do tải trọng tác dụng, được tổ hợp ở trạng thái giới hạn cường độ, V_n là sức kháng cắt danh định của tiết diện.

c. Yêu cầu về ứng suất ở trạng thái giới hạn sử dụng (mục 10.4 phần 6 TCVN 11823:2017)

- Đối với bản cánh trên trong giai đoạn liên hợp: $f_{fc} \leq 0,95R_hF_{yc}$, trong đó: f_{fc} là ứng suất trong bản cánh trên do tổ hợp tải trọng sử dụng II gây ra tại mặt cắt đang xét không tính đến tác dụng của uốn ngang, R_h là hệ số lai, F_{yc} là cường độ chảy của thép bản cánh trên.

- Đối với bản cánh dưới trong giai đoạn liên hợp: $f_{ft} \leq 0,95R_hF_{yt}$, trong đó: f_{ft} là ứng suất trong bản cánh dưới do tổ hợp tải trọng sử dụng II gây ra tại mặt cắt đang xét không tính đến tác dụng của uốn ngang, F_{yt} là cường độ chảy của thép bản cánh dưới.

- Đối với bản cánh trên trong giai đoạn chưa liên hợp: $f_{fc} \leq 0,8R_hF_{yc}$.

- Đối với bản cánh dưới trong giai đoạn chưa liên hợp: $f_{ft} \leq 0,8R_hF_{yt}$.

- Đối với bản mặt cầu bê tông cốt thép: $f_{desk} \leq 0,6f'_c$, trong đó f_{desk} là ứng suất nén trong bản bê tông do tổ hợp tải trọng sử dụng II gây ra tại mặt cắt đang xét, f'_c là cường độ bê tông.

d. Yêu cầu về độ võng ở trạng thái giới hạn sử dụng (mục 5.2.6.2 phần 2 TCVN 11823:2017)

Độ võng do hoạt tải gây ra y_{LL} cần thỏa mãn: $y_{LL} \leq L/800$.

e. Yêu cầu về môi ở trạng thái giới hạn môi (mục 6.1.2.2 phần 6 TCVN 11823:2017)

Yêu cầu về môi cần được thỏa mãn là $\eta\gamma(\Delta f) \leq \Phi(\Delta F)_n$, trong đó η là hệ số điều chỉnh tải trọng, bằng 1; Φ là hệ số sức kháng môi, bằng 1; γ là hệ số tải trọng; (Δf) là biên độ ứng suất do xe tải môi gây ra; $(\Delta F)_n$ là sức kháng môi danh định.

3. Các thuật toán tối ưu, hàm mục tiêu và điều kiện ràng buộc

Các thuật toán tối ưu được sử dụng trong bài báo này gồm có: thuật toán di truyền (Genetic Algorithm), thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization algorithm) và thuật toán cú cu (Cuckoo algorithm).

3.1. Thuật toán di truyền - Genetic Algorithm

Thuật toán di truyền (Genetic Algorithm) được sử dụng để giải quyết các bài toán với số lượng biến lớn. Đây được coi là một trong những thuật toán tối ưu hóa phổ biến nhất. Thuật toán này sử dụng các nguyên tắc chọn lọc tự nhiên, bao gồm chọn lọc, lai chéo và đột biến [15]. John Holland và DeJong đã thảo luận về thuật toán này từ năm 1975 [16, 17]. Trước tiên, một quần thể ban đầu được tạo ra một cách ngẫu nhiên, bao gồm một số cá thể với những đặc điểm “độc đáo”. Theo nguyên tắc chọn lọc tự nhiên, các cá thể yếu kém sẽ dần dần bị đào thải và loại bỏ. Chỉ những cá thể có đặc điểm tốt mới có thể tồn tại, đây chính là nguyên tắc cơ bản của chọn lọc tự nhiên. Quá trình lai tạo sau đó tạo ra những cá thể mới thừa hưởng những đặc điểm của cá thể bố mẹ (thường là những đặc điểm tốt). Yếu tố chính quyết định liệu một quần thể có thể tiến hóa hay không là đột biến, đó là một thay đổi ngẫu nhiên nhỏ trong nhiễm sắc thể của một số cá thể nào đó. Sau đó, quá trình nói trên được lặp lại cho đến khi điều kiện kết thúc được đáp ứng, thường là số chu trình lặp hoặc điều kiện hội tụ của hàm tối ưu.

3.2. Thuật toán tối ưu hóa bầy đàn - Particle Swarm Optimization algorithm

Kennedy và Eberhart đã phát triển thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization algorithm) vào năm 1985 [18, 19]. Các tác giả cho rằng một đàn cá hoặc một đàn chim “có thể được hưởng lợi từ kinh nghiệm của tất cả các cá thể khác trong đàn” để di chuyển và kiếm ăn hiệu quả hơn. Cụ thể trong khi di chuyển và kiếm ăn một cách ngẫu nhiên, những cá thể có thể chia sẻ những gì chúng tìm thấy với cả đàn để mọi cá thể trong đàn đều có thể hưởng lợi từ cuộc săn tốt nhất. Do đó, thuật toán này có thể được tóm tắt thông qua các bước như sau:

- Vị trí ban đầu của cá thể được tạo ra thông qua một hàm ngẫu nhiên phân phối đều trong một phạm vi giới hạn được xác định trước.

- Căn cứ vào các vị trí này, hàm mục tiêu sẽ được tính toán xác định.
- Xác định vị trí tốt nhất cho mỗi cá thể tại thời điểm hiện tại và vị trí tốt nhất cho toàn bộ đàn tại thời điểm hiện tại.
- Cập nhật vận tốc và vị trí của cá thể phụ thuộc vào hai vị trí tốt nhất vừa xác định ở trên.
- Quá trình nói trên được lặp lại cho đến khi điều kiện kết thúc được đáp ứng.

3.3. Thuật toán chim cú cu - Cuckoo algorithm

Yang và Deb đã phát triển thuật toán cú cu (Cuckoo algorithm) vào năm 2009 [20]. Thuật toán này sau đó đã được chứng minh là một trường hợp đặc biệt của thuật toán tiến hóa nổi tiếng ($\mu + \lambda$) [21]. Thuật toán này được xây dựng từ thói quen ký sinh của chim cú cu gáy. Vì không bao giờ xây tổ nên loài chim này thường đẻ trứng vào tổ của các loài chim chủ khác. Khi coi mỗi quả trứng trong tổ là một giải pháp thì trứng chim cú cu gáy được coi là giải pháp mới và tốt. Nếu con chim chủ tìm thấy và phát hiện những quả trứng lạ (của chim cú cu gáy) không phải của mình, nó sẽ ném những quả trứng này đi hoặc đơn giản là bỏ tổ và xây một tổ khác. Những tổ tốt nhất với chất lượng trứng cao sẽ được truyền lại cho thế hệ tiếp theo [22].

3.4. Hàm mục tiêu trong tối ưu hóa

Với mục tiêu ban đầu của bài báo là giảm tối đa kích thước của dầm thép, tức là giảm giá thành vật liệu thép làm dầm chủ I, hàm mục tiêu được xây dựng chính là trọng lượng của dầm thép: $f_{obj} = (b_c \times t_c + D \times t_w + b_t \times t_t) \times L_{dầm} \times \gamma_{thép}$, trong đó: $L_{dầm}$ là chiều dài dầm thép, $\gamma_{thép}$ là trọng lượng riêng của thép, với các kích thước mặt cắt ngang dầm thép thay đổi và các kích thước còn lại không thay đổi. Kết quả của bài toán tối ưu là giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu, tương ứng với các kích thước dầm thép hợp lý.

Tuy nhiên, đây là bài toán tối ưu hóa có điều kiện, với các điều kiện ràng buộc cần được thỏa mãn đã được nêu tại mục 2. Để đơn giản trong quá trình thực hiện tối ưu hóa, việc áp dụng các điều kiện ràng buộc sẽ được thực hiện như sau:

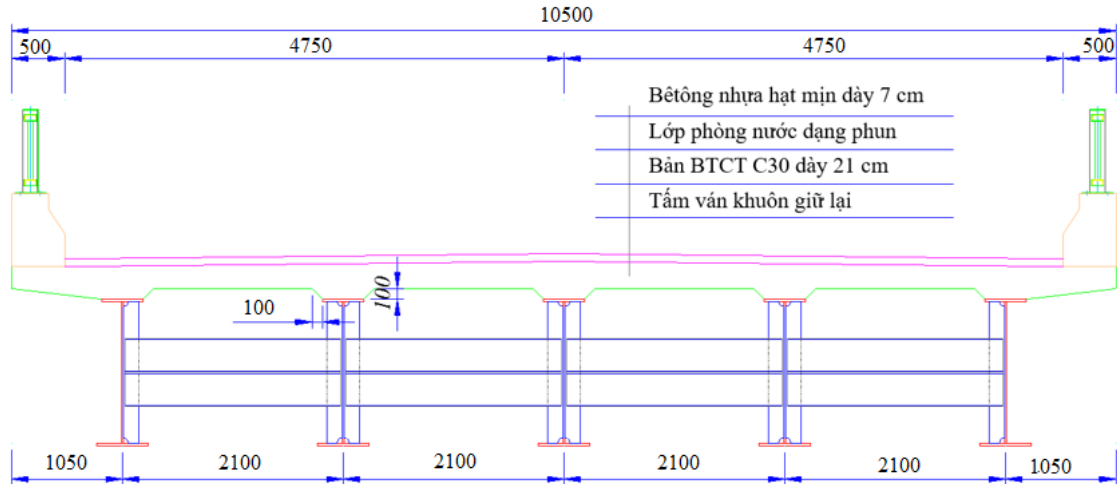
- Nếu tất cả các điều kiện trong số các yêu cầu của bài toán thiết kế được nêu tại mục 2 đều được thỏa mãn, giá trị hàm mục tiêu được lấy như sau: $f_{obj} = (b_c \times t_c + D \times t_w + b_t \times t_t) \times L_{dầm} \times \gamma_{thép}$.
- Nếu ít nhất một điều kiện trong số các yêu cầu của bài toán thiết kế được nêu tại mục 2 bị vi phạm thì giá trị hàm mục tiêu được lấy như sau: $f_{obj} = (b_c \times t_c + D \times t_w + b_t \times t_t) \times L_{dầm} \times \gamma_{thép} + 10^{10}$, và khi so sánh với trường hợp 1 (trường hợp thỏa mãn toàn bộ yêu cầu thiết kế) thì trường hợp đang xét sẽ bị loại bỏ ra khỏi quá trình tối ưu.

4. Một số trường hợp nghiên cứu

4.1. Lựa chọn tiết diện hợp lý cho dầm chủ I nhíp giản đơn dài 28 m

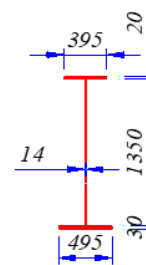
a. Các thông số ban đầu

Trường hợp nghiên cứu đầu tiên là một kết cấu nhíp giản đơn với mặt cắt ngang có 5 dầm chủ chữ I bằng thép liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép, xem Hình 3. Dầm chủ chữ I có chiều dài dầm bằng 28 m và chiều dài nhíp tính toán (khoảng cách tim hai gối) bằng 27,4 m. Bề rộng mặt cầu bằng 10,5 m, trong đó gờ lan can hai bên rộng $2 \times 0,5$ m và phần đường xe chạy rộng 9,5 m. Cầu được thiết kế với 2 làn xe ô tô và không có làn đường dành cho người đi bộ. Khoảng cách các dầm chủ bằng 2,1 m và chiều dài cánh hẫng bản mặt cầu bằng 1,05 m. Bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép có bề rộng bằng 10,5 m và chiều dày trung bình bằng 0,21 m. Chiều cao và chiều rộng vút bê tông đều bằng 0,1 m. Vật liệu thép làm dầm chủ và dầm ngang có mô đun đàn hồi $E_s = 200.000$ MPa và cường độ chảy $F_y = 345$ MPa. Vật liệu bê tông làm bản mặt cầu có cường độ nén tiêu chuẩn $f'_c = 30$ MPa, giá trị mô đun đàn hồi được tính dựa trên cường độ nén tiêu chuẩn và trọng lượng riêng của bê tông.



Hình 3. Mặt cắt ngang kết cấu nhịp cầu dầm thép liên hợp dài 28 m

Việc lựa chọn kích thước dầm thép chữ I theo kinh nghiệm được thể hiện trên Hình 4, trong đó kích thước bản cánh trên là 395 mm × 20 mm, kích thước bản bụng 14 mm × 1350 mm, kích thước bản cánh dưới là 495 mm × 30 mm. Các giá trị về tải trọng tác dụng, hệ số phân phối hoạt tải, hiệu ứng do tĩnh tải và hoạt tải gây ra, đặc trưng hình học cũng như các điều kiện kiểm tra được tính toán theo tiêu chuẩn thiết kế cầu TCVN 11823:2017 [2] cho 6 tiết diện gồm có: 0; 0,1L; 0,2L; 0,3L; 0,4L và 0,5L. Một đoạn mã được viết trong phần mềm MatLab [23] để thực hiện các nội dung kể trên. Với mục đích xác minh tính chính xác của đoạn mã này, việc tính toán thủ công được thực hiện song song và tiến trình so sánh kết quả giữa tính toán bằng MatLab và tính toán thủ công được thể hiện trong Bảng 1, Bảng 2 và Bảng 3. Kết quả thể hiện việc tính toán bằng MatLab hay thủ công đều cho kết quả như nhau.



Hình 4. Mặt cắt ngang dầm thép chữ I dài 28 m theo kinh nghiệm

Bảng 1. So sánh giá trị tải trọng tác dụng, hệ số phân phối ngang và nội lực khi tính bằng MatLab và khi tính thủ công

Nội dung		Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
Tải trọng tác dụng (coi là phân bố đều trên chiều dài dầm)	Tải trọng bản thân dầm chủ	kN/m	3,2074	3,2074	0,0%
	Tải trọng bản thân dầm ngang	kN/m	0,37	0,37	0,0%
	Tải trọng bản thân bản mặt cầu	kN/m	12,386	12,386	0,0%
	Tải trọng bản thân lan can bê tông cốt thép	kN/m	3,8	3,8	0,0%
	Tải trọng bản thân tay vịn thép	kN/m	0,38	0,38	0,0%
Hệ số phân phối ngang	Tải trọng bản thân lớp phủ	kN/m	3,1635	3,1635	0,0%
	Cho mômen (không tính môi)		0,6571	0,6571	0,0%
	Cho lực cắt (không tính môi)		0,7448	0,7448	0,0%
	Cho mômen khi tính môi		0,5476	0,5476	0,0%

Nội dung		Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
Cho lực cắt khi tính mỗi			0,5476	0,5476	0,0%
Khi tính vòng			0,4	0,4	0,0%
Mômen ở trạng thái giới hạn cường độ	Mặt cắt 0L	kNm	0,00	0,00	0,0%
	Mặt cắt 0,1L	kNm	2459,92	2459,92	0,0%
	Mặt cắt 0,2L	kNm	4341,77	4341,77	0,0%
	Mặt cắt 0,3L	kNm	5645,55	5645,55	0,0%
	Mặt cắt 0,4L	kNm	6417,29	6417,29	0,0%
	Mặt cắt 0,5L	kNm	6633,98	6633,98	0,0%
Lực cắt ở trạng thái giới hạn cường độ	Mặt cắt 0L	kN	1082,25	1082,25	0,0%
	Mặt cắt 0,1L	kN	912,10	912,10	0,0%
	Mặt cắt 0,2L	kN	745,28	745,28	0,0%
	Mặt cắt 0,3L	kN	581,77	581,77	0,0%
	Mặt cắt 0,4L	kN	421,59	421,59	0,0%
	Mặt cắt 0,5L	kN	264,73	264,73	0,0%

Bảng 2. So sánh giá trị đặc trưng hình học các giai đoạn khi tính bằng MatLab và khi tính thủ công

Nội dung		Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
Đặc trưng hình học tiết diện dầm thép chưa liên hợp	Diện tích	m ²	0,04165	0,04165	0,0%
	Mômen quán tính	m ⁴	0,01365	0,01365	0,0%
	Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt tới trục trung hòa bản bụng	m	-0,11609	-0,11609	0,0%
	Mômen quán tính mặt cắt đối với trục trung hòa của mặt cắt	m ⁴	0,01309	0,01309	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép trên dầm thép	m	0,81109	0,81109	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép dưới dầm thép	m	0,58891	0,58891	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép trên dầm thép	m ³	0,01614	0,01614	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép dưới dầm thép	m ³	0,02222	0,02222	0,0%
Đặc trưng hình học tiết diện dầm thép liên hợp dài hạn (3n)	Bề rộng bản mặt cầu quy đổi	m	0,09839	0,09839	0,0%
	Diện tích	m ²	0,06231	0,06231	0,0%
	Mômen quán tính	m ⁴	0,03046	0,03046	0,0%
	Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt tới trục trung hòa bản bụng	m	0,22083	0,22083	0,0%
	Mômen quán tính mặt cắt đối với trục trung hòa của mặt cắt	m ⁴	0,02742	0,02742	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép trên dầm thép	m	0,47417	0,47417	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép dưới dầm thép	m	0,92583	0,92583	0,0%

	Nội dung	Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép trên dầm thép	m ³	0,05783	0,05783	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép dưới dầm thép	m ³	0,02962	0,02962	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép trên bản mặt cầu	m	0,78417	0,78417	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép trên bản mặt cầu	m ³	0,03497	0,03497	0,0%
Đặc trưng hình học tiết diện dầm thép liên hợp dài hạn (3n)	Bề rộng bản mặt cầu quy đổi	m	0,29516	0,29516	0,0%
	Diện tích	m ²	0,10363	0,10363	0,0%
	Mômen quán tính	m ⁴	0,06408	0,06408	0,0%
	Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt tới trục trung hòa bản bụng	m	0,49164	0,49164	0,0%
	Mômen quán tính mặt cắt đối với trục trung hòa của mặt cắt	m ⁴	0,03903	0,03903	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép trên dầm thép	m	0,20336	0,20336	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép dưới dầm thép	m	1,19664	1,19664	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép trên dầm thép	m ³	0,19195	0,19195	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép dưới dầm thép	m ³	0,03262	0,03262	0,0%
	Khoảng cách từ trục trung hòa mặt cắt tới mép trên bản mặt cầu	m	0,51336	0,51336	0,0%
	Mômen tĩnh mặt cắt đối với trục đi qua mép trên bản mặt cầu	m ³	0,07604	0,07604	0,0%

Bảng 3. So sánh các giá trị sức kháng khi tính bằng MatLab và khi tính thủ công

	Nội dung	Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
Sức kháng uốn	tại mặt cắt 0L - 0,5L	kNm	13083,40	13083,40	0,0%
Sức kháng cắt	tại mặt cắt 0L	kN	2694,19	2694,19	0,0%
Sức kháng cắt	tại mặt cắt 0,1L - 0,5L	kN	3223,62	3223,62	0,0%
Ứng suất trong giai đoạn chưa liên hợp tại mặt cắt 0,5L	bản cánh dưới	MPa	67,41	67,41	0,0%
	bản cánh trên	MPa	-92,84	-92,84	0,0%
Ứng suất trong giai đoạn liên hợp dài hạn tại mặt cắt 0,5L	bản cánh dưới	MPa	23,27	23,27	0,0%
	bản cánh trên	MPa	-11,92	-11,92	0,0%
	bản mặt cầu	MPa	-0,92	-0,92	0,0%

	Nội dung	Đơn vị	MatLab	Thủ công	Sai số
Ứng suất trong giai đoạn liên hợp ngắn hạn tại mặt cắt 0,5L	bản cánh dưới	MPa	86,92	86,92	0,0%
	bản cánh trên	MPa	-14,77	-14,77	0,0%
	bản mặt cầu	MPa	-5,24	-5,24	0,0%
Độ võng	dầm do hoạt tải tại mặt cắt 0,5L	m	0,0134	0,0134	0,0%
Ứng suất mỗi tại mặt cắt 0,5L	bản cánh dưới	MPa	50,88	50,88	0,0%
	bản cánh trên	MPa	-8,65	-8,65	0,0%

b. Lựa chọn tiết diện hợp lý

Kích thước ban đầu được lựa chọn phụ thuộc rất nhiều vào kinh nghiệm của người thiết kế và chỉ được sử dụng trong bài báo này để so sánh với các kích thước sau khi đã thực hiện tối ưu hóa. Khoảng giá trị của các biến cần được tối ưu như sau:

- Kích thước về chiều rộng bản cánh trên và chiều rộng bản cánh dưới nằm trong đoạn [0; 1050] mm.
- Kích thước về chiều dày bản cánh trên, chiều dày bản cánh dưới và chiều dày bản bụng nằm trong đoạn [0; 150] mm.
- Kích thước về chiều cao bản bụng nằm trong đoạn [0; 3000] mm.

Căn cứ vào các dữ liệu nêu trên, ba thuật toán tối ưu (thuật toán di truyền, thuật toán tối ưu hóa bầy đàn và thuật toán cục bộ) được thực hiện để tìm kích thước tiết diện hợp lý nhất cho dầm thép chữ I. Để giảm thiểu tính chất ngẫu nhiên của các thuật toán tối ưu, mỗi thuật toán được thực hiện 10 lần, mỗi lần chạy khoảng 10.000 vòng lặp, kết quả được tổng hợp trong Bảng 4 là giá trị trung bình của 10 lần chạy.

Bảng 4. Kết quả tính toán tối ưu tiết diện dầm thép dài 28 m

Nội dung	Thuật toán tối ưu			Thủ công
	PSO	GA	Cuckoo	
Giá trị khối lượng dầm thép tốt nhất (kg)	4991,50	5822,79	4993,17	9154,67
Sai khác giá trị tốt nhất so với tính toán thủ công	54,52%	63,60%	54,54%	
Giá trị khối lượng dầm thép trung bình (kg)	5080,68	5991,28	5089,67	
Giá trị khối lượng dầm thép tồi nhất (kg)	5288,30	6307,23	5325,46	
Độ lệch chuẩn (kg)	102,43	167,73	103,71	
Số vòng lặp tối thiểu	4585	6848	3281	
Tổng thời gian tính toán cho 10.000 vòng lặp (phút)	4,449	4,705	83,901	
Thời gian tính toán số vòng lặp tối thiểu (phút)	2,040	3,222	27,528	
Kích thước bản cánh trên (m)	$0,2045 \times 0,0111$	$0,2004 \times 0,0211$	$0,1914 \times 0,011$	$0,395 \times 0,02$
Kích thước bản bụng (m)	$1,2069 \times 0,0101$	$0,7777 \times 0,0093$	$1,1486 \times 0,01$	$1,35 \times 0,014$
Kích thước bản cánh dưới (m)	$0,3381 \times 0,0244$	$0,3151 \times 0,0477$	$0,2507 \times 0,0364$	$0,495 \times 0,03$

Dựa vào kết quả của các bài toán tối ưu kể trên, có thể nhận xét rằng tất cả các kích thước sau khi thực hiện tối ưu hóa đều tốt hơn rất nhiều so với trước khi thực hiện, khối lượng dầm thép sau khi tối ưu hóa chỉ bằng lần lượt 54,52%; 63,60% và 54,54% so với ban đầu, tương ứng với thuật toán GA, PSO và Cuckoo. Thuật toán GA cho kết quả tồi hơn so với hai thuật toán còn lại, trong khi hai thuật toán PSO và Cuckoo cho kết quả khá tương đồng nhau: khối lượng dầm thép sau khi tối ưu lần lượt là 4.991,50 kg và 4.993,17 kg. Thuật toán Cuckoo có số vòng lặp tối thiểu (3.281 vòng) ít hơn so với thuật toán PSO (4.585 vòng). Tuy nhiên, do thời gian tính toán mỗi vòng lặp lớn nên thời gian tính

toán số vòng lặp tối thiểu của Cuckoo lại nhiều hơn của PSO khoảng 13 lần. Kết quả kiểm toán tiết diện sau tối ưu với thuật toán PSO được giới thiệu trong Bảng 5.

Bảng 5. Kết quả kiểm toán tiết diện tối ưu dầm thép dài 28 m

Nội dung	Đơn vị	Giá trị	Giới hạn
Mômen do tải trọng tác dụng tại mặt cắt 0,5L	kNm	6413,62	7945,92
Lực cắt tải trọng tác dụng tại mặt cắt 0L	kN	1050,08	1060,43
Lực cắt tải trọng tác dụng tại mặt cắt 0.1L	kN	886,368	1680,17
Ứng suất bản cánh dưới trong giai đoạn chưa liên hợp tại mặt cắt 0,5L	MPa	126,81	276
Ứng suất bản cánh trên trong giai đoạn chưa liên hợp tại mặt cắt 0,5L	MPa	-211,91	-276
Ứng suất bản cánh dưới trong giai đoạn liên hợp dài hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	41,86	327,75
Ứng suất bản cánh trên trong giai đoạn liên hợp dài hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	-13,88	-327,75
Ứng suất bản mặt cầu trong giai đoạn liên hợp dài hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	-1,30	-18
Ứng suất bản cánh dưới trong giai đoạn liên hợp ngắn hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	159,01	327,75
Ứng suất bản cánh trên trong giai đoạn liên hợp ngắn hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	-7,84	-327,75
Ứng suất bản mặt cầu trong giai đoạn liên hợp ngắn hạn tại mặt cắt 0,5L	MPa	-6,95	-18
Độ võng dầm do hoạt tải tại mặt cắt 0,5L	m	0,01814	0,03
Ứng suất mỏi bản cánh dưới tại mặt cắt 0,5L	MPa	93,08	110
Ứng suất mỏi bản cánh trên tại mặt cắt 0,5L	MPa	-4,59	110

4.2. Lựa chọn tiết diện hợp lý cho dầm chữ I nhịp giản đơn dài 24 m và dài 38 m

Các trường hợp nghiên cứu thứ hai và thứ ba đều là các cầu dầm thép chữ I liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép có các thông số được nêu trong Bảng 6, các số liệu khác được lấy theo trường hợp nghiên cứu thứ nhất.

Bảng 6. Thông số kỹ thuật của trường hợp nghiên cứu thứ hai và thứ ba

STT	Nội dung	Đơn vị	Trường hợp 2	Trường hợp 3
1	Số lượng dầm chủ	cái	6	8
2	Chiều dài dầm chủ	m	38	24
3	Chiều dài nhịp tính toán	m	37,4	23,4
4	Bề rộng mặt cầu	m	12	10
5	Số làn xe thiết kế		3	2
6	Khoảng cách các dầm chủ	m	2	1,25
7	Chiều dài cánh hẫng bản mặt cầu	m	1	0,625
8	Chiều dày trung bình bản mặt cầu	m	0,22	0,21
9	Kích thước bản cánh trên	m	450 × 24	250 × 20
10	Kích thước bản bụng	m	1620 × 16	800 × 14
11	Kích thước bản cánh dưới	m	560 × 35	350 × 25

Kết quả tính toán tối ưu cho trường hợp nghiên cứu thứ 2 và thứ 3 được tổng hợp trong Bảng 7 và Bảng 8. Kết quả của hai trường hợp này đều có xu hướng giống như trường hợp 1 đã phân tích ở trên. Từ đó, ngoài những nhận xét đã nêu cho trường hợp 1, có thể thấy rõ rằng thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization algorithm) phù hợp nhất trong ba thuật toán để xác định, lựa chọn tiết diện dầm chữ I hợp lý trong kết cấu cầu thép liên hợp bản bê tông cốt thép.

Bảng 7. Kết quả tính toán tối ưu tiết diện dầm thép dài 38 m

Nội dung	Thuật toán tối ưu			Thủ công
	PSO	GA	Cuckoo	
Giá trị khối lượng dầm thép tốt nhất (kg)	9311,69	10330,35	9340,23	16800,26
Sai khác giá trị tốt nhất so với tính toán thủ công	55,43%	61,49%	55,60%	
Giá trị khối lượng dầm thép trung bình (kg)	9633,09	10639,86	9544,99	
Giá trị khối lượng dầm thép tồi nhất (kg)	10049,59	11223,51	10264,36	
Độ lệch chuẩn (kg)	228,93	275,98	270,83	
Số vòng lặp tối thiểu	6288	9605	1163	
Tổng thời gian tính toán cho 10.000 vòng lặp (phút)	4,449	5,116	87,181	
Thời gian tính toán số vòng lặp tối thiểu (phút)	2,797	4,914	10,139	
Kích thước bản cánh trên (m)	$0,2506 \times 0,0121$	$0,1887 \times 0,0266$	$0,2508 \times 0,0121$	$0,45 \times 0,024$
Kích thước bản bụng (m)	$1,4833 \times 0,011$	$1,1323 \times 0,0106$	$1,505 \times 0,011$	$1,62 \times 0,016$
Kích thước bản cánh dưới (m)	$0,3969 \times 0,0299$	$0,2278 \times 0,0773$	$0,4056 \times 0,0289$	$0,56 \times 0,035$

Bảng 8. Kết quả tính toán tối ưu tiết diện dầm thép dài 24m

Nội dung	Thuật toán tối ưu			Thủ công
	PSO	GA	Cuckoo	
Giá trị khối lượng dầm thép tốt nhất (kg)	2589,58	3370,62	2590,97	4700,58
Sai khác giá trị tốt nhất so với tính toán thủ công	55,09%	71,71%	55,12%	
Giá trị khối lượng dầm thép trung bình (kg)	2629,51	3464,53	2642,67	
Giá trị khối lượng dầm thép tồi nhất (kg)	2742,03	3626,47	2762,71	
Độ lệch chuẩn (kg)	52,87	98,79	65,11	
Số vòng lặp tối thiểu	9824	9605	9548	
Tổng thời gian tính toán cho 10.000 vòng lặp (phút)	4,845	5,329	89,567	
Thời gian tính toán số vòng lặp tối thiểu (phút)	4,759	5,119	85,519	
Kích thước bản cánh trên (m)	$0,1481 \times 0,009$	$0,1395 \times 0,0355$	$0,1506 \times 0,0091$	$0,25 \times 0,02$
Kích thước bản bụng (m)	$0,8882 \times 0,0082$	$0,8155 \times 0,0099$	$0,9022 \times 0,0082$	$0,8 \times 0,014$
Kích thước bản cánh dưới (m)	$0,2342 \times 0,0219$	$0,2088 \times 0,0233$	$0,2492 \times 0,02$	$0,35 \times 0,025$

5. Kết luận

Nghiên cứu đã xây dựng được một cách thức lựa chọn tiết diện dầm thép chữ I trong cầu dầm thép liên hợp với bản mặt cầu bằng bê tông cốt thép. Để thực hiện được điều này cần phân tích các yêu cầu về cấu tạo cũng như các yêu cầu về chịu lực cần phải đảm bảo theo tiêu chuẩn hiện hành. Sau đó, sử dụng các thuật toán tối ưu để tìm giá trị nhỏ nhất của khối lượng dầm thép mà vẫn đảm bảo các yêu cầu về cấu tạo và chịu lực. Trong bài báo này, ba thuật toán tối ưu thông dụng được đề xuất: thuật toán di truyền (Genetic Algorithm), thuật toán tối ưu hóa bầy đàn (Particle Swarm Optimization algorithm) và thuật toán cú cu (Cuckoo algorithm). Thông qua việc phân tích ba cầu dầm có chiều dài lần lượt là 28 m; 38 m và 24 m có thể khẳng định việc sử dụng thuật toán tối ưu hóa bầy đàn là hợp lý nhất (cho kết quả tốt nhất trong thời gian ngắn nhất) để lựa chọn tiết diện hợp lý. Kết quả của cả ba trường hợp nghiên cứu đều cho thấy kích thước tiết diện có thể giảm khoảng 45% so với tiết diện ban đầu sau khi thực hiện tối ưu hóa.

Tài liệu tham khảo

- [1] QĐ 610/QĐ-BXD (2022). *Quyết định công bố suất vốn đầu tư xây dựng công trình và giá xây dựng tổng hợp bộ phận kết cấu công trình năm 2021*. Bộ Xây dựng.
- [2] TCVN 11823:2017. *Tiêu chuẩn thiết kế cầu đường bộ*. Bộ Khoa học và Công nghệ.
- [3] Toàn, N. X., Mỹ, N. V. (2022). *Thiết kế và thi công cầu dầm thép*. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật.

- [4] Bảo, N. Q., Dương, N. H. (2019). *Hướng dẫn thiết kế cầu dầm thép chữ I liên hợp bản bê tông cốt thép liên tục hai nhịp - Theo tiêu chuẩn thiết kế cầu đường bộ TCVN 11823:2017*. Nhà xuất bản Xây dựng.
- [5] Yazdani-Paraei, H., Moharrami, H., Maalek, S., Heydari, M. Optimum design of cable-stayed bridges. *Australian Journal of Structural Engineering*, 12(2):99–118.
- [6] Ferreira, F., Simões, L. (2022). [Optimum seismic design of curved cable-stayed bridges](#). *Structures*, 43: 131–148.
- [7] Fabbrocino, F., Modano, M., Farina, I., Carpentieri, G., Fraternali, F. (2017). [Optimal prestress design of composite cable-stayed bridges](#). *Composite Structures*, 169:167–172.
- [8] Zhang, Z., Li, W., Ding, Z., Wu, X. (2020). [An approach to the selection of target reliability index of Cable-stayed bridge's main girder based on optimal structural parameter ratio from cost-benefit analysis](#). *Structures*, 28:2221–2231.
- [9] Guo, J., Guan, Z. (2023). [Optimization of the cable forces of completed cable-stayed bridges with differential evolution method](#). *Structures*, 47:1416–1427.
- [10] Alkhalwaldeh, A. A., Al-Rousan, R. (2020). [The optimum reinforced concrete deck stiffness of cable-stayed bridge decks](#). *Procedia Manufacturing*, 44:342–349.
- [11] Cid, C., Baldomir, A., Hernández, S. (2018). [Optimum crossing cable system in multi-span cable-stayed bridges](#). *Engineering Structures*, 160:342–355.
- [12] Ha, M.-H., Vu, Q.-A., Truong, V.-H. (2018). [Optimum design of stay cables of steel cable-stayed bridges using nonlinear inelastic analysis and genetic algorithm](#). *Structures*, 16:288–302.
- [13] Hùng, T. V., Hùng, H. M., Thuật, Đ. V., Phúc, H. V. (2021). [Thiết kế tối ưu dầm thép tổ hợp chữ I trong kết cấu cầu liên hợp nhịp đơn giản theo TCVN 11823:2017](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCVND) - ĐHXDHN*, 15(3V):55–68.
- [14] Hùng, T. V. Thiết kế tối ưu ròi rạc dầm thép liên hợp trong cầu dầm nhịp giản đơn. *Bản B của Tạp chí Khoa học và Công nghệ Việt Nam*, 64(1).
- [15] Mitchell, M. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms*. The MIT Press.
- [16] De Jong, K. (1975). *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*.
- [17] Holland, J. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press.
- [18] Kennedy, J., Eberhart, R. [Particle swarm optimization](#). *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, IEEE.
- [19] Eberhart, R., Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory. *Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science MHS'95*, Ieee, 39–43.
- [20] Yang, X.-S., Deb, S. (2009). [Cuckoo Search via Levy Flights](#). *2009 World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC)*, IEEE.
- [21] Camacho-Villalón, C. L., Dorigo, M., Stützle, T. (2022). [An analysis of why cuckoo search does not bring any novel ideas to optimization](#). *Computers & Operations Research*, 142:105747.
- [22] Shair, E. F. (2015). [Cuckoo search approach for cutting stock problem](#). *International Journal of Information and Electronics Engineering*, 5(2).
- [23] The MathWorks Inc. (2020). *MATLAB*. Natick, Massachusetts.