

# PHÂN TÍCH TỈNH TẮM FGM CÓ VI BỌT RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI KERR THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC NHẤT ĐƠN GIẢN

Trần Minh Tú<sup>a</sup>, Nguyễn Văn Long<sup>a,\*</sup>, Phạm Thúy Hằng<sup>a</sup>, Trần Văn Bình<sup>b</sup>, Tạ Thị Hiền<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,  
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

<sup>b</sup>*Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hà Tĩnh, xã Cẩm Vịnh, huyện Cẩm Xuyên, tỉnh Hà Tĩnh, Việt Nam*

<sup>c</sup>*Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông vận tải, 3 phố Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 27/3/2023, Sửa xong 16/5/2023, Chấp nhận đăng 18/5/2023

## Tóm tắt

Bài báo tiến hành phân tích tỉnh tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. Không giống như lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner-Mindlin, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản quan niệm độ võng gồm hai thành phần: do biến dạng uốn và do biến dạng cắt ngang gây nên, vì thế số thành phần chuyển vị giảm từ năm xuống bốn ẩn số. Ba loại tấm được xét đến gồm tấm hoàn hảo, tấm có vi bọt rỗng phân bố đều và không đều. Dựa trên nguyên lý thế năng cực tiểu, hệ phương trình cân bằng được thiết lập và giải bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier cho tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất của tấm được khảo sát qua các ví dụ số.

*Từ khoá:* phân tích tĩnh; tấm FGM; tấm FGM có vi bọt rỗng; biến dạng cắt bậc nhất đơn giản; lời giải Navier; nền đàn hồi Kerr.

STATIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES WITH POROSITIES RESTING ON KERR'S ELASTIC FOUNDATION WITHIN THE FRAMEWORK OF SIMPLE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

## Abstract

This paper conducted the static analysis of a functionally graded plate with porosities resting on Kerr's elastic foundation based on the simple first-order shear deformation theory (FSDT). Unlike the Reissner-Mindlin FSDT, the simple FSDT has been proposed based on the idea of partitioning the transverse displacements into the bending and shear components, thus the number of unknowns reduce from five to four. Three patterns of FG plates including perfect and imperfect (even and uneven porosity distribution) are considered. The equilibrium equations are derived from the minimum potential principle and then are solved by using the Navier technique for simply supported rectangular plates. The effect of material, geometric, and elastic foundation parameters on deflection and stress components is investigated through numerical examples.

*Keywords:* static analysis; FG plates; FG plates with porosities; simple first-order shear deformation theory; Navier solution; Kerr's elastic foundation.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17\(4V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(4V)-05) © 2023 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally graded material-FGM) là một loại vật liệu composite thể hệ mới, có tính chất vật liệu thay đổi trơn và liên tục từ bề mặt này sang bề mặt khác của kết cấu, do đó tránh được sự tập trung ứng suất, điều thường gặp ở vật liệu composite lớp. Vật liệu FGM điển

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [longnv@huce.edu.vn](mailto:longnv@huce.edu.vn) (Long, N. V.)

hình thường được tạo thành từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại. Đây là loại vật liệu đẳng hướng, không đồng nhất. Do kết hợp được khả năng chịu nhiệt cao của gốm, độ bền dẻo của kim loại nên FGM thường được sử dụng để chế tạo những bộ phận cơ khí, cấu kiện công trình làm việc trong môi trường nhiệt độ cao. Sự gia tăng các ứng dụng của vật liệu FGM đòi hỏi phải phát triển các mô hình và phương pháp tính phù hợp để phân tích ứng xử cơ học các kết cấu FGM. Tổng quan về các mô hình tính áp dụng cho kết cấu tấm và vỏ FGM được Thái và Kim trình bày trong [1]. Nhiều nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của kết cấu FGM đã được thực hiện và công bố bởi Reddy [2], Talha và Singh [3], Swaminathan và cs. [4], Hebbar và cs. [5], Thái và Võ [6], Chen và cs. [7], ...

Có nhiều mô hình tấm đã được sử dụng trong phân tích kết cấu tấm FGM, chúng đều xuất phát từ các lý thuyết áp dụng cho vật liệu đẳng hướng, sau đó mở rộng ứng dụng cho vật liệu composite, vật liệu FGM. Lý thuyết tấm cổ điển là lý thuyết tấm đơn giản nhất, đã được nhiều tác giả sử dụng trong phân tích tấm FGM [8–11]. Do chấp nhận giả thiết Kirchhoff nên lý thuyết này cho kết quả sai lệch nhiều với thực nghiệm cho tấm dày. Xuất phát từ thực tế này, lý thuyết tấm bậc nhất đã được phát triển bởi Reissner và Mindlin cho tấm dày và được sử dụng rộng rãi trong phân tích tấm FGM [12–14]. Do giả thiết biến dạng cắt ngang là hằng số theo tọa độ chiều dày, nên lý thuyết tấm bậc nhất không phản ánh đúng sự phân bố parabol của ứng suất tiếp theo chiều dày tấm, do vậy cần phải đưa vào hệ số hiệu chỉnh cắt. Việc xác định hệ số này là không đơn giản, do vậy các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất [15, 16]. Ngoài các lý thuyết thông dụng đã nêu trên, nhiều lý thuyết tấm đơn giản đã và đang được phát triển bởi nhiều tác giả khác, làm phong phú thêm các mô hình và phương pháp tính, phục vụ công tác tính toán, thiết kế các kết cấu FGM. Để giảm số ẩn chuyển vị xuống còn 4 ẩn so với lý thuyết biến dạng cắt thông thường (5 ẩn), ý tưởng chia độ võng thành hai thành phần uốn và cắt lần đầu tiên được đề xuất bởi Huffington [17], sau đó được phát triển bởi Murty [18], Senthilnathan và cs. [19], Shimpi [20], và gần đây được Thái và cs. [21, 22] áp dụng để tính toán cho tấm composite lớp và tấm FGM hoàn hảo. Lý thuyết bốn ẩn số chuyển vị và dạng nghiệm Navier được Van-Loi Nguyen và cs. [23] sử dụng trong phân tích tĩnh tấm FGM đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa.

Các nghiên cứu kể trên chỉ đề cập đến vật liệu FGM hoàn hảo. Tuy nhiên, trong quá trình chế tạo, trong cấu trúc vật liệu FGM thường xuất hiện các vi bọt rỗng, làm thay đổi tính chất cơ học của chúng. Vì thế cần thiết phải tìm hiểu ảnh hưởng của các vi bọt rỗng đến tính chất cơ học của chúng. Phuong và cs. [24] sử dụng mô hình dầm Timoshenko có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa để phân tích ứng xử uốn của dầm FGM có vi bọt rỗng. Merdaci và Belghoul [25] sử dụng dạng nghiệm Navier để khảo sát ứng xử uốn của tấm dày FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Rezaei và cs. [26] phân tích dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản, sử dụng dạng nghiệm Levy. Trên cơ sở lý thuyết tấm bậc nhất, Akbaş [27] sử dụng nghiệm Navier trong phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng. Benferhat và cs. [28] phân tích tĩnh tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị, sử dụng nghiệm Navier cho liên kết khớp trên chu vi. Dhuria và cs. [29] khảo sát ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến ứng xử tĩnh và ổn định của tấm FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với hàm chuyển vị dạng hyperbol. Yin và cs. [30] phân tích uốn và dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết đàn hồi 3D và phương pháp phần tử biên. Demirhan và Taskin [31] phân tích ứng xử uốn và dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng, sử dụng dạng nghiệm Levy và lý thuyết tấm bốn ẩn chuyển vị. Tran và cs. [32] phân tích dao động tự do biên độ lớn của tấm sandwich FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết tấm bậc nhất.

Trong thực tế kết cấu tấm thường đặt trên nền đàn hồi, cho nên các nghiên cứu về ứng xử cơ học của tấm FGM đặt trên các mô hình nền đàn hồi khác nhau là hướng nghiên cứu được nhiều người

quan tâm. Trong kỹ thuật, ba mô hình nền thông dụng thường được sử dụng là Winkler, Pasternak và Kerr. Mô hình nền Winkler là đơn giản nhất đặc trưng bởi một hệ số nền (hệ số độ cứng uốn), khi đó nền được giả thiết là môi trường đàn hồi tuyến tính với một hệ các lò xo đàn hồi độc lập, đặt sát cạnh nhau, phản lực của nền tại mỗi điểm tỷ lệ thuận với độ lún của nền tại điểm đó. Với mô hình nền Pasternak, ngoài hệ số độ cứng uốn, ảnh hưởng của biến dạng trượt đã được kể đến thông qua hệ số độ cứng trượt. Vào những năm 60 của thế kỷ 19, Archibald Merriman Kerr [33] đã đề xuất một mô hình với ba hệ số nền, ngoài hai hệ số nền của nền Pasternak còn có thêm một hệ số nền thứ ba đặc trưng cho độ cứng lớp lò xo phía trên lớp chịu cắt. Zenkour [34] sử dụng dạng nghiệm Navier và lý thuyết tấm biến dạng cắt với dạng hàm sin để phân tích tĩnh tấm FGM đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Van và cs. [35] sử dụng phương pháp không lưới và lý thuyết tựa đàn hồi (quasi-3D) để phân tích tĩnh và dao động riêng tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Huang và cs. [36] sử dụng lý thuyết đàn hồi 3D và phương pháp không gian trạng thái để phân tích ứng xử uốn của tấm FGM dày, đặt trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak. Benyoucef [37] tính toán độ võng và các thành phần ứng suất của tấm dày FGM chịu tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng phân bố hình sin đặt trên nền đàn hồi Winkler- Pasternak theo lý thuyết chuyển vị dạng hàm hyperbol. Kumar và Harsha [38] phân tích tĩnh của tấm sandwich có lớp lõi bằng vật liệu FGM có vi bọt rỗng và lớp bề mặt bằng vật liệu áp điện đặt trên nền đàn hồi Winkler/ Pasternak/ Kerr dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-điện theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Shahsavari [39] sử dụng lý thuyết tấm tựa đàn hồi 3D (quasi-3D) với hàm chuyển vị dạng hypebol trong phân tích dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr.

Từ các phân tích trên, có thể thấy rằng các nghiên cứu về ứng xử tĩnh của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi ba hệ số nền (Kerr foundation) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản còn chưa được đề cập đến. Nền đàn hồi ba hệ số nền được Kerr đề xuất, khi tổng quát hóa mô hình nền Pasternak bằng cách thêm vào một lớp lò xo phía trên lớp chịu cắt. Mô hình này được cho là sử dụng đơn giản và phản ánh sát thực tế hơn ứng xử của nền lên kết cấu công trình. Bài báo này sẽ tiến hành tính toán độ võng và các thành phần ứng suất, sử dụng dạng nghiệm Navier cho tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr, liên kết khớp trên chu vi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải và chương trình tính, các khảo sát số sẽ được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng, tỷ phần thể tích các vật liệu thành phần, kích thước hình học cũng như các tham số nền đến độ võng và các thành phần ứng suất.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Tấm FGM có vi bọt rỗng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu P-FGM có vi bọt rỗng, chịu uốn, với chiều dày  $h$ , kích thước các cạnh  $a \times b$ , chịu tải trọng vuông góc với bề mặt tấm. Tấm đặt trên nền đàn hồi Kerr (xem Hình 1) với ba hệ số nền lần lượt là:  $K_1$  là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi trên;  $K_2$  là hệ số độ cứng cắt lớp giữa;  $K_3$  là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi dưới.

Vật liệu P-FGM gồm hai vật liệu thành phần: ceramic và kim loại. Mô đun đàn hồi của ba mô hình vật liệu được khảo sát biểu diễn bởi:

- Vật liệu FGM hoàn hảo (không có vi bọt rỗng: FGM-1):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m \quad (1)$$

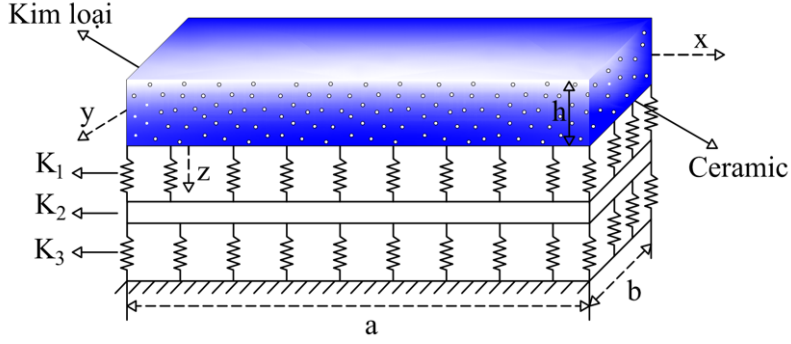
- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố đều (FGM-2):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{e_0}{2} (E_c + E_m) \quad (2)$$

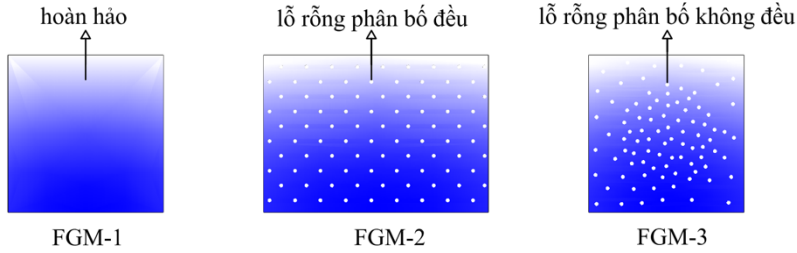
- Vật liệu FGM có vi bọt rỗng phân bố không đều (FGM-3):

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{e_0}{2} (E_c + E_m) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (3)$$

trong đó  $p \geq 0$ : chỉ số tỷ lệ thể tích;  $0 \leq e_0 \ll 1$ : hệ số rỗng.



(a) Tấm chữ nhật FGM đặt trên nền đàn hồi Kerr



(b) Ba dạng phân bố của vật liệu FGM

Hình 1. Mô hình tấm FGM với ba dạng phân bố của vật liệu trên nền đàn hồi Kerr

Để đơn giản, hệ số Poisson được giả thiết là hằng số theo chiều dày tấm [40].

## 2.2. Trường chuyển vị

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất chấp nhận giả thiết Reissner-Mindlin, trường chuyển vị được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y); & v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y); \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó:  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của tấm theo các phương  $x, y, z$ ;  $\varphi_x, \varphi_y$  là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục  $y, x$ . Để giảm số ẩn chuyển vị, tiết kiệm thời gian tính toán, thành phần độ võng  $w$  được đề xuất phân tích thành hai thành phần: thành phần do biến dạng uốn và thành phần do biến dạng cắt gây nên ( $w = w_b + w_s$ ) với giả thiết  $\varphi_x = -\frac{\partial w_b}{\partial x}$  và  $\varphi_y = -\frac{\partial w_b}{\partial y}$ . Từ đây trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản được viết dưới dạng [21]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\frac{\partial w_b}{\partial x}; & v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\frac{\partial w_b}{\partial y}; \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

Rõ ràng, trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản chỉ chứa bốn ẩn số  $u_0, v_0, w_b, w_s$ .

### 2.3. Trường biến dạng

Các thành phần biến dạng màng gồm:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Các thành phần biến dạng cắt ngang:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

### 2.4. Trường ứng suất

Quan hệ ứng suất - biến dạng có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} + z [C] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó  $C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \mu^2}$ ;  $C_{12} = C_{21} = \frac{\mu E(z)}{1 - \mu^2}$ ;  $C_{66} = C_{55} = C_{44} = \frac{E(z)}{2(1 + \mu)}$ .

### 2.5. Các thành phần nội lực

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm ta được các thành phần nội lực trong tấm FGM:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz; & (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz; \\ (Q_x, Q_y) &= k \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó  $k$  là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Thay quan hệ (8) vào biểu thức (9) ta được:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

với:  $(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = (A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} (1, z, z^2) dz$ ;  $(A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \mu (A, B, D)$ ;  $(A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \frac{1-\mu}{2} (A, B, D)$ ;  $A_{44} = A_{55} = A^s = k \int_{-h/2}^{h/2} C_{55} dz$ .

## 2.6. Hệ phương trình chủ đạo

Sử dụng nguyên lý thế năng cực tiểu, hệ phương trình cân bằng cho tấm FGM có vi bọt rỗng nhận được dưới dạng sau [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - f_e &= 0; & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - f_e &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Phản lực nền  $f_e$ , theo mô hình nền đàn hồi của Kerr [41] đề xuất biểu diễn bởi:

$$f_e = \left( \frac{K_1 K_3}{K_1 + K_3} \right) (w_b + w_s) - \left( \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_3} \right) \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (12)$$

trong đó  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  là toán tử Laplace trong hệ tọa độ Cartesian cho bài toán 2 chiều.

Bằng cách thế các phương trình (6), (7) và (10) vào (11), hệ phương trình chủ đạo biểu diễn theo các thành phần chuyển vị  $u_0, v_0, w_b, w_s$  được viết như sau:

$$\begin{aligned} A \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial x} &= 0; \\ A \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - B \nabla^2 \frac{\partial w_b}{\partial y} &= 0; \\ B \nabla^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - D \nabla^4 w_b + q - f_e &= 0; & A^s \nabla^2 w_s + q - f_e &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

## 3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tám chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến, điều kiện biên thể hiện dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x = 0, a: N_x = v_0 = w_b = w_s = M_x &= 0 \\ \text{Tại } y = 0, b: N_y = u_0 = w_b = w_s = M_y &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (14):

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y; & v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y; \\ w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0bmn} \sin \alpha x \sin \beta y; & w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0smn} \sin \alpha x \sin \beta y; \end{aligned} \quad (15)$$

trong đó  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0bmn}, w_{0smn}$  là các hệ số cần được xác định và  $\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b}$ .

Tải trọng  $q(x, y)$  cũng có thể được khai triển theo chuỗi lượng giác kép:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \quad (16)$$

Khi tải trọng phân bố đều,  $q = q_0$ :

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (17)$$

Thế biểu thức (15) và (16) vào (13), ta được nhận được hệ phương trình đại số:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0bmn} \\ w_{0smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix}; \quad \forall m, n \quad (18)$$

trong đó các hệ số  $s_{ij}$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned} s_{11} &= A\alpha^2 + \frac{1-\mu}{2}A\beta^2; & s_{12} &= \frac{1+\mu}{2}A\alpha\beta; & s_{13} &= -B\alpha(\alpha^2 + \beta^2); \\ s_{22} &= \frac{1-\mu}{2}A\alpha^2 + A\beta^2; & s_{23} &= -B\beta(\alpha^2 + \beta^2); \\ s_{33} &= D(\alpha^2 + \beta^2)^2; & s_{44} &= A^s(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình (18) ta nhận được các hệ số  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0bmn}, w_{0smn}$ , từ đó xác định được các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực tương ứng.

#### 4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, trước tiên các ví dụ kiểm chứng được thực hiện cho: a) tấm FGM hoàn hảo (FGM-1); b) tấm FGM có vi bột rỗng (FGM-2, FGM-3). Tiếp theo đó, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất sẽ được khảo sát thông qua các ví dụ số.

Vật liệu P-FGM ( $Al/Al_2O_3$ ) với tính chất các vật liệu thành phần như sau:

Ceramic ( $Al_2O_3$ ):  $E_c = 380$  GPa;  $\mu_c = 0,3$ ;

Kim loại (Al):  $E_m = 70$  GPa;  $\mu_m = 0,3$ .

Trong tất cả các tính toán khảo sát và ví dụ kiểm chứng, giá trị của hệ số hiệu chỉnh cắt được lấy là 5/6. Các giá trị không thứ nguyên sau đây được sử dụng [21, 39]:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{10h^3 E_c}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); & \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); & \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{xy}\left(0, 0, \frac{h}{2}\right); & \bar{\sigma}_{xz} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right); & \bar{\sigma}_{yz} &= \frac{h}{aq_0} \sigma_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2}\right); \\ k_1 &= \frac{K_1 a^4}{D}; & k_2 &= \frac{K_2 a^2}{D}; & k_3 &= \frac{K_3 a^4}{D}\end{aligned}\quad (19)$$

#### 4.1. Ví dụ kiểm chứng

Độ võng và ứng suất pháp không thứ nguyên của tấm vuông FGM-1 (FGM hoàn hảo) được tính toán và thể hiện trên Bảng 1. Kết quả của bài báo được so sánh với kết quả giải tích của Zenkour [40] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt tổng quát với dạng hàm sin trong trường chuyển vị.

Bảng 1. Ứng suất và độ võng không thứ nguyên của tấm vuông FGM-1 chịu tải trọng phân bố đều ( $a/h = 10$ )

$p$	Nguồn	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
1	Zenkour [40]	0,9287	4,4745
	Bài báo	0,9288	4,4407
5	Zenkour [40]	1,4356	6,1504
	Bài báo	1,4205	6,0856

Độ võng và ứng suất pháp không thứ nguyên của tấm chữ nhật có vi bọt rỗng phân bố đều (FGM-2) được tính toán và thể hiện trên Bảng 2. Kết quả được so sánh với kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị của Benferhat và cs. [28].

Bảng 2. Ứng suất và độ võng không thứ nguyên dưới tải trọng phân bố đều của tấm chữ nhật FGM-2 ( $b = 3a, a/h = 10, p = 2$ )

$e_0$	Nguồn	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$
0,1	Benferhat và cs. [28]	4,3921	14,2925
	Bài báo	4,3834	14,1531
0,2	Benferhat và cs. [28]	5,9992	16,6660
	Bài báo	5,9749	16,4774

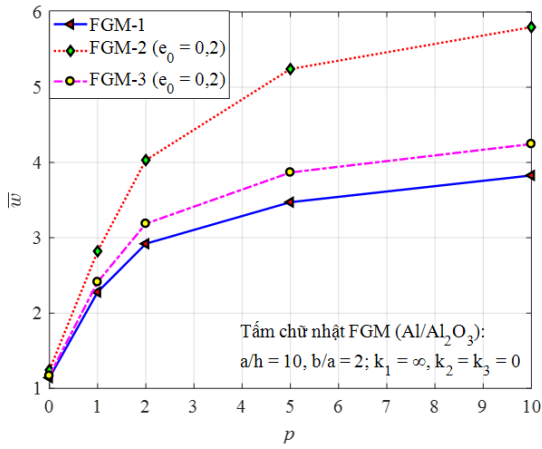
Qua 2 ví dụ kiểm chứng ở trên, có thể thấy rằng, nghiệm giải tích thu được theo mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản trong bài báo là có độ tin cậy.

#### 4.2. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học và nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất

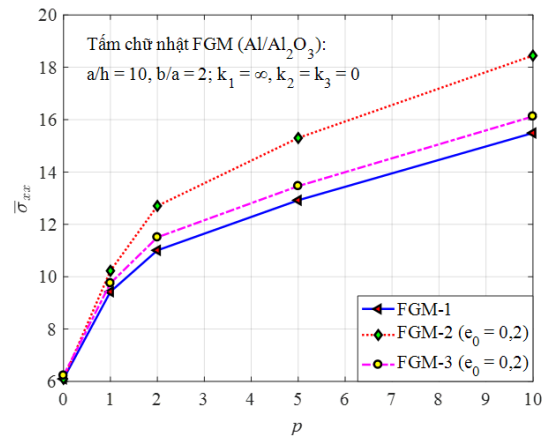
##### a. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích $p$

Xét tấm chữ nhật FGM với  $b/a = 2; a/h = 10$  không đặt trên nền đàn hồi. Độ võng và các thành phần ứng suất với các chỉ số tỷ lệ thể tích khác nhau  $p$  của ba loại tấm FGM-1, FGM-2 và FGM-3 thể hiện trong Bảng 3 và biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 2.

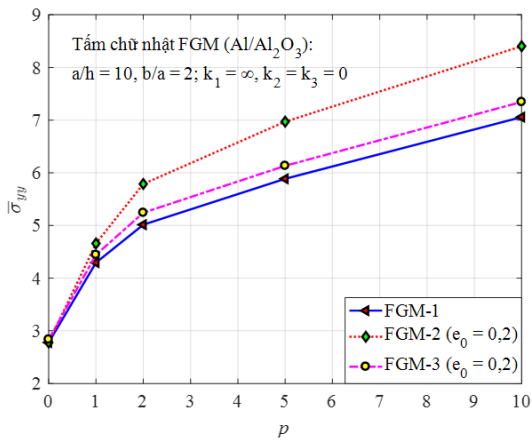
Từ các kết quả nhận được cho thấy với cả 3 mô hình vật liệu FGM được xem xét, khi chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  tăng, hàm lượng kim loại tăng, đồng thời hàm lượng ceramic giảm, làm cho độ cứng của



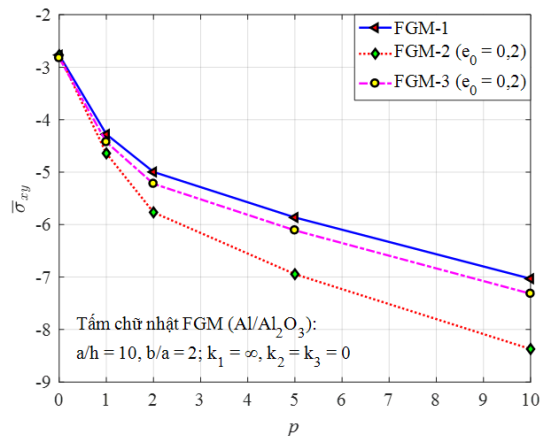
(a) Biến thiên của độ võng  $\bar{w}$



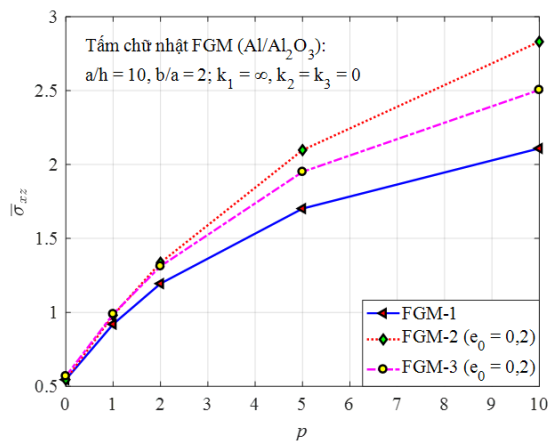
(b) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xx}$



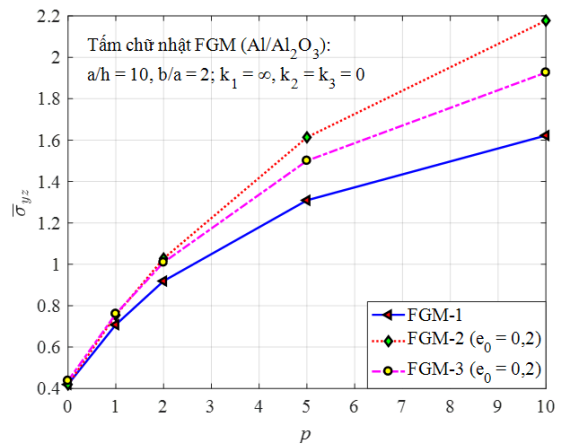
(c) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{yy}$



(d) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xy}$



(e) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xz}$



(f) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{yz}$

Hình 2. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của các tấm FGM-1, FGM-2, FGM-3 biến thiên theo chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$

tấm giảm. Điều này dẫn đến độ võng tăng đối với cả 3 loại vật liệu FGM. Các thành phần ứng suất cũng có quy luật biến thiên tương tự độ võng, khi tăng  $p$ , trị số của chúng cũng tăng theo.

Sự có mặt của vi bọt rỗng làm cho độ cứng của tấm giảm, chính vì vậy mà độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm hoàn hảo (FGM-1) là bé nhất. Với tấm FGM có vi bọt rỗng thì phân bố lỗ rỗng đều FGM-2 có độ võng và ứng suất lớn hơn tấm có vi bọt rỗng phân bố không đều (FGM-3).

Bảng 3. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm chữ nhật FGM-1, FGM-2, FGM-3 với các chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  khác nhau

$p$	Tấm	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
1	FGM-1	2,2790	9,4278	4,2951	-4,2791	0,9205	0,7080
	FGM-2	2,8216	10,2273	4,6593	-4,6419	0,9805	0,7541
	FGM-3	2,4121	9,7547	4,4440	-4,4274	0,9886	0,7603
5	FGM-1	3,4736	12,9202	5,8861	-5,8641	1,7023	1,3092
	FGM-2	5,2430	15,300	6,9703	-6,9443	2,0980	1,6136
	FGM-3	3,8686	13,4616	6,1328	-6,1099	1,9508	1,5004
10	FGM-1	3,8292	15,4903	7,0570	-7,0307	2,1095	1,6224
	FGM-2	5,7996	18,4452	8,4031	-8,3718	2,8314	2,1776
	FGM-3	4,2463	16,1222	7,3449	-7,3175	2,5050	1,9265

b. Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số kích thước  $a/h, b/a$

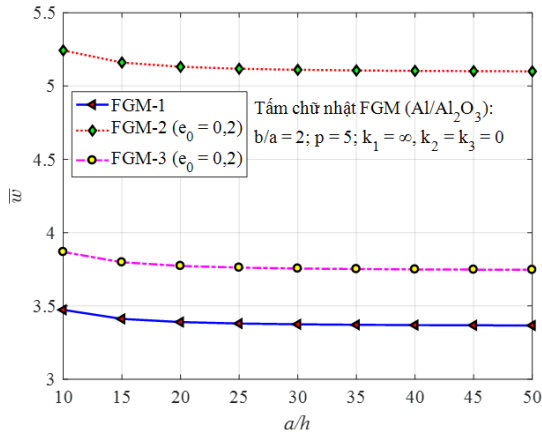
Xét tấm chữ nhật FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) với  $b/a = 2, p = 5$  không đặt trên nền đàn hồi. Độ võng và các thành phần ứng suất với các tỷ số  $a/h$  khác nhau của ba loại tấm FGM-1 ( $e = 0$ ); FGM-2 và FGM-3 ( $e = 0,2$ ) thể hiện trong Bảng 4 và biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 3.

Bảng 4. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm FGM với sự thay đổi tỷ số  $a/h$  ( $b/a = 2, p = 5$ )

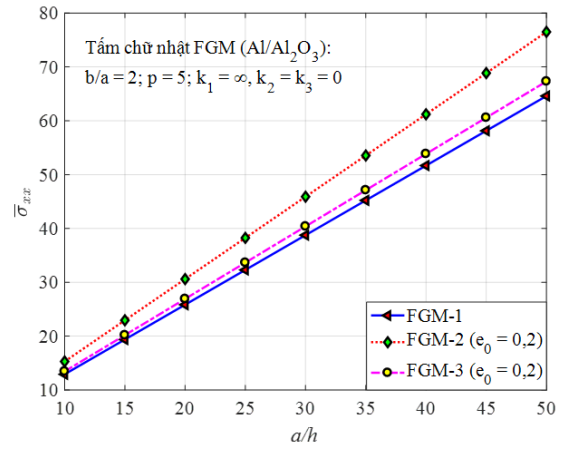
$a/h$	Tấm	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
10	FGM-1	3,4736	12,9202	5,8861	-5,8641	1,7023	1,3092
	FGM-2	5,2430	15,3000	6,9703	-6,9443	2,0980	1,6136
	FGM-3	3,8686	13,4616	6,1328	-6,1099	1,9508	1,5004
20	FGM-1	3,3904	25,8403	11,7722	-11,7283	1,7023	1,3092
	FGM-2	5,1313	30,5999	13,9405	-13,8885	2,0980	1,6136
	FGM-3	3,7732	26,9232	12,2655	-12,2198	1,9508	1,5004
50	FGM-1	3,3671	64,6008	29,4304	-29,3207	1,7023	1,3092
	FGM-2	5,1001	76,4998	34,8513	-34,7213	2,0980	1,6136
	FGM-3	3,7465	67,3081	30,6638	-30,5495	1,9508	1,5004

Độ võng và các thành phần ứng suất của tấm FGM ( $a/h = 10; p = 5$ ), không đặt trên nền đàn hồi với các tỷ số  $b/a$  khác nhau của ba loại tấm FGM-1 ( $e = 0$ ); FGM-2 và FGM-3 ( $e = 0,2$ ) thể hiện qua Bảng 5 và đồ thị trên Hình 4.

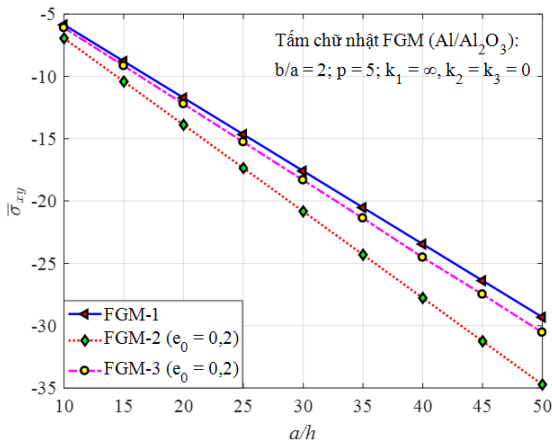
Kết quả trên Bảng 4 và Hình 3 phản ánh đúng góc nhìn kỹ thuật về ứng xử cơ học của tấm, khi tấm càng mỏng (tỷ số  $a/h$  lớn), với cả ba loại tấm FGM thì độ võng tại tâm của tấm càng giảm, trị số của các ứng suất màng tăng, trong khi ứng suất cắt ngang không thay đổi.



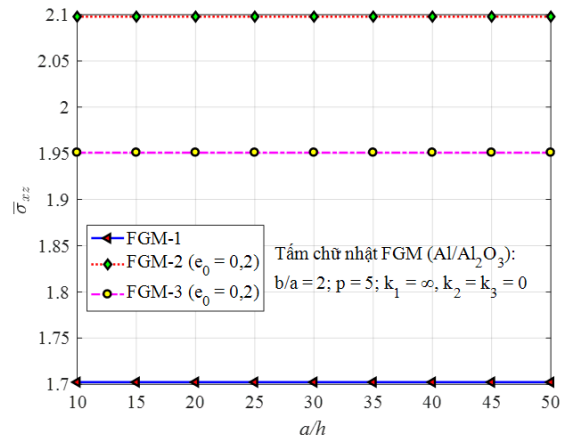
(a) Biến thiên của độ võng  $\bar{w}$



(b) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xx}$



(c) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{yy}$

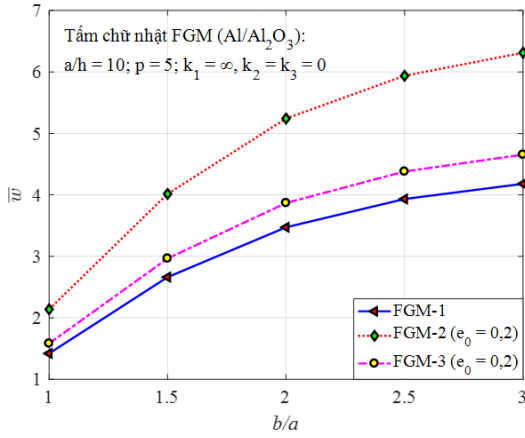


(d) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xz}$

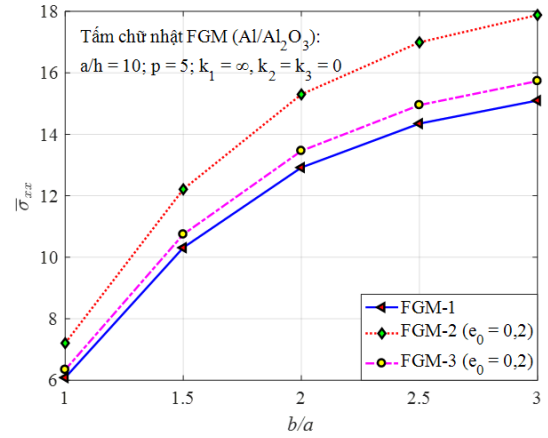
Hình 3. Các giá trị không thứ nguyên  $\bar{w}$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\sigma}_{yy}$ ,  $\bar{\sigma}_{xz}$  của tấm FGM-1, FGM-2, FGM-3 biến thiên theo tỷ số  $a/h$

Bảng 5. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm FGM-1, FGM-2, FGM-3 theo tỷ số  $b/a$  ( $a/h = 10$ ,  $p = 5$ )

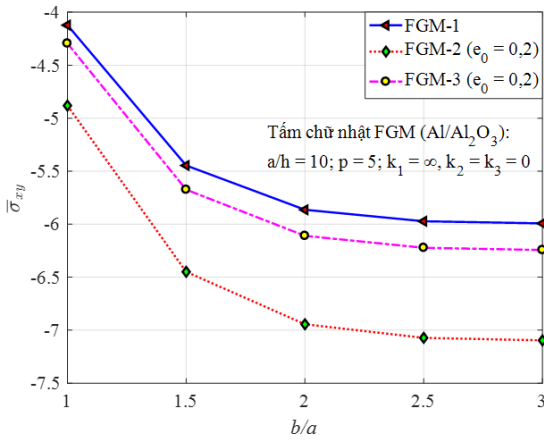
$b/a$	Tấm	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
1	FGM-1	1,4205	6,0843	6,0843	-4,1222	1,2266	1,2266
	FGM-2	2,1394	7,2050	7,2050	-4,8814	1,5118	1,5118
	FGM-3	1,5829	6,3393	6,3393	-4,2949	1,4057	1,4057
2	FGM-1	3,4736	12,9202	5,8861	-5,8641	1,7023	1,3092
	FGM-2	5,2430	15,3000	6,9703	-6,9443	2,0980	1,6136
	FGM-3	3,8686	13,4616	6,1328	-6,1099	1,9508	1,5004
3	FGM-1	4,1807	15,1016	5,1536	-5,9926	1,8042	1,2769
	FGM-2	6,3126	17,8832	6,1029	-7,0963	2,2236	1,5737
	FGM-3	4,6556	15,7345	5,3696	-6,2437	2,0677	1,4633



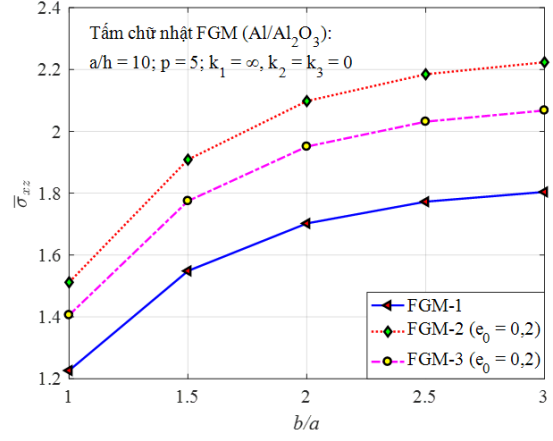
(a) Biến thiên của độ võng  $\bar{w}$



(b) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xx}$



(c) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xy}$



(d) Biến thiên của ứng suất  $\bar{\sigma}_{xz}$

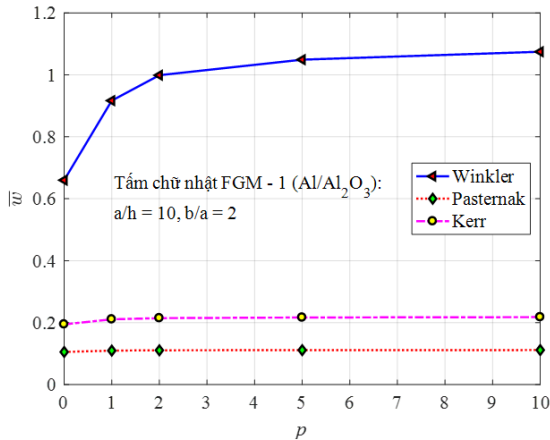
Hình 4. Các giá trị không thứ nguyên  $\bar{w}$ ,  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\sigma}_{xy}$ ,  $\bar{\sigma}_{xz}$  của tấm FGM-1, FGM-2, FGM-3 biến thiên theo tỷ số  $b/a$

Từ các kết quả nhận được trên Bảng 5 và Hình 4, ta thấy rằng khi tỷ số  $b/a$  càng lớn thì độ cứng của tấm giảm làm cho độ võng  $\bar{w}$  và các ứng suất  $\bar{\sigma}_{xx}$ ,  $\bar{\sigma}_{xy}$ ,  $\bar{\sigma}_{xz}$  tăng dần.

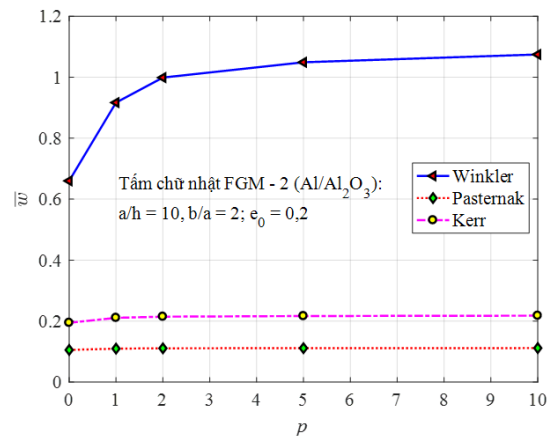
### c. Ảnh hưởng của các mô hình nền

Xét tấm chữ nhật FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) với  $a/h = 10$ ,  $b/a = 2$ ,  $p = 5$ , đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr tương ứng với các cặp tham số nền  $\bar{k}_2 = 0$ ,  $\bar{k}_3 = 100$ ;  $\bar{k}_2 = 100$ ,  $\bar{k}_3 = 100$ ;  $\bar{k}_1 = 100$ ,  $\bar{k}_2 = 100$ ,  $\bar{k}_3 = 100$ . Lưu ý rằng, phản lực nền  $f_e$ , theo mô hình nền đàn hồi của Winkler/Pasternak  $f_e = K_3(w_b + w_s) - K_2\nabla^2(w_b + w_s)$ . Độ võng và các thành phần ứng suất của tấm với các hệ số nền của ba loại tấm FGM-1, FGM-2 và FGM-3 đặt trên các loại nền khác nhau được thể hiện bằng các đồ thị trên Hình 5.

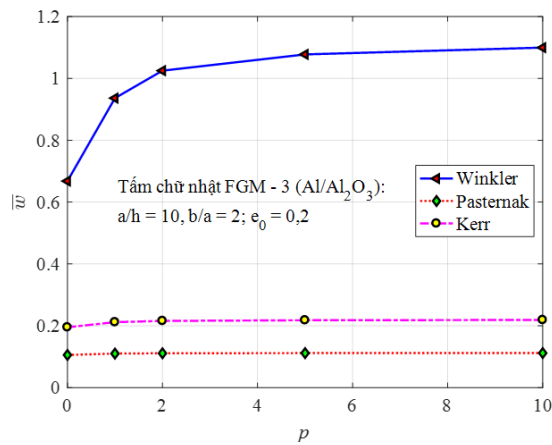
Từ đồ thị trên Hình 5 ta thấy rằng, theo chiều tăng chỉ số tỷ lệ thể tích thì độ võng của các tấm đặt trên cả ba loại nền đều tăng dần. Nền Winkler có độ võng lớn nhất, nền Pasternak có độ võng nhỏ nhất; tấm FGM đặt trên nền Kerr có độ võng lớn hơn đặt trên nền Pasternak và nhỏ hơn đặt trên nền Winkler.



(a) Tấm FGM-1



(b) Tấm FGM-2



(c) Tấm FGM-3

Hình 5. Độ võng lớn nhất không thứ nguyên  $\bar{w}$  biến thiên theo các giá trị  $p$  khác nhau với từng loại nền của tấm FGM-1, FGM-2, FGM-3

## 5. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản để phân tích tĩnh tấm FGM có và không có vi bọt rỗng. Kết quả tính toán cho độ võng và các thành phần ứng suất màng cho sai số không đáng kể so với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cho thấy hiệu quả của việc sử dụng lý thuyết này đã làm giảm được số ẩn chuyển vị so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner-Mindlin tuy vẫn phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt trong tính toán. Sự có mặt của vi bọt rỗng làm giảm đáng kể độ cứng của tấm, tấm FGM có vi bọt rỗng phân bố đều có độ cứng bé hơn tấm có vi bọt rỗng phân bố không đều. Thêm vào đó tấm đặt trên nền đàn hồi Kerr sẽ có độ võng lớn hơn so với trường hợp tấm trên nền đàn hồi Pasternak.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 128:70–86.
- [2] Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):663–684.

- [3] Talha, M., Singh, B. N. (2010). [Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory](#). *Applied Mathematical Modelling*, 34(12):3991–4011.
- [4] Swaminathan, K., Naveenkumar, D. T., Zenkour, A. M., Carrera, E. (2015). [Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review](#). *Composite Structures*, 120:10–31.
- [5] Hebbar, N., Hebbar, I., Ouinas, D., Bourada, M. (2020). [Numerical modeling of bending, buckling, and vibration of functionally graded beams by using a higher-order shear deformation theory](#). *Frattura ed Integrità Strutturale*, 14(52):230–246.
- [6] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). [Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1):57–66.
- [7] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2015). [Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam](#). *Composite Structures*, 133:54–61.
- [8] Abrate, S. (2008). [Functionally graded plates behave like homogeneous plates](#). *Composites Part B: Engineering*, 39(1):151–158.
- [9] Cheng, Z. Q., Batra, R. C. (2000). Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. *Archives of Mechanics*, 52(1):143–158.
- [10] Apuzzo, A., Barretta, R., Luciano, R. (2015). [Some analytical solutions of functionally graded Kirchhoff plates](#). *Composites Part B: Engineering*, 68:266–269.
- [11] Reddy, J. N., Wang, C. M., Kitipornchai, S. (1999). [Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates](#). *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 18(2):185–199.
- [12] Croce, L. D., Venini, P. (2004). [Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9–11):705–725.
- [13] Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M., Atashipour, S. R. (2011). [A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(1):11–22.
- [14] Hosseini-Hashemi, S., Bedroud, M., Nazemnezhad, R. (2013). [An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity](#). *Composite Structures*, 103:108–118.
- [15] Mantari, J. L., Oktem, A. S., Soares, C. G. (2012). [Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 94(2):714–723.
- [16] Javaheri, R., Eslami, M. R. (2002). [Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory](#). *Journal of Thermal Stresses*, 25(7):603–625.
- [17] Huffington, N. J. (1963). [Response of elastic columns to axial pulse loading](#). *AIAA Journal*, 1(9): 2099–2104.
- [18] Murty, A. V. K. (1987). [Flexure of composite plates](#). *Composite Structures*, 7(3):161–177.
- [19] Senthilnathan, N. R., Lim, S. P., Lee, K. H., Chow, S. T. (1987). [Buckling of shear-deformable plates](#). *AIAA Journal*, 25(9):1268–1271.
- [20] Shimpi, R. P. (2002). [Refined plate theory and its variants](#). *AIAA Journal*, 40(1):137–146.
- [21] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). [A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 101:332–340.
- [22] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). [A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates](#). *Composite Structures*, 106:754–763.
- [23] Nguyen, V. L., Tran, M. T., Nguyen, V. L., Le, Q. H. (2021). Static behaviour of functionally graded plates resting on elastic foundations using neutral surface concept. *Archive of Mechanical Engineering*, 5–22.
- [24] Phuong, N. T. B., Tú, T. M., Phuong, H. T., Long, N. V. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(1):33–45.
- [25] Merdaci, S., Belghoul, H. (2019). [High-order shear theory for static analysis of functionally graded plates with porosities](#). *Comptes Rendus Mécanique*, 347(3):207–217.
- [26] Rezaei, A. S., Saidi, A. R., Abrishamdari, M., Mohammadi, M. H. P. (2017). [Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: An analytical approach](#). *Thin-Walled Structures*, 120:366–377.

- [27] Akbaş, Ş. D. (2017). Vibration and static analysis of functionally graded porous plates. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3(3):199–207.
- [28] Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L., Said Mansour, M. (2016). [Static analysis of the FGM plate with porosities](#). *Steel and Composite Structures*, 21(1):123–136.
- [29] Dhuria, M., Grover, N., Goyal, K. (2021). [Influence of porosity distribution on static and buckling responses of porous functionally graded plates](#). *Structures*, 34:1458–1474.
- [30] Yin, Z., Gao, H., Lin, G. (2021). [Bending and free vibration analysis of functionally graded plates made of porous materials according to a novel the semi-analytical method](#). *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 133:185–199.
- [31] Demirhan, P. A., Taskin, V. (2019). [Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach](#). *Composites Part B: Engineering*, 160:661–676.
- [32] Quoc, T. H., Huan, D. T., Hien, H. T. (2021). [Large Amplitude Free Vibration Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates with Porosity](#). *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, Springer Singapore, 287–300.
- [33] Kerr, A. D. (1965). [A study of a new foundation model](#). *Acta Mechanica*, 1(2):135–147.
- [34] Zenkour, A. M. (2009). [The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11-12):869–880.
- [35] Van, V. T., Tai, N. H. T., Hung, N. N. (2021). [Static bending and free vibration analysis of functionally graded porous plates laid on elastic foundation using the meshless method](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 15(2):141–159.
- [36] Huang, Z. Y., Lü, C. F., Chen, W. Q. (2008). [Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations](#). *Composite Structures*, 85(2):95–104.
- [37] Benyoucef, S., Mechab, I., Tounsi, A., Fekrar, A., Atmane, H. A., Bedia, E. A. A. (2010). [Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations](#). *Mechanics of Composite Materials*, 46(4):425–434.
- [38] Kumar, P., Harsha, S. P. (2022). [Static analysis of porous core functionally graded piezoelectric \(PCFGP\) sandwich plate resting on the Winkler/Pasternak/Kerr foundation under thermo-electric effect](#). *Materials Today Communications*, 32:103929.
- [39] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). [A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation](#). *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.
- [40] Zenkour, A. M. (2006). [Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates](#). *Applied Mathematical Modelling*, 30(1):67–84.
- [41] Li, M., Guedes Soares, C., Yan, R. (2021). [Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT](#). *Composite Structures*, 264:113643.