Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2023, 17 (2V): 42–60

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG KẾT CẤU TẤM SANDWICH AUXETIC ÁP ĐIỆN CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Đặng Xuân Hùng[a], Vũ Văn Thẩm[a,*], Trần Hữu Quốc[a], Sengduane Phommavongsa[a]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 01/03/2023, Sửa xong 28/03/2023, Chấp nhận đăng 03/4/2023

Tóm tắt

Bài báo phân tích dao động riêng của tấm sandwich với lớp lõi là vật liệu có hệ số Poisson âm (auxetic), hai lớp bề mặt là vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên. Các phương trình cân bằng của tấm sandwich chữ nhật bốn biên tựa khớp được thiết lập trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị và nguyên lý Hamilton. Sự biến đổi của điện thế theo phương chiều dày lớp áp điện được giả thiết tuân theo quy luật hàm bậc nhất. Nghiệm giải tích cho bài toán được xây dựng bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier. Độ tin cậy của mô hình và chương trình tính được kiểm chứng qua các ví dụ so sánh kết quả tính với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số thực hiện nhằm đánh giá sự ảnh hưởng của các thuộc tính vật liệu, kích thước hình học và hiệu ứng áp điện đến tần số dao động của tấm sandwich auxetic áp điện có cơ tính biến thiên.

Từ khoá: dao động tự do; tấm sandwich; vật liệu auxetic; vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên; lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF SANDWICH PLATE WITH AUXETIC HONEYCOMB CORE AND FUNCTIONALLY GRADED PIEZOELECTRIC FACE SHEETS

Abstract

The article analyzes the free vibration of sandwich plates with honeycomb auxetic core and face sheets of functionally graded piezoelectric material. Based on the high-order shear deformation with four-variable refined plate theory, the motion equations of the simply supported rectangular sandwich plate are derived by using Hamilton's principle. The variation of electric potential in the thickness direction of the piezoelectric layer is assumed to follow a linear function. The analytical solution is constructed by using the Navier's solution. The reliability of the model is verified by comparing with the published results. Numerical investigations are conducted to assess the effects of material properties, geometrical dimensions, and piezoelectric boundary condition on the vibration frequency of the piezoelectric auxetic sandwich plates.

Keywords: free vibration; sandwich plate; negative Poisson's ratio; functionally graded piezoelectric; four-variable plate theory.

https://doi.org/10.31814/stce.huce2023-17(2V)-04

1. Giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên FGM (Functionally Graded Material) là loại vật liệu composite thế hệ mới được cấu tạo từ hai hoặc nhiều hơn các loại vật liệu khác nhau. Do có cơ tính biến đổi trơn và liên tục theo một phương ưu tiên nên FGM tránh được sự tập trung ứng suất và không xảy ra sự bong tách lớp [1]. Vật liệu áp điện (piezoelectric) là loại vật liệu có khả năng thay đổi hình dạng, kích thước

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* thamvv@huce.edu.vn (Thẩm, V. V.)

dưới tác động của điện trường hoặc tự sinh ra điện trường khi bị biến dạng [2]. Gốm áp điện có độ cứng cao, có hiệu ứng kích thích mạnh và có khả năng tương tác với các hệ thống động ở dải tần số rộng từ khoảng 1 Hz đến MHz [3]. Tuy nhiên, do bản chất giòn của gốm khiến chúng dễ bị hư hỏng trong quá trình liên kết, cũng như khó phù hợp với kết cấu có bề mặt cong. Mặt khác, vật liệu áp điện theo kiểu polymer được sản xuất phổ biến, ví dụ như polyvinylidene fluoride (PVDF), nhưng lại có hiệu ứng kích thích yếu. Lấy ý tưởng từ vật liệu FGM, vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên (FGPie) ra đời sẽ vừa mang đặc tính của vật liệu áp điện lại có các khả năng ưu việt của vật liệu FGM. Thời gian gần đây đã có nhiều nghiên cứu về phân tích tĩnh và dao động riêng của kết cấu tấm áp điện. Wu và cs. [4] đã phân tích tĩnh kết cấu vỏ hai độ cong làm bằng vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên theo lý thuyết bậc cao. Kết quả thu được cho thấy, cả hai trạng thái cảm biến và kích thích, vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên tỏ ra vượt trội hơn so với vật liệu áp điện đồng chất đẳng hướng. Sedighi và Shakeri [5] đã tính toán và phân tích độ võng, ứng suất của vỏ panel trụ FGPie chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt theo lý thuyết đàn hồi ba chiều. Askari Farsangi và Saidi [6] đã xây dựng giải tích, phương pháp nghiệm Levy để phân tích dao động tự do tấm FGM có gắn các lớp áp điện tại bề mặt. Behjat và cs. [7] đã phân tích uốn, dao động tự do và phản ứng động của tấm FGPie bằng phương pháp phần tử hữu hạn dưới tác động của tải cơ, nhiệt và điện khác nhau sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT).

Một số loại vật liệu tiên tiến hiện nay có thể kể đến như vật liệu composite, vật liệu FGM, vật liệu rỗng, vật liệu áp điện. Về cơ bản, những vật liệu này đều có hệ số Poisson dương, nghĩa là vật liệu có chiều ngang bị co lại khi chịu kéo và nở ra khi chịu nén. Khác với các loại vật liệu kể trên, một loại vật liệu tiên tiến có hệ số Poisson âm với tên thường gọi là vật liệu auxetic [8] đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực do sở hữu những đặc tính ưu việt như siêu nhẹ, tỷ lệ độ cứng trên trọng lượng cao, cách âm, cách nhiệt và khả năng hấp thụ năng lượng vượt trội [9]. Vì vậy, thời gian gần đây, vật liệu auxetic đã được rất nhiều nhà khoa học trên thế giới đặc biệt quan tâm nghiên cứu. Wan và cs. [10] đã nghiên cứu hệ số Poisson âm trong tổ ong auxetic dựa trên mô hình biến dạng lớn. Zhang và cs. [11] đã nghiên cứu thực nghiệm về tính chất nhiệt động - cơ học và tác động của sợi auxetic xoắn ốc. Whitty và cs. [12] đã trình bày các đặc tính cơ và nhiệt của cả vật liệu tổ ong truyền thống và tổ ong auxetic dựa trên mô hình phần tử hữu hạn. Tran Huu Quoc [13] và cs. đã phân tích dao động và đáp ứng chuyển vị theo thời gian của tấm sandwich với lớp lõi auxetic, lớp bề mặt là vật liệu đẳng hướng bằng phương pháp phần tử hữu hạn trơn (smoothed finite element).

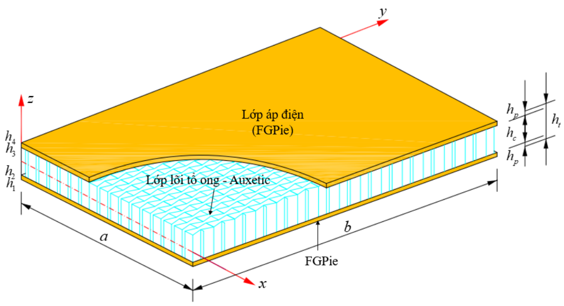
Kết cấu sandwich là một trong những kết cấu nhẹ, được lựa chọn cho mục đích giảm ồn, cách nhiệt hay chịu tải trọng va chạm. Do đặc tính hấp thụ năng lượng, lớp lõi của tấm sandwich thường sử dụng các loại vật liệu xốp và nhẹ, chủ yếu chịu lực cắt. Trong khi lớp bề mặt chịu tải trọng uốn là chủ yếu nên thường sử dụng các loại vật liệu có độ bền dẻo và độ cứng cao. Với đặc điểm cấu tạo như vậy, kết cấu sandwich với lớp lõi auxetic đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của đông đảo các nhà khoa học. Wang và cs. [14] đã nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm để phân tích đáp ứng động của tấm sandwich lõi dạng tổ ong kim loại không đối xứng về mặt hình học dưới tác dụng của tải trọng nổ. Qi và cs. [15] đã nghiên cứu tác động và ứng xử của tấm sandwich có lõi tổ ong auxetic khi chịu tải trọng nổ gần. Trung và cs. [16] đã phân tích đáp ứng động của tấm composite sandwich với lõi tổ ong auxetic đặt trên nền đàn hồi và chịu dạng tải trọng di động. Đáp ứng động phi tuyến của tấm sandwich áp điện không hoàn hảo được đánh giá bởi Quan và cs. trong nghiên cứu [17]. Có thể nói đây là một trong số rất ít các nghiên cứu đã công bố ở thời điểm hiện tại cho đối tượng là kết cấu tấm sandwich Auxetic áp điện.

Qua các nghiên cứu kể trên và đánh giá tổng quan của nhóm tác giả, hiện chưa thấy nghiên cứu nào cho bài toán phân tích dao động riêng của kết cấu tấm sandwich lõi tổ ong auxetic, lớp bề mặt là vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên (A-FGPie). Có nhiều phương pháp tiếp cận để giải quyết bài toán này như phương pháp giải tích, phương pháp số hoặc phương pháp bán giải tích. Phương pháp số hoặc bán giải tích có lợi thế là giải quyết được những bài toán với đối tượng kết cấu có hình dạng phức tạp hoặc điều kiện biên khác nhau. Phương pháp giải tích mặc dù chỉ giải quyết những bài toán đặc thù nhưng phương pháp này vẫn là một trong những lựa chọn tin cậy do có thể dự đoán được quy luật ứng xử cũng như có thể kiểm soát được kết quả trên toàn miền kết cấu. Kết quả của lời giải giải tích sử dụng dạng nghiệm Navier là cơ sở tốt để kiểm chứng độ chính xác của các phương pháp số. Trong bài báo này, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn cải tiến được sử dụng để phân tích dao động riêng kết cấu tấm sandwich A-FGPie. So sánh kết quả của bài báo với các kết quả đã công bố cho thấy độ tin cậy của mô hình đề xuất. Từ đó, bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu, kích thước hình học và hiệu ứng áp điện đến tần số dao động riêng của tấm A-FGPie.

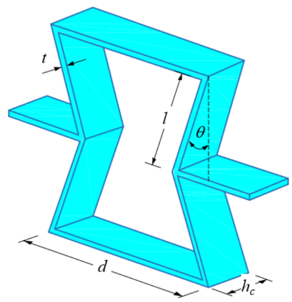
2. Mô hình tấm sandwich auxetic áp điện có cơ tính biến thiên

2.1. Mô hình tấm

Xét tấm sandwich với lớp lõi tổ ong auxetic có hệ số Poisson âm, hai lớp bề mặt là vật liệu áp điện (A-FGPie). Tấm sandwich A-FGPie có kích thước $a \times b \times h$ như thể hiện trên Hình 1(a).



(a) Tấm sandwich



(b) Cấu trúc đơn vị của lõi tổ ong lục giác

Hình 1. Tấm sandwich lõi auxetic, bề mặt áp điện có cơ tính biến thiên

2.2. Lớp lõi tổ ong Auxetic

Thông số kích thước hình học của một ô đơn vị lớp lõi tổ ong auxetic được thể hiện trong Hình 1(b). Các tính chất hiệu dụng được tính theo (1).

$$
\begin{aligned}
&E_1^C = E\frac{\eta_3^3(\eta_1-\sin\theta)}{\cos^3\theta\left[1+(\tan^2\theta+\eta_1\sec^2\theta)\eta_3^2\right]}; \quad G_{12}^C = E\frac{\eta_3^3}{\eta_1\cos\theta(1+2\eta_1)}\\
&E_2^C = E\frac{\eta_3^3}{\cos\theta(\eta_1-\sin\theta)\left(\tan^2\theta+\eta_3^2\right)}; \quad G_{23}^C = G\frac{\eta_3\cos\theta}{\eta_1-\sin\theta}\\
&G_{13}^C = G\frac{\eta_3}{2\cos\theta}\left[\frac{\eta_1-\sin\theta}{1+2\eta_1}+\frac{\eta_1+2\sin^2\theta}{2(\eta_1-\sin\theta)}\right]; \quad \rho^C = \rho\frac{\eta_3(\eta_1+2)}{2\cos\theta(\eta_1-\sin\theta)}\\
&\nu_{12}^C = -\frac{\sin\theta\left[1-\eta_3^2\right](\eta_1-\sin\theta)}{\cos^2\theta\left[1+(\tan^2\theta+\eta_1\sec^2\theta)\eta_3^2\right]}; \quad \nu_{21}^C = -\frac{\sin\theta\left[1-\eta_3^2\right]}{\left[\tan^2\theta+\eta_3^2\right](\eta_1-\sin\theta)}\\
&\eta_1 = \frac{d}{l}; \quad \eta_3 = \frac{t}{l}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

trong đó l, d, θ, t là chiều dài cạnh nghiêng, cạnh nằm ngang, góc nghiêng và chiều dày mỗi phần tử đặc trưng [16].

2.3. Lớp bề mặt FGPie

Đối với vật liệu FGPie hai thành phần tạo thành từ sự kết hợp của hai loại vật liệu áp điện khác nhau. Các đặc trưng cơ học vật liệu giả thiết biến đổi theo quy luật hàm lũy thừa như sau:

$$\begin{aligned} C(z) &= C_t + (C_b - C_t)\, V_c(z) \\ e(z) &= e_t + (e_b - e_t)\, V_c(z) \\ \kappa(z) &= \kappa_t + (\kappa_b - \kappa_t)\, V_c(z) \\ \rho(z) &= \rho_t + (\rho_b - \rho_t)\, V_c(z) \end{aligned} \tag{2}$$

trong đó $C(z), e(z), \kappa(z), \rho(z)$ và $\rho(z)$ lần lượt chỉ độ cứng, hệ số ứng suất áp điện, hằng số điện môi và khối lượng riêng. Các chỉ số t và b lần lượt tương ứng với vật liệu ở bề mặt phía trên và phía dưới tấm. Hàm tỷ lệ thể tích thành phần gốm $V_c(z)$ được tính theo (3).

$$V_c(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{z - h_4}{h_3 - h_4}\right)^p & z \in [h_3, h_4] \quad \text{Lớp áp điện phía trên} \\ 0 & z \in [h_2, h_3] \quad \text{Lớp lõi Auxetic} \\ \left(\dfrac{z - h_1}{h_2 - h_1}\right)^p & z \in [h_1, h_2] \quad \text{Lớp áp điện phía dưới} \end{cases} \tag{3}$$

trong đó p là chỉ số tỷ lệ thể tích $(0 \leq p \leq \infty)$; h_1, h_2, h_3, h_4 là tọa độ các lớp vật liệu, được xác định theo Hình 1.

3. Phương trình cơ bản

Để phân tích dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie, bài báo sử dụng lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến (HSDT-4).

3.1. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ thuộc tấm sandwich A-FGPie được giả thiết theo lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến [18–21]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b(x,y,t)}{\partial x} - f(z)\,\frac{\partial w_s(x,y,t)}{\partial x} \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b(x,y,t)}{\partial y} - f(z)\,\frac{\partial w_s(x,y,t)}{\partial y} \\ w(x,y,z,t) &= w_b(x,y,t) + w_s(x,y,t) \end{aligned} \tag{4}$$

trong đó w_b và w_s là các thành phần độ võng do mômen uốn và do lực cắt gây ra; $f(z)$ là hàm đặc trưng cho quy luật biến thiên của ứng suất cắt ngang theo chiều dày tấm. Theo [21] hàm $f(z) = z\left(-1/8 + 3/2(z/h_t)^2\right)$ thỏa mãn điều kiện triệt tiêu ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới tấm.

3.2. Trường biến dạng

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ 0\\ 0\end{array}\right\}+z\left\{\begin{array}{c}\kappa_x^b\\ \kappa_y^b\\ \kappa_{xy}^b\\ 0\\ 0\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}f(z)\kappa_x^s\\ f(z)\kappa_y^s\\ f(z)\kappa_{xy}^s\\ g(z)\gamma_{yz}^s\\ g(z)\gamma_{xz}^s\end{array}\right\} \tag{5}$$

trong đó

$$\begin{array}{l}\varepsilon_x^0=\dfrac{\partial u_0}{\partial x};\quad \varepsilon_y^0=\dfrac{\partial v_0}{\partial y};\quad \gamma_{xy}^0=\dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x};\quad \kappa_x^b=-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x^2};\quad \kappa_y^b=-\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}\\ g(z)=\left[1-f'(z)\right];\quad \kappa_x^s=-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2};\quad \kappa_y^s=-\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2};\quad \kappa_{xy}^b=-2\dfrac{\partial^2 w_b}{\partial x\partial y}\\ \kappa_{xy}^s=-2\dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x\partial y};\quad \gamma_{xz}^s=\dfrac{\partial w_s}{\partial x};\quad \gamma_{yz}^s=\dfrac{\partial w_s}{\partial y}\end{array} \tag{6}$$

3.3. Sự biến đổi điện thế và điện trường trong lớp áp điện

Các kết quả thu được khi phân tích kết cấu tấm làm từ vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên đã chỉ ra rằng đồ thị biến đổi của điện thế theo chiều dày biến thiên theo đường parabol hoặc tuyến tính [5, 22, 23]. Do vậy một số nghiên cứu trước đây đã giả định sự biến đổi của điện thế theo chiều dày của lớp áp điện tuân theo quy luật bậc nhất [24–26] hoặc bậc hai [6, 27, 28]. Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả sử dụng dạng hàm bậc nhất cho sự biến thiên của điện thế theo phương chiều dày [24].

$$\begin{cases}\Phi^t(x,y,z,t)=\left(z-\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{1}{h_p}\phi^t(x,y,t) & h/2\le z\le h/2+h_p\\ \Phi^b(x,y,z,t)=-\left(z+\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{1}{h_p}\phi^b(x,y,t) & -h/2-h_p\le z\le -h/2\end{cases} \tag{7}$$

trong đó $\Phi^t\,(x,y,z,t)$ và $\Phi^b\,(x,y,z,t)$ lần lượt là điện thế tại điểm bất kỳ trong lớp áp điện ở mặt trên và lớp áp điện ở mặt dưới; $\phi^t\,(x,y,t)$ và $\phi^b\,(x,y,t)$ lần lượt là điện thế tại mặt trung bình lớp áp điện ở mặt trên và lớp áp điện ở mặt dưới; h_c là chiều dày lớp lõi; h_p là chiều dày của mỗi lớp áp điện.

Khi đó, điện trường trong lớp áp điện phía trên (E_t) và phía dưới (E_b) được tính như sau:

$$\begin{array}{l}E_x^t=-\dfrac{\partial\Phi^t}{\partial x}=-\dfrac{2z-h_c}{2h_p}\phi_{,x}^t;\quad E_y^t=-\dfrac{\partial\Phi^t}{\partial y}=-\dfrac{2z-h_c}{2h_p}\phi_{,y}^t;\\ E_z^t=-\dfrac{\partial\Phi^t}{\partial z}=-\dfrac{1}{h_p}\phi^t;\quad E_x^b=-\dfrac{\partial\Phi^b}{\partial x}=-\dfrac{2z+h_c}{2h_p}\phi_{,x}^b;\\ E_y^b=-\dfrac{\partial\Phi^b}{\partial y}=-\dfrac{2z+h_c}{2h_p}\phi_{,y}^b;\quad E_z^b=-\dfrac{\partial\Phi^b}{\partial z}=-\dfrac{1}{h_p}\phi^b\end{array} \tag{8}$$

3.4. Trường ứng suất

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của lớp lõi tổ ong Auxetic tuân theo định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(C)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^C & Q_{12}^C & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}^C & Q_{22}^C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

trong đó $\sigma_x^C, \sigma_y^C, \sigma_{xy}^C$ và τ_{xz}^C, τ_{yz}^C lần lượt là các ứng suất pháp, ứng suất cắt trong mặt phẳng và ứng suất cắt ngang; Q_{ij}^C với $(i, j = 1,2,3,4,5,6)$ là các hệ số độ cứng được xác định theo:

$$\begin{aligned} &Q_{11}^C = \frac{E_1^C}{1-\nu_{12}^C\nu_{21}^C}; \quad Q_{22}^C = \frac{E_2^C}{1-\nu_{12}^C\nu_{21}^C}; \quad Q_{12}^C = \frac{\nu_{12}E_2^C}{1-\nu_{12}^C\nu_{21}^C} \\ &Q_{44}^C = Q_{55}^C = Q_{66}^C = \frac{E_1^C}{2\left(1+\nu_{12}^C\right)} \end{aligned} \tag{10}$$

Với mỗi lớp áp điện thứ k $(k = t, b)$, quan hệ ứng suất - biến dạng trong hệ trục tọa độ (x, y, z) được biểu diễn [6, 29, 30]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{15} & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{11}$$

trong đó e_{ij} là hệ số ứng suất áp điện $(i, j = 1,2,3,4,5)$ và E_χ là điện trường theo phương χ $(\chi = x,\ y,\ z)$. Điện tích xuất hiện trong lớp áp điện thứ "k" biểu diễn theo biến dạng và điện trường [6]:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{15} \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{12}$$

trong (11) và (12), $\left[\bar{C}_{ij}\right]$ là ma trận các hằng số đàn hồi của lớp áp điện, $\left[e_{ij}\right]$ là ma trận các hệ số ứng suất áp điện, $\left[p_{ij}\right]$ là ma trận các hệ số điện môi, $\{E\}$ là véc tơ cường độ điện trường, $\{D\}$ là véc tơ chuyển dịch điện tích trong lớp áp điện.

Các hệ số trong (11) và (12) cho lớp áp điện được xác định theo [6]:

$$\begin{aligned} &\bar{C}_{11} = \bar{C}_{22} = C_{11} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}; \quad \bar{C}_{12} = C_{12} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}; \quad \bar{C}_{44} = \bar{C}_{55} = C_{55} \\ &\bar{C}_{66} = \frac{1}{2}\left(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}\right); \quad \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33}; \quad \bar{p}_{33} = p_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}} \end{aligned} \tag{13}$$

3.5. Phương trình chuyển động

Thế năng biến dạng đàn hồi của tấm:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_{xy}\gamma_{xy} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} - D_xE_x - D_yE_y - D_zE_z\right)dV \tag{14}$$

Thay thế (6) vào (14) và thực hiện tích phân theo chiều dày tấm, ta được:

$$U = \frac{1}{2}\int_A \left(\begin{array}{l} N_x\varepsilon_x^0 + N_y\varepsilon_y^0 + N_{xy}\gamma_{xy}^0 + M_x^b\kappa_x^b + M_y^b\kappa_y^b + M_{xy}^b\kappa_{xy}^b + M_x^s\kappa_x^s + M_y^s\kappa_y^s + M_{xy}^s\kappa_{xy}^s \\ +Q_{yz}\gamma_{yz}^s + Q_{xz}\gamma_{xz}^s - \hat{D}_x^t\dfrac{\partial\phi^t}{\partial x} - \hat{D}_y^t\dfrac{\partial\phi^t}{\partial y} - \hat{D}_z^t\phi^t - \hat{D}_x^b\dfrac{\partial\phi^b}{\partial x} - \hat{D}_y^b\dfrac{\partial\phi^b}{\partial y} - \hat{D}_z^b\phi^b \end{array}\right)dA \tag{15}$$

trong đó N_i, M_i^b, M_i^s, Q_j $(i = x, y, xy; j = yz, xz)$ là các thành phần lực màng, lực cắt, mô men được xác định theo (16):

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^p \\ N_y^p \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{pb} \\ M_y^{pb} \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_x^{ps} \\ M_y^{ps} \\ 0 \end{Bmatrix} \\
\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{yz}^p \\ Q_{xz}^p \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

với:

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{Bmatrix} N_x^p \\ N_y^p \\ N_{xy}^p \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^{pb} \\ M_y^{pb} \\ M_{xy}^{pb} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^{ps} \\ M_y^{ps} \\ M_{xy}^{ps} \end{Bmatrix}\right\} = \left\{\begin{Bmatrix} A_{pie}^t\phi^t + A_{pie}^b\phi^b \\ A_{pie}^t\phi^t + A_{pie}^b\phi^b \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} B_{pie}^{bt}\phi^t + B_{pie}^{bb}\phi^b \\ B_{pie}^{bt}\phi^t + B_{pie}^{bb}\phi^b \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} B_{pie}^{st}\phi^t + B_{pie}^{sb}\phi^b \\ B_{pie}^{st}\phi^t + B_{pie}^{sb}\phi^b \\ 0 \end{Bmatrix}\right\} \\
&\begin{Bmatrix} Q_{xz}^p \\ Q_{yz}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{pie}^{st}\phi_{,x}^t + A_{pie}^{sb}\phi_{,x}^b \\ A_{pie}^{st}\phi_{,y}^t + A_{pie}^{sb}\phi_{,y}^b \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = &\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2} (1, z^2, zf(z), f^2(z))\bar{C}_{ij}dz \\
&+ \int_{-h_c/2}^{h_c/2} (1, z^2, zf(z), f^2(z))Q_{ij}(z)dz \\
&+ \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p} (1, z^2, zf(z), f^2(z))\bar{C}_{ij}dz; \quad i, j = 1, 2, 3, 6
\end{aligned} \tag{18}$$

$$A_{ij}^{s}=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}(g(z))^2\bar{C}_{ij}dz+\int_{-h_c/2}^{h_c/2}(g(z))^2(Q_{ij}(z))_k dz+\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}(g(z))^2\bar{C}_{ij}dz;\quad i,j=4,5$$

$$(A_{pie}^{t},B_{pie}^{bt},B_{pie}^{st})=-\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\left(\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p},\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p}z,\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p}f(z)\right)dz$$

$$(A_{pie}^{b},B_{pie}^{bb},B_{pie}^{sb})=-\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}\left(\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p},\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p}z,\bar{e}_{31}\frac{1}{h_p}f(z)\right)dz$$

$$A_{pie}^{st}=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\left(e_{15}\frac{2z-h}{2h_p}\right)g(z)dz;\quad A_{pie}^{sb}=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}\left(e_{15}\frac{2z+h}{2h_p}\right)g(z)dz$$

Các chuyển dịch điện tích $\hat{D}_i^j$ $(i=x,y,z;\ j=b,t)$ của lớp áp điện j theo phương thứ i trong hệ tọa độ tấm được tính theo:

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_x^t=P_1^t\gamma_{xz}^s+P_2^t\phi_{,x}^t;\quad \hat{D}_x^b=P_1^b\gamma_{xz}^s+P_2^b\phi_{,x}^b\\
&\hat{D}_y^t=P_1^t\gamma_{yz}^s+P_2^t\phi_{,y}^t;\quad \hat{D}_y^b=P_1^b\gamma_{yz}^s+P_2^b\phi_{,y}^b\\
&\hat{D}_z^t=P_3^t\left(\varepsilon_x^0+\varepsilon_y^0\right)+P_4^t\left(\kappa_x^b+\kappa_y^b\right)+P_5^t\left(\kappa_x^s+\kappa_y^s\right)+P_6^t\phi^t\\
&\hat{D}_z^b=P_3^b\left(\varepsilon_x^0+\varepsilon_y^0\right)+P_4^b\left(\kappa_x^b+\kappa_y^b\right)+P_5^b\left(\kappa_x^s+\kappa_y^s\right)+P_6^b\phi^b
\end{aligned}\tag{19}$$

Các hệ số P_{ij}:

$$\begin{aligned}
&P_1^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\left(\frac{2z-h_c}{2h_p}\right)e_{15}g(z)dz;\quad P_2^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}-\left(\frac{2z-h_c}{2h_p}\right)^2p_{11}dz\\
&P_1^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}\left(\frac{2z+h_c}{2h_p}\right)e_{15}g(z)dz;\quad P_2^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}-\left(\frac{2z+h_c}{2h_p}\right)^2p_{11}dz\\
&P_3^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}dz;\quad P_4^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}zdz;\quad P_5^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}f(z)dz\\
&P_6^t=\int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p}-\left(\frac{1}{h_p}\right)^2\bar{p}_{33}dz;P_3^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h/2}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}dz;\quad P_4^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}zdz\\
&P_5^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}\frac{1}{h_p}\bar{e}_{31}f(z)dz;\quad P_6^b=\int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2}-\left(\frac{1}{h_p}\right)^2\bar{p}_{33}dz
\end{aligned}\tag{20}$$

Động năng của tấm:

$$T=\frac{1}{2}\int_V\rho(z)\left((\dot{u})^2+(\dot{v})^2+(\dot{w})^2\right)dxdydz\tag{21}$$

trong đó $\rho(z)$ là khối lượng riêng; $(\dot{u},\dot{v},\dot{w})$ là các thành phần vận tốc theo các phương (x,y,z).

Thay thế phương trình (4) vào phương trình (21), động năng của tấm có thể được viết lại thành:

$$\begin{aligned}
T=\frac{1}{2}\int_A\Bigg\{&I_0\left[(\dot{u}_0)^2+(\dot{v}_0)^2+(\dot{w}_b+\dot{w}_s)^2\right]-2I_1\left(\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}+\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\right)-2I_2\left(\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}+\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\right)\\
&+2I_3\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}+\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\right)+I_4\left[\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\dot{w}_b}{\partial y}\right)^2\right]+I_5\left[\left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\dot{w}_s}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}dxdy
\end{aligned}\tag{22}$$

trong đó các mô men quán tính $I_0, I_1, \ldots, I_5$ được xác định như sau:

$$
\begin{aligned}
(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = & \int_{-h_c/2-h_p}^{-h_c/2} \rho_{pie}^{t}(z)\left(1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2\right) dz \\
& + \int_{-h_c/2}^{h_c/2} \rho_c(z)\left(1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2\right) dz \\
& + \int_{h_c/2}^{h_c/2+h_p} \rho_{pie}^{b}(z)\left(1, z, f(z), zf(z), z^2, f(z)^2\right) dz
\end{aligned}
\tag{23}
$$

với: $\rho_c, \rho_{pie}^t, \rho_{pie}^b$ lần lượt là khối lượng riêng của lớp lõi auxetic, lớp vật liệu áp điện phía trên và lớp áp điện phía dưới.

Hệ phương trình chuyển động theo lý thuyết HSDST-4 thu được bằng cách sử dụng nguyên lý Hamilton [31]:

$$
\int_0^t (\delta U - \delta T) dt = 0 \tag{24}
$$

trong đó δU, δT là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi và biến phân động năng; t là thời gian.

Thay thế các biểu thức (15) và (22) vào (24), sau đó tích phân từng phần, nhóm các hệ số của các biến phân chuyển vị $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta\phi^t, \delta\phi^b$ với nhau; hệ phương trình chuyển động thu được có dạng:

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
&\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
&\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}}{\partial y}\right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - I_4 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
&\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} = I_0(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_3\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}\right) - I_4 \nabla^2 \ddot{w}_b - I_5 \nabla^2 \ddot{w}_s \\
&\delta\phi^t : \frac{\partial \hat{D}_x^t}{\partial x} + \frac{\partial \hat{D}_y^t}{\partial y} + \hat{D}_z^t = 0 \\
&\delta\phi^b : \frac{\partial \hat{D}_x^b}{\partial x} + \frac{\partial \hat{D}_y^b}{\partial y} + \hat{D}_z^b = 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

trong đó: $\nabla^2 = \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y^2}$ là toán tử Laplace trong hệ tọa độ Cartesian cho bài toán toán 2 chiều.

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực qua biến dạng (16), (17) vào (25), ta được hệ phương trình chuyển động theo chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị:

$$
\begin{aligned}
&\delta u_0 : A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - A^t_{pie}\frac{\partial \phi^t}{\partial x} - A^b_{pie}\frac{\partial \phi^b}{\partial x} = I_0\ddot{u} - I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_3\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \\
&\delta v_0 : A_{11}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - A^t_{pie}\frac{\partial \phi^t}{\partial y} - A^b_{pie}\frac{\partial \phi^b}{\partial y} = I_0\ddot{v} - I_1\frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_3\frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \\
&\delta w_b : D^b_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2\left(D^b_{12}+2D^b_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D^b_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + D^s_{11}\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2\left(D^s_{12}+2D^s_{66}\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
&\qquad + D^s_{22}\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - B^{bt}_{pie}\nabla^2\phi^t - B^{bb}_{pie}\nabla^2\phi^b = I_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s) + I_1\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}}{\partial y}\right) - I_2\nabla^2\ddot{w}_b - I_4\nabla^2\ddot{w}_s \\
&\delta w_s : D^s_{11}\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2\left(D^s_{12}+2D^s_{66}\right)\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D^s_{22}\frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + H^s_{11}\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + 2\left(H^s_{12}+2H^s_{66}\right)\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
&\qquad + H^s_{22}\frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - A^s_{55}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - A^s_{44}\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \left(B^{st}_{pie} - A^{st}_{pie}\right)\nabla^2\phi^t - \left(B^{sb}_{pie} - A^{sb}_{pie}\right)\nabla^2\phi^b = I_0(\ddot{w}_b+\ddot{w}_s) \\
&\qquad + I_3\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}\right) - I_4\nabla^2\ddot{w}_b - I_5\nabla^2\ddot{w}_s \\
&\delta\phi^t : P^t_3\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - P^t_4\nabla^2 w_b + (P^t_1 - P^t_5)\nabla^2 w_s + P^t_2\nabla^2\phi^t + P^t_6\phi^t = 0 \\
&\delta\phi^b : P^b_3\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - P^b_4\nabla^2 w_b + (P^b_1 - P^b_5)\nabla^2 w_s + P^b_2\nabla^2\phi^b + P^b_6\phi^b = 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

4. Lời giải giải tích – nghiệm Navier

4.1. Điều kiện biên

Xét tấm sandwich A-FGPie hình chữ nhật, bốn biên tựa khớp (SSSS). Điều kiện biên cho tấm SSSS như sau:

$$
\begin{aligned}
&v_0 = w_b = w_s = 0; \quad N_x = M^b_x = M^s_x = \phi^t = \phi^b = 0 \qquad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = a \\
&u_0 = w_b = w_s = 0; \quad N_{yy} = M^b_{yy} = M^s_{yy} = \phi^t = \phi^b = 0 \qquad \text{tại } y = 0 \text{ và } y = b
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Các thành phần chuyển vị tại mặt trung bình của tấm (u_0, v_0, w_b, w_s, ϕ^t, ϕ^b) được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên tựa bản lề bốn cạnh:

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}e^{i\omega t}\cos\alpha x\sin\beta y; \quad v_0(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}e^{i\omega t}\sin\alpha x\cos\beta y \\
&w_b(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn}e^{i\omega t}\sin\alpha x\sin\beta y; \quad w_s(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{smn}e^{i\omega t}\sin\alpha x\sin\beta y \\
&\phi^t(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \phi^t{}_{mn}e^{i\omega t}\sin\alpha x\sin\beta y; \quad \phi^b(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \phi^b{}_{mn}e^{i\omega t}\sin\alpha x\sin\beta y
\end{aligned}
\tag{28}
$$

trong đó $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$, ω là tần số dao động riêng (rad/s) và

$\{d_{mn}\} = \left\{u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}, \phi^t_{mn}, \phi^b_{mn}\right\}^T$ là các hệ số cần xác định.

Thay (28) vào (26) và thực hiện biến đổi toán học thu được phương trình để giải, biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{bmn} \\ w_{smn} \\ \phi_{mn}^t \\ \phi_{mn}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{29}$$

trong đó, các hệ số ma trận độ cứng $[K]_{6\times 6}$ và ma trận khối lượng $[M]_{6\times 6}$ được trình bày trong Phụ lục. Hệ phương trình (29) có thể viết lại dưới dạng:

$$\left([K] - \omega_{mn}^2 [M]\right)\{d_{mn}\} = \{0\} \tag{30}$$

với ma trận độ cứng $[K]$ được biểu diễn như sau:

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \tag{31}$$

với: $[K_{uu}]$ là ma trận độ cứng cơ học của tấm; $\left[K_{u\phi}\right]$ là ma trận độ cứng tương tác cơ – điện; $\left[K_{\phi\phi}\right]$ là ma trận độ cứng điện; $\left[K_{\phi u}\right] = \left[K_{u\phi}\right]^T$ là ma trận độ cứng tương tác điện – cơ.

$$[K_{uu}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}; \quad \left[K_{u\phi}\right] = \begin{bmatrix} k_{15} & k_{16} \\ k_{25} & k_{26} \\ k_{35} & k_{36} \\ k_{45} & k_{46} \end{bmatrix}; \quad \left[K_{u\phi}\right] = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \tag{32}$$

Xem xét hiệu ứng áp điện với hai trạng thái mạch là mạch đóng (closed-circuit) và mạch mở (open-circuit). Trường hợp mạch đóng dịch chuyển điện tích trong các lớp áp điện bằng không, khi đó ma trận độ cứng trong (29) chỉ là ma trận độ cứng cơ học của tấm:

$$K = [K_{uu}] \tag{33}$$

Điều kiện để phương trình (29) có nghiệm chuyển vị không tầm thường là:

$$\det\left([K] - \omega_{mn}^2 [M]\right) = 0 \tag{34}$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng này là ω_{mn}^2, từ đó suy ra ω_{mn}; với mỗi giá trị đặc trưng ta tìm được một mode (dạng) dao động riêng; tần số góc dao động riêng cơ bản được xác định bởi: $\omega = \min\{\omega_{mn}\}$.

5. Kết quả số và thảo luận

5.1. Các ví dụ kiểm chứng

Ba ví dụ so sánh được thực hiện để kiểm chứng độ chính xác của mô hình hiện tại. So sánh đầu tiên được thực hiện với tấm đơn lớp bằng vật liệu FGPie cấu thành từ hai loại vật liệu áp điện là PZT-4b

Bảng 1. Các thông số vật liệu

Thông số	PZT-4a [6]	PZT-5Ha [27]	PZT-4b [32]	PZT-5Hb [32]
C_{11} (GPa)	132,000	126,000	138,449	99,201
C_{12} (GPa)	71,000	79,100	77,371	54,016
C_{13} (GPa)	115,000	83,900	73,643	50,778
C_{33} (GPa)	73,000	117,000	114,745	86,856
C_{55} (GPa)	26,000	23,000	25,600	21,100
ρ (kg/m^3)	7500	7500	7600	7750
e_{31} (Cm^{-2})	−4,100	−6,500	−5,200	−7,209
e_{33} (Cm^{-2})	14,100	23,300	15,080	15,118
e_{15} (Cm^{-2})	10,500	17,000	12,720	12,322
e_{11} (C^{2}m^{-2}N^{-1})	$7,124\times10^{-9}$	$15,050\times10^{-9}$	$1,306\times10^{-9}$	$1,530\times10^{-9}$
e_{33} (C^{2}m^{-2}N^{-1})	$5,841\times10^{-9}$	$13,200\times10^{-9}$	$1,115\times10^{-9}$	$1,500\times10^{-9}$

Bảng 2. So sánh tần số dao động riêng không thứ nguyên $\hat{\omega} = \omega\dfrac{a^2}{h}\sqrt{\dfrac{\rho_u}{C_{11u}}}$ của tấm đơn lớp bằng vật liệu FGPie PZT-4b/PZT-5Hb ($a = b = 100h$)

	Chỉ số tỉ lệ thể tích p		
	$p = 0,2$	$p = 1$	$p = 5$
Barati và cs. [32]	6,03027	5,81787	5,66120
Bài báo	5,98948	5,82217	5,80363

[32] và PZT-5Hb [32] với các thông số vật liệu được lấy theo Bảng 1. Bảng 2 trình bày kết quả tính và so sánh tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của tấm đơn lớp bằng vật liệu FGPie với kết quả của Barati và cs. [32] dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT-4 và sự biến đổi của điện thế theo quy luật hàm cosin.

So sánh thứ 2 được thực hiện cho tấm sandwich auxetic. Bảng 3 trình bày kết quả tính và so sánh tần số dao động riêng cơ bản của tấm sandwich lõi tổ ong auxetic (E = 69 (GPa); ν = 0,33; ρ = 2700 kg/m^3), lớp bề mặt đẳng hướng (E = 69 (GPa); ν = 0,33; ρ = 2700 kg/m^3) kết quả của Thanh Trung và cs. [16] sử dụng mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. So sánh thứ ba được thực hiện với tấm sandwich áp điện.

Bảng 3. So sánh tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm sandwich với lớp bề mặt là vật liệu đẳng hướng và lớp lõi Auxetic (h = 0,1 m; $a = b = 20h$; η_3 = 0,01385)

θ	$\eta_1 = 0,5$		$\eta_1 = 1$		$\eta_1 = 2$		$\eta_1 = 4$	
	Bài báo	[16]	Bài báo	[16]	Bài báo	[16]	Bài báo	[16]
$\theta = 10$	148,627	150,087	150,087	151,609	150,622	152,165	150,856	152,407
$\theta = 35$	170,221	172,323	148,287	149,783	150,173	151,706	150,664	152,196
$\theta = 55$	156,958	158,642	141,453	142,858	149,257	150,768	150,247	151,753
$\theta = 80$	164,299	166,087	58,406	58,716	143,488	144,853	147,375	148,721

Bảng 4 trình bày kết quả tính và so sánh tần số dao động riêng không thứ nguyên của tấm sandwich lõi đẳng hướng (Al_2O_3: E = 380 (GPa); ν = 0,3; ρ = 3800 kg/m^3), bề mặt áp điện PZT-4a [6] với kết quả giải tích của Farsangi và Saidi [6] sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất.

Bảng 4. So sánh tần số dao động riêng f (Hz) của tấm sandwich với lớp lõi đẳng hướng Al_2O_3, lớp bề mặt là vật liệu áp điện (h = 0,05 m; $a = b = 20h$)

Lý thuyết	Mạch	$h_p/h = 0{,}1$			$h_p/h = 0{,}2$		
		$f_{(1,1)}$ (n = 1, m = 1)	$f_{(1,2)}$ (n = 1, m = 2)	$f_{(2,2)}$ (n = 2, m = 2)	$f_{(1,1)}$ (n = 1, m = 1)	$f_{(1,2)}$ (n = 1, m = 2)	$f_{(2,2)}$ (n = 2, m = 2)
FSDT [6]	Closed	426,662	1049,356	1652,929	408,475	1001,133	1572,036
	Open	433,747	1066,390	1679,191	421,983	1033,381	1621,445
Bài báo	Closed	427,134	1052,193	1659,797	409,002	1004,602	1580,511
	Open	434,275	1069,553	1686,848	422,647	1037,628	1631,776

Kết quả tính toán trong các Bảng 2, Bảng 3, Bảng 4 cho thấy sự sai khác giữa kết quả bài báo với kết quả đã công bố là nhỏ, điều này khẳng định độ tin cậy của mô hình và chương trình tính mà nhóm tác giả đã thiết lập. Trên cơ sở đó, các ví dụ khảo sát được thực hiện để đánh giá sự ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, các kích thước hình học, hiệu ứng áp điện (trạng thái mạch) đến tần số dao động riêng của tấm sandwich auxetic áp điện có cơ tính biến thiên.

5.2. Các ví dụ khảo sát

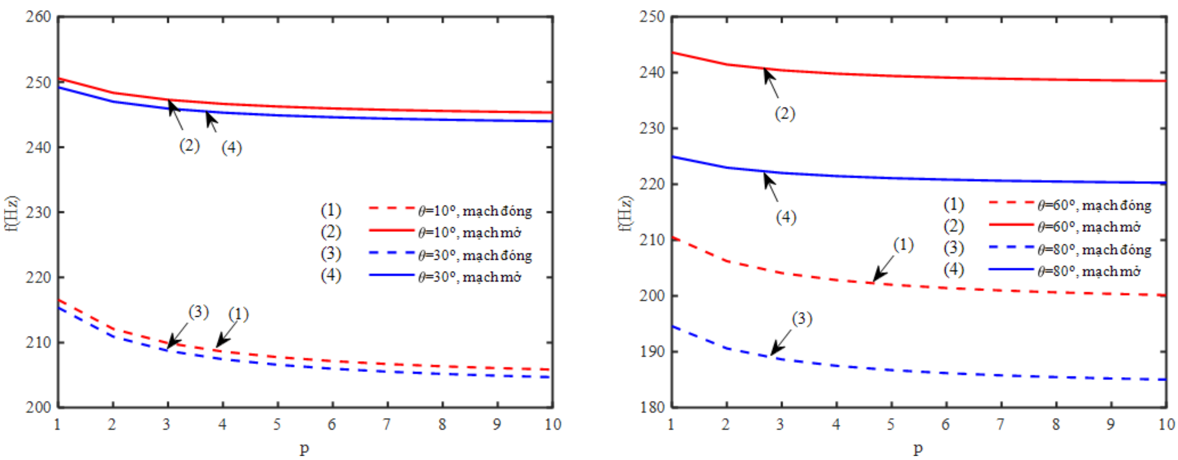
Trong mục này, bài báo trình bày ví dụ khảo sát tính tần số dao động riêng của tấm sandwich hình chữ nhật kích thước $a \times b \times h$ với lớp lõi tổ ong auxetic, hai lớp bề mặt là vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên. Các thông số vật liệu của lớp auxetic [16] (E = 69 (GPa); ν = 0,33; ρ = 2700 kg/m^3) và vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên PZT-5Ha/PZT-4a lấy theo Bảng 1.

a. Ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu FGPie

Đồ thị Hình 2 biểu diễn ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tần số dao động riêng cơ bản của tấm sandwich lõi Auxetic, lớp bề mặt áp điện có cơ tính biến thiên PZT-5Ha/PZT-4a cho hai trường hợp mạch đóng và mạch mở. Kết quả cho thấy khi p tăng, tần số dao động riêng của tấm sandwich giảm xuống. Điều này là hoàn toàn phù hợp vì theo Bảng 1, các thông số vật liệu cho thấy PZT-5Ha có độ cứng nhỏ hơn PZT-4a nên khi tỷ phần thể tích của PZT-5Ha tăng lên (p tăng) dẫn đến tấm bị mềm hơn (tần số dao động riêng của tấm giảm xuống). Đồ thị Hình 2 cũng cho thấy tần số dao động riêng khi mạch mở lớn hơn khi mạch đóng. Ngoài ra đường đồ thị khi mạch đóng có độ dốc lớn hơn mạch mở cho thấy trong hai trạng thái mạch thì giá trị tần số khi mạch đóng giảm nhanh hơn khi p tăng. Về ý nghĩa vật lý, do có hiệu ứng áp điện nên khi mạch mở, năng lượng điện được chuyển hóa thành năng lượng cơ học nên tấm có độ cứng lớn hơn (tần số lớn hơn), trong khi với mạch đóng thì điện thế đã bị trung hòa do nối đất nên không xảy ra hiện tượng chuyển hóa điện năng thành cơ năng. Mặt khác, so sánh giữa Hình 2(a) góc θ nhỏ (θ = 10°, 30°) và Hình 2(b) với góc θ lớn (θ = 60°, 80°) cho thấy khi θ lớn, tần số dao động riêng thay đổi ít hơn khi tăng θ trong cả trường hợp mạch mở và mạch đóng.

Bảng 5. Tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm sandwich lõi Auxetic, lớp bề mặt áp điện có cơ tính biến thiên PZT-5Ha/PZT-4a [32] ($a = b = 0{,}5$ m, $a/h_c = 50$, $\eta_1 = 1$, $\eta_3 = 0{,}01385$)

p	h_p/h_c	Mạch	Cell angle θ					
			$\theta = 5°$	$\theta = 15°$	$\theta = 25°$	$\theta = 45°$	$\theta = 60°$	$\theta = 80°$
0	0,1	Closed	228,807	227,521	225,404	214,679	186,923	60,010
		Open	252,414	251,697	250,500	244,144	225,489	89,925
	0,2	Closed	256,777	255,353	252,998	240,996	209,868	67,407
		Open	283,085	282,291	280,958	273,850	252,952	100,935
1	0,1	Closed	215,507	214,286	212,283	202,169	176,023	56,504
		Open	237,002	236,324	235,195	229,221	211,703	84,416
	0,2	Closed	249,241	247,856	245,566	233,913	203,701	65,424
		Open	274,588	273,816	272,521	265,627	245,360	97,905
5	0,1	Closed	206,759	205,580	203,652	193,939	168,853	54,197
		Open	227,537	226,883	225,796	220,056	203,235	81,032
	0,2	Closed	244,940	243,577	241,325	229,871	200,183	64,294
		Open	269,840	269,081	267,808	261,032	241,119	96,214
10	0,1	Closed	204,870	203,700	201,788	192,162	167,304	53,699
		Open	225,640	224,991	223,912	218,219	201,538	80,353
	0,2	Closed	244,031	242,672	240,428	229,017	199,440	64,055
		Open	268,868	268,111	266,842	260,091	240,251	95,868

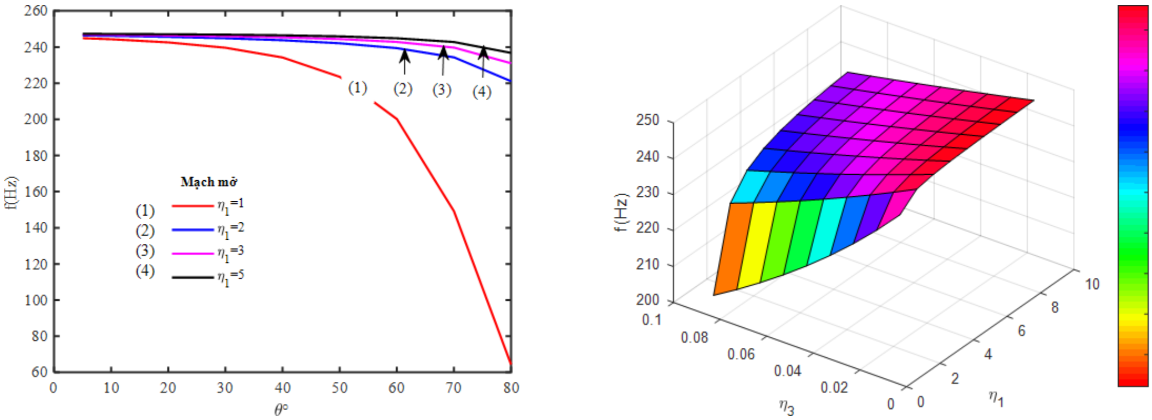


(a) $\theta = 10°, 30°$ (b) $\theta = 60°, 80°$

Hình 2. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm A-FGPie ($a = b = 0{,}5$ m; $a/h = 50$; $h_p/h_c = 0{,}1$; $\eta_1 = 2$; $\eta_3 = 0{,}01385$)

b. Ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu Auxetic

Hình 3(a) thể hiện kết quả tính tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie. Từ kết quả cho thấy khi tham số $\eta_1 = 1; 2; 3; 5$ và θ thay đổi từ 10° đến 35°, tần số dao động riêng của tấm sandwich gần như không thay đổi nhưng khi góc nghiêng $\theta > 30°$, tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm giảm và giảm rất nhanh khi $\eta_1 = 1$.

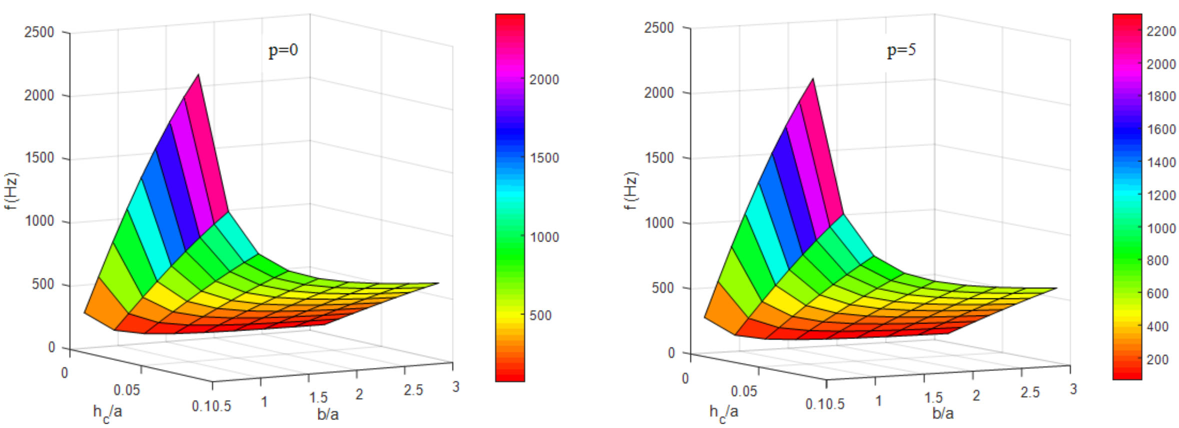


(a) $\eta_3 = 0{,}01385$ (b) $\theta = 30°$

Hình 3. Ảnh hưởng của θ và các tham số η_1 và η_3 đến tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm sandwich A-FGPie ($a = b = 0{,}5$ m; $a/h = 50$; $h_p/h_c = 0{,}1$; $p = 5$; mạch mở)

Để nghiên cứu sâu hơn ảnh hưởng của hai tham số hình học của phần tử đặc trưng auxetic, Hình 3(b) biểu diễn ảnh hưởng của các tham số η_1 và η_3 đến tần số dao động riêng cơ bản f (Hz). Với số liệu khảo sát, có thể thấy rằng tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie giảm khi tham số hình học η_3 tăng từ 0,01 lên 0,09 và $\eta_1 < 2{,}0$ (đặc biệt khi $\eta_1 = 1$). Tuy nhiên, chúng tăng nhẹ khi $\eta_1 > 2{,}0$. Các kết quả khảo sát khác cũng cho thấy rằng sự kết hợp đồng thời của hai tham số η_1, η_3 ảnh hưởng đến tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie là tương đối phức tạp.

c. Khảo sát ảnh hưởng của các kích thước hình học



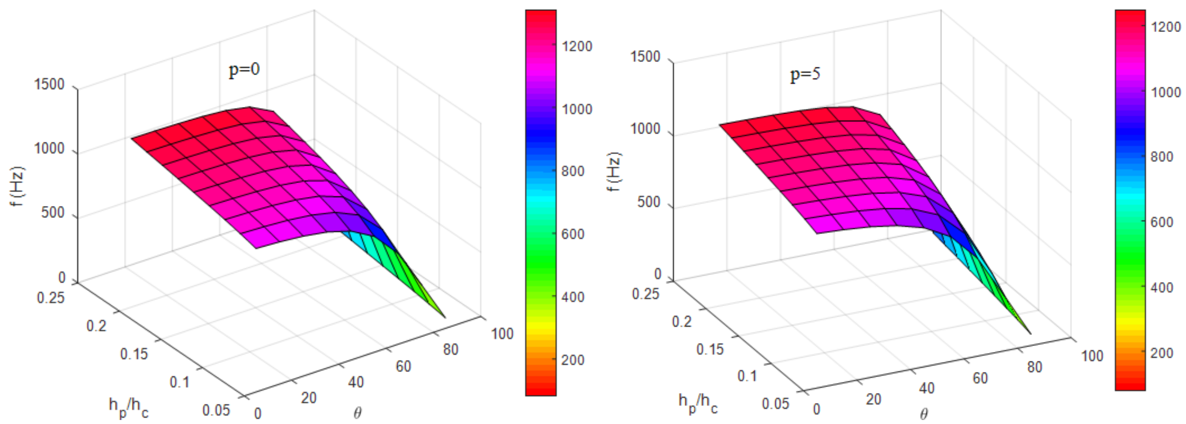
(a) $p = 0$ (b) $p = 5$

Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ số h_c/a và b/a đến tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm sandwich A-FGPie ($a = b = 0{,}5$ m; $h_p/h_c = 0{,}1$; $\theta = 30°$; $\eta_1 = 1$; $\eta_3 = 0{,}01385$; mạch mở)

Hình 4 biểu diễn ảnh hưởng của tỷ số h_c/a và b/a đến tần số dao động riêng đầu tiên của tấm sandwich A-FGPie. Kết quả cho thấy khi $p = 0$, lớp áp điện là PZT-5Ha sẽ có tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) lớn hơn khi lớp áp điện là FGPie (PZT-5Ha/PZT-4a) có $p = 5$. Với cả hai chỉ số p xem xét thì khi tỷ số h_c/a tăng, tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) tăng lên. Kết quả này phù hợp với thực tế là khi tăng chiều dày tấm, độ cứng tấm sẽ tăng theo. Mặt khác theo đồ thị khi cố định kích thước $a = 0{,}5$ m, tỷ số b/a tăng lên cho kết quả tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) giảm là phù hợp với lý do khi b/a tăng, diện tích tấm tăng lên dẫn đến độ cứng nhỏ hơn tấm ban đầu ($b = a$).

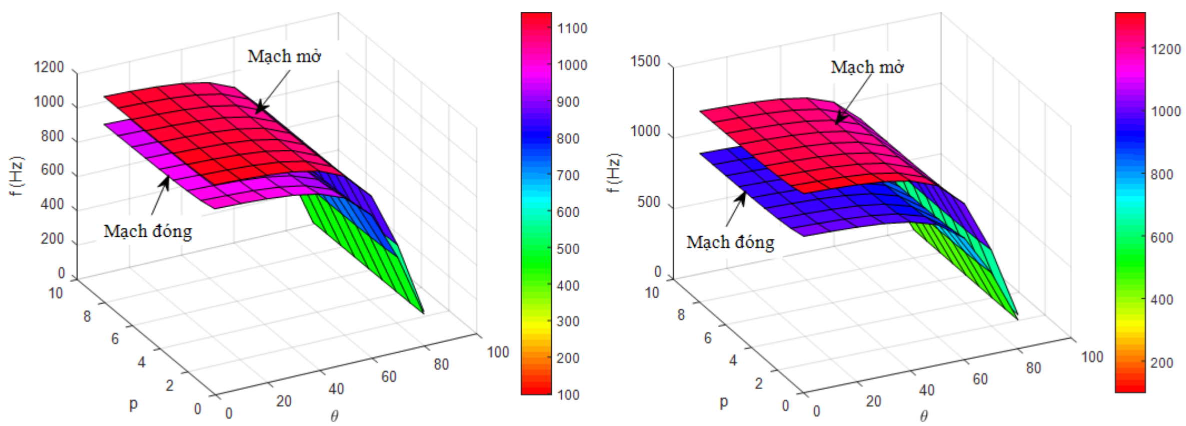
d. Khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng áp điện

Hình 5 xem xét ảnh hưởng của chiều dày lớp áp điện (tỷ số h_p/h_c) và góc nghiêng θ đến tần số dao động riêng của tấm dày ($a/h_c = 10$) sandwich A-FGPie $p = 0$ và $p = 5$, mạch mở. Từ đồ thị cho thấy khi chiều dày lớp áp điện tăng lên (tăng h_p/h_c) tần số dao động của tấm sẽ tăng theo hay nói cách khác là có thể tăng độ cứng của tấm sandwich A-FGPie bằng cách tăng chiều dày lớp áp điện FGPie.



(a) $p = 0$ (b) $p = 5$

Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số h_p/h_c và θ đến tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) của tấm sandwich A-FGPie ($a = b = 0{,}5$ m; $a/h_c = 10$; $h_p/h_c = 0{,}1$; $\eta_1 = 1$; $\eta_3 = 0{,}01385$; mạch mở)



(a) PZT5-Ha/PZT-4a (b) PZT-5Hb/PZT-4b

Hình 6. Ảnh hưởng của trạng thái mạch và thuộc tính vật liệu đến tần số cơ bản f (Hz) của tấm sandwich A-FGPie ($a = b = 0{,}5$ m; $a/h_c = 10$; $h_p/h_c = 0{,}1$; $\eta_1 = 1$; $\eta_3 = 0{,}01385$)

Theo các khảo sát ở trên thì với trạng thái mạch đóng (tần số f_{Clc}) và mạch mở (tần số f_{Opc}) sẽ cho phần trăm chênh lệch tần số: $\beta = \max\left[\left(f_{Clc}/f_{Opc}\right)100\%\right]$ là đáng kể. Trong mục này bài báo xem xét với hai cặp vật liệu khác nhau cấu thành lên lớp FGPie để nhận xét về độ lớn của β. Cặp thứ nhất PZT-4a/PZT5-Ha, cặp thứ hai PZT-4b/PZT-5b, các thông số vật liệu được lấy theo Bảng 1.

Kết quả trên đồ thị Hình 6 cho thấy 2 cặp vật liệu FGPie khác nhau cho giá trị β là khác biệt về độ lớn. Cặp thứ 2 cho giá trị β khi p và θ thay đổi là lớn hơn khá nhiều so với cặp thứ nhất. Sở dĩ có hiện tượng này là do trạng thái mạch phụ thuộc vào các hằng số áp điện của vật liệu thành phần. Theo các số liệu khảo sát thì vật liệu áp điện thành phần trong cặp thứ 2 ngoài các thông số vật liệu như C_{ij}, e_{ij}, ρ tương đương với cặp thứ nhất thì các hằng số điện môi κ_{ij} nhỏ hơn nhiều so với cặp thứ nhất dẫn đến kết quả về tần số dao động riêng cơ bản f (Hz) chênh lệch lớn giữa hai trạng thái mạch. Cụ thể cặp thứ nhất β_1 = 19,19%, cặp thứ β_2 = 37,17%.

6. Kết luận

Bài báo đã thiết lập nghiệm giải tích cho bài toán phân tích dao động riêng kết cấu tấm sandwich lớp bề mặt là vật liệu áp điện có cơ tính biến thiên, lớp lõi auxetic dạng tổ ong (hexagonal) có hệ số Poisson âm liên kết khớp trên các cạnh. Trên cơ sở lý thuyết biến bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến, các phương trình chuyển động nhận được dựa trên nguyên lý Hamilton là cơ sở để xác định tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie theo dạng nghiệm Navier. Tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie đã được tính toán với các tham số vật liệu, kích thước tấm và hai trạng thái mạch khác nhau. Kết quả số cho thấy tần số dao động riêng của tấm sandwich A-FGPie phụ thuộc vào các đặc trưng hình học của cấu trúc đơn vị lõi auxetic, chỉ số tỷ lệ thể tích p của lớp FGPie, chiều dày lớp áp điện và trạng thái mạch điện. Đây sẽ là cơ sở tốt để tối ưu hóa thiết kế và tính toán cho các kết cấu tấm sandwich A-FGPie trong những nghiên cứu tiếp theo.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đề tài mã số B2022-XDA-06.

Tài liệu tham khảo

[1] Li, Y., Feng, Z., Hao, L., Huang, L., Xin, C., Wang, Y., Bilotti, E., Essa, K., Zhang, H., Li, Z., Yan, F., Peijs, T. (2020). A Review on Functionally Graded Materials and Structures via Additive Manufacturing: From Multi-Scale Design to Versatile Functional Properties. *Advanced Materials Technologies*, 5(6): 1900981.

[2] Liu, G. R., Dai, K. Y., Lim, K. M. (2004). Static and vibration control of composite laminates integrated with piezoelectric sensors and actuators using the radial point interpolation method. *Smart Materials and Structures*, 13(6):1438–1447.

[3] Zhang, S.-Q., Zhao, G.-Z., Rao, M. N., Schmidt, R., Yu, Y.-J. (2019). A review on modeling techniques of piezoelectric integrated plates and shells. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 30 (8):1133–1147.

[4] Wu, X.-H., Chen, C., Shen, Y.-P., Tian, X.-G. (2002). A high order theory for functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Solids and Structures*, 39(20):5325–5344.

[5] Sedighi, M. R., Shakeri, M. (2009). A three-dimensional elasticity solution of functionally graded piezoelectric cylindrical panels. *Smart Materials and Structures*, 18(5):055015.

[6] Farsangi, M. A. A., Saidi, A. R. (2012). Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers. *Smart Materials and Structures*, 21(9):094017.

[7] Behjat, B., Salehi, M., Sadighi, M., Armin, A., Abbasi, M. (2009). Static, Dynamic, and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Panels Using Finite Element Method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(13):1635–1646.

[8] Alderson, A., Evans, K. E. (1995). Microstructural modelling of auxetic microporous polymers. *Journal of Materials Science*, 30(13):3319–3332.

[9] Lim, T.-C. (2015). *Auxetic Materials and Structures*. Springer Singapore.

[10] Wan, H., Ohtaki, H., Kotosaka, S., Hu, G. (2004). A study of negative Poisson's ratios in auxetic honeycombs based on a large deflection model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(1):95–106.

[11] Zhang, G., Ghita, O. R., Evans, K. E. (2016). Dynamic thermo-mechanical and impact properties of helical auxetic yarns. *Composites Part B: Engineering*, 99:494–505.

[12] Whitty, J. P. M., Alderson, A., Myler, P., Kandola, B. (2003). Towards the design of sandwich panel composites with enhanced mechanical and thermal properties by variation of the in-plane Poisson's ratios. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 34(6):525–534.

[13] Quoc, T. H., Tu, T. M., Tham, V. V. (2021). Free vibration and dynamic response of sandwich composite plates with auxetic honeycomb core. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 15(4):1–14.

[14] Wang, T., Qin, Q., Wang, M., Yu, W., Wang, J., Zhang, J., Wang, T. (2017). Blast response of geometrically asymmetric metal honeycomb sandwich plate: Experimental and theoretical investigations. *International Journal of Impact Engineering*, 105:24–38.

[15] Qi, C., Remennikov, A., Pei, L.-Z., Yang, S., Yu, Z.-H., Ngo, T. D. (2017). Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels: Experimental tests and numerical simulations. *Composite Structures*, 180:161–178.

[16] Tran, T. T., Pham, Q. H., Nguyen-Thoi, T., Tran, T.-V. (2020). Dynamic Analysis of Sandwich Auxetic Honeycomb Plates Subjected to Moving Oscillator Load on Elastic Foundation. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2020:1–16.

[17] Quan, T. Q., Anh, V. M., Mahesh, V., Duc, N. D. (2020). Vibration and nonlinear dynamic response of imperfect sandwich piezoelectric auxetic plate. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 29(1): 127–137.

[18] Tran, H.-Q., Vu, V.-T., Tran, M.-T. (2023). Free vibration analysis of piezoelectric functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement by pb-2 Ritz method. *Composite Structures*, 305: 116535.

[19] Tham, V. V., Tran, H. Q., Tu, T. M. (2021). Vibration characteristics of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly-curved shells. *Applied Mathematics and Mechanics*.

[20] Quoc, T. H., Tham, V. V., Tu, T. M. (2021). Active vibration control of a piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced spherical shell panel. *Acta Mechanica*, 232(3):1005–1023.

[21] Quoc, T. H., Tu, T. M., Tham, V. V. (2019). Free Vibration Analysis of Smart Laminated Functionally Graded CNT Reinforced Composite Plates via New Four-Variable Refined Plate Theory. *Materials*, 12 (22):3675.

[22] Wu, X.-H., Shen, Y.-P., Chen, C. (2003). An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators. *Materials Letters*, 57(22-23):3532–3542.

[23] Wu, C.-P., Syu, Y.-S. (2007). Exact solutions of functionally graded piezoelectric shells under cylindrical bending. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20):6450–6472.

[24] Sayyaadi, H., Rahnama, F., Farsangi, M. A. A. (2016). Energy harvesting via shallow cylindrical and spherical piezoelectric panels using higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 147: 155–167.

[25] Shiyekar, S. M., Kant, T. (2011). Higher order shear deformation effects on analysis of laminates with piezoelectric fibre reinforced composite actuators. *Composite Structures*, 93(12):3252–3261.

[26] Zenkour, A. M., Alghanmi, R. A. (2019). Bending of exponentially graded plates integrated with piezoelectric fiber-reinforced composite actuators resting on elastic foundations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 75:461–471.

[27] Sayyaadi, H., Farsangi, M. A. A. (2014). An analytical solution for dynamic behavior of thick doubly

curved functionally graded smart panels. *Composite Structures*, 107:88–102.
[28] Wu, N., Wang, Q., Quek, S. T. (2010). Free vibration analysis of piezoelectric coupled circular plate with open circuit. *Journal of Sound and Vibration*, 329(8):1126–1136.
[29] Tham, V. V., Tran, H. Q., Tu, T. M. (2021). Vibration characteristics of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite doubly-curved shells. *Applied Mathematics and Mechanics*.
[30] Farsangi, M. A. A., Saidi, A. R., Batra, R. C. (2013). Analytical solution for free vibrations of moderately thick hybrid piezoelectric laminated plates. *Journal of Sound and Vibration*, 332(22):5981–5998.
[31] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
[32] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2016). Electro-thermoelastic vibration of plates made of porous functionally graded piezoelectric materials under various boundary conditions. *Journal of Vibration and Control*, 24(10):1910–1926.

Phụ lục

$$k_{11} = -A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2; \quad k_{12} = -A_{12}\alpha\beta - A_{66}\alpha\beta; \quad k_{13} = s_{14} = 0; \quad k_{15} = -A^t_{pie}\alpha; \quad k_{16} = -A^b_{pie}\alpha;$$
$$k_{22} = -A_{22}\beta^2 - A_{66}\alpha^2; \quad k_{23} = k_{24} = 0; \quad k_{25} = -A^t_{pie}\beta; \quad k_{26} = -A^b_{pie}\beta;$$
$$k_{33} = -D_{11}\alpha^4 - 2D_{12}\alpha^2\beta^2 - D_{22}\beta^4 - 4D_{66}\alpha^2\beta^2; \quad k_{34} = -D^s_{11}\alpha^4 - 2D^s_{12}\alpha^2\beta^2 - D^{22}_s\beta^4 - 4D^{66}_s\alpha^2\beta^2;$$
$$k_{35} = B^{bt}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right); \quad k_{36} = B^{bb}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right);$$
$$k_{44} = -H^s_{11}\alpha^4 - 2H^s_{12}\alpha^2\beta^2 - H^s_{22}\beta^4 - 4H^s_{66}\alpha^2\beta^2 - A^s_{44}\alpha^2 - A^s_{55}\beta^2;$$
$$k_{45} = A^{st}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + B^{st}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right); \quad k_{46} = A^{sb}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + B^{sb}_{pie}\left(\alpha^2 + \beta^2\right); \quad k_{51} = -P^t_3\alpha;$$
$$k_{52} = -P^t_3\beta; \quad k_{53} = P^t_4\left(\alpha^2 + \beta^2\right); \quad k_{54} = -P^t_1\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + P^t_5\left(\alpha^2 + \beta^2\right); k_{55} = -P^t_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + P^t_6;$$
$$k_{56} = 0; \quad k_{61} = -P^b_3\alpha; \quad k_{62} = -P^b_3\beta; \quad k_{63} = P^b_4\left(\alpha^2 + \beta^2\right); \quad k_{64} = -P^b_1\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + P^b_5\left(\alpha^2 + \beta^2\right);$$
$$k_{65} = 0; \quad k_{66} = -P^b_2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) + P^b_6;$$
$$m_{11} = I_1; \quad m_{12} = 0; \quad m_{13} = -I_2\alpha; \quad m_{14} = -I_4\alpha; \quad m_{22} = I_1; \quad m_{23} = -I_2\beta; \quad m_{24} = -I_4\beta;$$
$$m_{33} = I_3\alpha^2 + I_3\beta^2 + I_1; \quad m_{34} = I_5\alpha^2 + I_5\beta^2 + I_1; \quad m_{44} = I_6\alpha^2 + I_6\beta^2 + I_1;$$