Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2022, 16 (5V): 74–86

PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC DẦM TIMOSHENKO BẰNG VẬT LIỆU XỐP (FGP) CHỊU TÁC DỤNG CỦA TẢI TRỌNG DI ĐỘNG THEO TIẾP CẬN GIẢI TÍCH

Chu Thanh Bình[a], Nguyễn Văn Long[a,*], Trần Minh Tú[a], Nguyễn Tuấn Anh[b]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh, số 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, tỉnh Nghệ An, Việt Nam*

Nhận ngày 22/6/2022, Sửa xong 13/9/2022, Chấp nhận đăng 13/9/2022

Tóm tắt

Bài báo xây dựng lời giải giải tích để phân tích đáp ứng động học của dầm bằng vật liệu rỗng (functionally graded porous materials-FGPMs) đặt trên nền đàn hồi Pasternak theo mô hình dầm Timoshenko. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng của vật liệu được xem xét bao gồm: phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng. Hệ trục tọa độ quy chiếu gắn với mặt trung hòa được sử dụng nhằm đơn giản hóa các quan hệ nội lực-chuyển vị. Hệ phương trình chuyển động và điều kiện biên cho dầm được thiết lập trên cơ sở nguyên lý Hamilton. Đáp ứng động lực học của dầm nhận được bằng cách sử dụng phương pháp Runge-Kutta. Kết quả được kiểm chứng với các công bố của một số tác giả khác cho thấy độ tin cậy của lời giải. Ảnh hưởng của tham số vật liệu, hình học, nền đàn hồi và các tham số của tải trọng di động đến ứng xử động của dầm được khảo sát qua các ví dụ số.

Từ khoá: phân tích dao động; tải trọng di động; dầm vật liệu xốp; dầm Timoshenko; mặt trung hòa.

DYNAMIC ANALYSIS OF FG POROUS TIMOSHENKO BEAM UNDER MOVING LOAD BY USING AN ANALYTICAL APPROACH

Abstract

This paper presents the analytical solutions for vibration analysis of functionally graded porous Timoshenko beam resting on the Pasternak elastic foundation. Three porosity distribution patterns including uniform, non-uniform symmetric, and non-uniform asymmetric are considered. The reference coordinate system coincides with the neutral surface and is used to get a simple form of stress-displacement relations. Equations of motion and boundary conditions are obtained via Hamilton's principle. Natural frequency and transient displacement are obtained by using the Runge-Kutta method. The results are verified with published ones to show the reliability of the proposed solution. The effect of material and geometric parameters, elastic foundation stiffness and moving load parameters are investigated through the numerical examples.

Keywords: vibration analysis; moving load; FGP beam; Timoshenko beam; neutral surface.

https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2022-16(5V)-07 © 2022 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Vật liệu xốp (porous material) với các lỗ rỗng trong các vi cấu trúc, chẳng hạn như bọt kim loại. Với khả năng hấp thụ năng lượng tốt, bọt kim loại được xem là một trong những vật liệu hứa hẹn nhất để chế tạo kết cấu chịu tải trọng động [1–4]. Kết hợp với ý tưởng của vật liệu có cơ tính biến thiên

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* longnv@huce.edu.vn (Long, N. V.)

(FGM), vật liệu xốp đặc trưng bởi quy luật phân bố các lỗ rỗng một cách liên tục trong cấu trúc vi mô, vì thế được coi là một loại vật liệu FGM và được biết đến với tên gọi vật liệu FGM xốp (FGP-functionally graded porous material). Do có tiềm năng ứng dụng cao và sở hữu nhiều đặc tính nổi trội nên các nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu sử dụng vật liệu xốp nói chung [5] và dầm bằng vật liệu xốp nói riêng đang thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước, thể hiện qua một số lượng lớn các công bố trong thời gian gần đây [6–9].

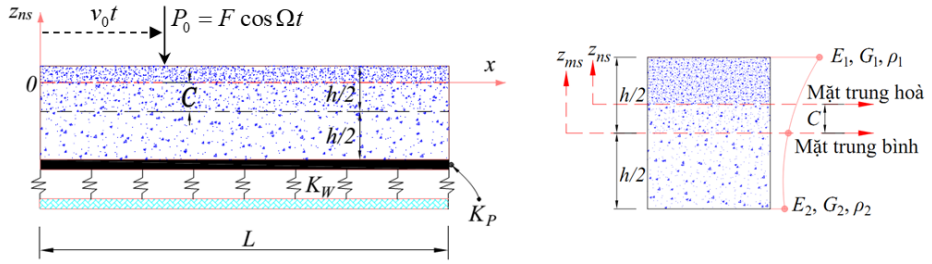
Kết cấu chịu tải trọng di động thường gặp phổ biến trong đời sống (mặt đường, đường băng sang bay, đường ray, dầm tà vẹt, …), ứng xử cơ học của chúng vì thế cũng khác biệt so với khi chịu tải trọng tĩnh, đòi hỏi phải có các nghiên cứu chuyên sâu. Một trong số các tài liệu quan trọng nhất trong phân tích kết cấu tải trọng di động là sách chuyên khảo của Frýba [10], trong đó nghiệm giải tích cho một loạt bài toán dầm và tấm bằng vật liệu đẳng hướng chịu tác dụng của các loại tải trọng di động khác nhau được xây dựng trên cơ sở biến đổi Fourier và biến đổi Laplace. Các kết quả phân tích ứng xử động của dầm trên nền đàn hồi được Thambiratnam và Zhuge trình bày trong [11], Huang và Thambiratnam trong [12], Gbadeyan và Oni trong [13], Kim và Roesset trong [14], Zhu và Law trong [15]. Sử dụng các lý thuyết dầm khác nhau, Simsek [16] phân tích dao động của dầm FGM chịu tác dụng của khối lượng di động. Simsek và Kocatürk [17] phân tích dao động riêng và dao động cưỡng bức của dầm FGM chịu tác dụng của tải điều hòa di động. Sử dụng mô hình dầm Euler-Bernoulli, Simsek và cs. [18] khảo sát ứng xử động của dầm FGM có cơ tính biến thiên dọc trục chịu tác dụng của tải trọng điều hòa di động. Khalili và cs. [19] phân tích dao động cưỡng bức của dầm FGM chịu tải trọng di động bằng phương pháp hỗn hợp Ritz-DQ. Malekzadeh và Monajjemzadeh [20] khảo sát ứng xử động của dầm FGM trong môi trường nhiệt theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Wang và Wu [21] khảo sát ảnh hưởng nhiệt đến ứng xử động của dầm FGM có cơ tính biến thiên theo tọa độ dọc trục chịu tác dụng của tải trọng điều hòa di động.

Bài toán dao động của dầm FGM chịu kích động bởi tải trọng di động được một số tác giả trong nước quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây. Phạm Đình Trung [22] phân tích dao động của dầm FGM dưới tác động của khối lượng hoặc lực điều hòa di động bằng phương pháp PTHH. Lê Thị Hà và đồng nghiệp xây dựng mô hình phần tử hữu hạn để phân tích dao động của dầm FGM đa nhịp chịu lực điều hòa di động [23], dầm có mặt cắt ngang thay đổi chịu nhiều lực di động [24]. Hàm dạng Kosmatka được Nguyễn Đình Kiên và cs. [25] dùng để xây dựng biểu thức ma trận độ cứng và ma trận khối lượng cho phân tích dầm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên theo hai phương (2D-FGM) chịu lực di động. Phạm Quốc Hòa và cs. [26] phân tích động tấm FGM có vi lỗ rỗng đặt trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp PTHH trơn (Edge-Based Smoothed Finite Element Method). Gần đây, Nguyễn Sỹ Nam và Lê Ngọc Phương [27] xây dựng nghiệm giải tích phân tích đáp ứng động lực học của dầm Timoshenko chịu tải trọng di động. Ảnh hưởng của hệ số cản, tải trọng và vận tốc di chuyển tải trọng lên dao động và ứng suất trong dầm đã được xét đến.

Qua nghiên cứu tổng quan, có thể thấy rằng, bài toán phân tích đáp ứng động cho dầm bằng vật liệu xốp (FGP) chịu tải trọng di động theo phương pháp giải tích, có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa còn chưa được tác giả nào khám phá. Vì thế, trong bài báo này, phân tích dao động của dầm FGP đặt trên nền đàn hồi trong đó yếu tố mặt trung hòa vật liệu được xét đến nhằm triệt tiêu tương tác màng-uốn trong quan hệ nội lực-biến dạng. Để có lời giải không quá cồng kềnh, đồng thời khắc phục được những hạn chế của dầm Euler-Bernoulli, lý thuyết dầm Timoshenko được sử dụng. Các phương trình cân bằng của dầm được thiết lập trên cơ sở nguyên lý Hamilton. Ba quy luật phân bố của lỗ rỗng bao gồm: phân bố đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng theo chiều cao dầm được thực hiện trong các phân tích. Các kết quả số cho thấy ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số hình học, nền đàn hồi và tham số tải di động lên đáp ứng của dầm FGP.

2. Mô hình dầm bằng vật liệu FGP

Trong nghiên cứu này, dầm FGP có chiều dài L, chiều rộng b và chiều cao h trong hệ tọa độ xoz. Do có cơ tính thay đổi theo tọa độ chiều cao dầm, mặt trung hòa của dầm có thể không trùng với mặt trung bình. Để chỉ rõ vị trí mặt trung hòa của dầm FGM xốp, hai mặt phẳng khác nhau được sử dụng cho tọa độ z: z_{ms} và z_{ns} tương ứng là tọa độ tính từ mặt trung bình và mặt trung hòa (xem Hình 1).



Hình 1. Mô hình dầm FGP trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng di động

Các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo chiều cao dầm, phụ thuộc vào hệ số rỗng [6, 28]:
Phân bố đều - Dạng 1:

$$\{E,G\} = \{E_1,G_1\}(1-e_0\chi); \quad \rho = \rho_1\sqrt{1-e_0\chi}; \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-e_0} - \frac{2}{\pi} + 1\right)^2 \tag{1}$$

Phân bố đối xứng - Dạng 2:

$$\{E(z_{ms}), G(z_{ms})\} = \{E_1,G_1\}\left[1 - e_0\cos\left(\frac{\pi z_{ms}}{h}\right)\right]; \quad \rho(z_{ms}) = \rho_1\left[1 - e_m\cos\left(\frac{\pi z_{ms}}{h}\right)\right] \tag{2}$$

Phân bố bất đối xứng - Dạng 3:

$$\begin{aligned}\{E(z_{ms}), G(z_{ms})\} &= \{E_1,G_1\}\left[1 - e_0\cos\left(\frac{\pi z_{ms}}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ \rho(z_{ms}) &= \rho_1\left[1 - e_m\cos\left(\frac{\pi z_{ms}}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned} \tag{3}$$

trong đó, hệ số rỗng e_0 được xác định bởi: $e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1$; E_1, G_1, ρ_1 và E_2, G_2, ρ_2 lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng. Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày: ν = hằng số [29].

Vị trí mặt trung hòa của dầm FGP trong trường hợp phân bố bất đối xứng không trùng mặt trung bình, được xác định từ điều kiện [30]:

$$\int_{-h/2}^{h/2}(z_{ms} - C)\,E(z_{ms})dz_{ms} = 0 \quad \Rightarrow C = \left[\int_{-h/2}^{h/2} z_{ms}E(z_{ms})dz\right] \Big/ \left[\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})dz\right] \tag{4}$$

3. Các hệ thức và phương trình chủ đạo

Sử dụng khái niệm mặt trung hòa, trường chuyển vị theo lý thuyết Timoshenko (TBT) [31]:

$$u(x, z_{ns}, t) = u_0(x,t) + z_{ns}\theta_x(x,t); \quad w(x, z_{ns}, t) = w_0(x,t) \tag{5}$$

trong đó: t là biến thời gian; u_0, w_0 tương ứng là chuyển vị màng và độ võng của một điểm trên mặt trung hòa; θ_x là góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục y của dầm.

Theo đó, các thành phần biến dạng bao gồm:

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + u_{,z} = w_{0,x} + \theta_x \tag{6}$$

Dấu (,) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo biến tương ứng.

Đối với dầm vật liệu FGM xốp, quan hệ ứng suất biến dạng:

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x; \quad \tau_{xz} = Q_{66}\gamma_{xz}; \quad Q_{11} = E(z_{ns}); \quad Q_{66} = G(z_{ns}) \tag{7}$$

Tích phân các thành phần ứng suất theo phương chiều cao dầm, ta được các thành phần nội lực N_x, M_x và Q_{xz}; chúng liên hệ với các thành phần chuyển vị:

$$N_x = A_{11}u_{0,x}; \quad M_x = D_{11}\theta_{x,x}; \quad Q_{xz} = A^s_{55}\left(w_{0,x} + \theta_x\right) \tag{8}$$

trong đó: $A_{11} = b\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_{ns})dz_{ns}; D_{11} = b\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} z^2_{ns}E(z_{ns})dz_{ns}; A^s_{55} = bk_s\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} \dfrac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)}dz_{ns}$; hệ số hiệu chỉnh cắt $k_s = 5/6$ được sử dụng trong nghiên cứu này.

Hệ phương trình chuyển động cho dầm FGP được xây dựng dựa trên nguyên lý Hamilton [32], gồm ba phương trình:

$$\begin{gathered} N_{x,x} = I_0\ddot{u}_0 + I_1\ddot{\theta}_x \\ Q_{xz,x} - K_W w_0 + K_P w_{0,xx} + P_0(t)\delta(x - vt) = I_0\ddot{w}_0 \\ M_{x,x} - Q_{xz} = I_1\ddot{u}_0 + I_2\ddot{\theta}_x \end{gathered} \tag{9}$$

trong đó: K_W - hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness), K_P - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness). Tải trọng di động là lực tập trung biểu diễn dưới dạng: $P_0(t) = F\cos\Omega t$; F và Ω tương ứng là biên độ và tần số của lực kích động; $\delta(.)$ là hàm Dirac delta, x là tham số tọa độ tính từ đầu trái của dầm; v_0 là vận tốc di chuyển của điểm đặt lực.

Các mô men quán tính của khối lượng được định nghĩa trong (9), bao gồm:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int\limits_A \rho(z_{ns})dA = b\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} \rho(z_{ns})dz_{ns} \\ I_1 &= \int\limits_A z_{ns}\rho(z_{ns})dA = b\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{ns}\rho(z_{ns})dz_{ns} \\ I_2 &= \int\limits_A z^2_{ns}\rho(z_{ns})dA = b\int\limits_{-h/2-C}^{h/2-C} z^2_{ns}\rho(z_{ns})dz_{ns} \end{aligned} \tag{10}$$

4. Lời giải giải tích

Xét dầm chữ nhật FGP liên kết khớp hai đầu, chịu tác dụng của tải trọng di động $P_0(t)$. Các điều kiện biên của bài toán được thể hiện như sau:

$$\text{Tại } x = 0 \text{ và } x = L\text{: } N_x = A_{11}u_{,x} = 0; \quad w_0 = 0; \quad M_x = D_{11}\theta_{x,x} = 0 \tag{11}$$

Chọn dạng nghiệm Navier để thoả mãn các điều kiện biên trong (11):

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U(t)\cos\frac{m\pi x}{L} \\ w_0(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W(t)\sin\frac{m\pi x}{L} \\ \theta_x(x,t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_x(t)\cos\frac{m\pi x}{L} \end{aligned} \tag{12}$$

trong đó $m, n = 1, 2, 3\ldots$; U, W, Φ_x là biên độ của chuyển vị dọc trục, độ võng và góc xoay.

Thay (12) vào (9) và áp dụng phương pháp Galerkin, ta được:

$$\begin{gathered} -A_{11}\alpha^2 U = I_0\ddot{U} + I_1\ddot{\Phi} \\ \frac{L}{2}\left[\left(A_{55}^s\alpha^2 + K_W + \alpha^2 K_P\right)W + A_{55}^s\alpha\Phi + I_0\ddot{W}\right] = P_0(t)\sin\frac{m\pi vt}{L} \\ -\left(D_{11}\alpha^2 + A_{55}^s\right)\Phi - A_{55}^s\alpha W = I_1\ddot{U} + I_2\ddot{\Phi} \end{gathered} \tag{13}$$

Từ đó, ta có biểu thức xác định các thành phần gia tốc theo chuyển vị:

$$\begin{gathered} c\ddot{U} = l_{11}U + l_{12}W + l_{13}\Phi \\ \ddot{W} = l_{22}W + l_{23}\Phi + \frac{2P_0(t)}{I_0 L}\sin\frac{m\pi vt}{L} \\ \ddot{\Phi} = l_{31}U + l_{32}W + l_{33}\Phi \end{gathered} \tag{14}$$

trong đó các hệ số l_{ij} được xác định bởi:

$$l_{11} = \frac{I_2 A_{11}\alpha^2}{I_1^2 - I_0 I_2};\quad l_{12} = -\frac{I_1 A_{55}^s\alpha}{I_1^2 - I_0 I_2};\quad l_{13} = -\frac{I_1\left(D_{11}\alpha^2 + A_{55}^s\right)}{I_1^2 - I_0 I_2};\quad l_{22} = -\frac{A_{55}^s\alpha^2 + K_W + \alpha^2 K_P}{I_0};$$
$$l_{23} = -\frac{A_{55}^s\alpha}{I_0};\quad l_{31} = -\frac{I_0 I_2 A_{11}\alpha^2}{I_1\left(I_1^2 - I_0 I_2\right)} - \frac{A_{11}\alpha^2}{I_1};\quad l_{32} = \frac{I_0 A_{55}^s\alpha}{I_1^2 - I_0 I_2};\quad l_{33} = \frac{I_0\left(D_{11}\alpha^2 + A_{55}^s\right)}{I_1^2 - I_0 I_2}.$$

4.1. Dao động riêng

Cho $P_0 = 0$, ta xác định được tần số dao động riêng của dầm FGP từ việc giải định thức:

$$\begin{vmatrix} l_{11} + \omega^2 & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} + \omega^2 & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Nghiệm nhỏ nhất thu được từ (15) với mỗi giá trị (m) chính là các tần số dao động riêng ω_m cần tìm; từ đó ta xác định được tần số dao động cơ bản $\omega_0 = \min\{\omega_m\}$.

4.2. Đáp ứng động lực học

Xét dầm FGP dưới tác dụng của tải trọng di động $P_0 = F\cos\Omega t$. Hệ phương trình (14) thu về dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{U} &= l_{11}U + l_{12}W + l_{13}\Phi \\ \ddot{W} &= l_{22}W + l_{23}\Phi + \frac{2F}{I_0 L}\cos\Omega t \sin\frac{m\pi v t}{L} \\ \ddot{\Phi} &= l_{31}U + l_{32}W + l_{33}\Phi \end{aligned} \tag{16}$$

Hệ phương trình (16) được dùng để phân tích đáp ứng động lực học của dầm FGP. Phương pháp Runge-Kutta với các điều kiện ban đầu $U(0) = W(0) = \Phi(0) = 0; \dot{U}(0) = \dot{W}(0) = \dot{\Phi}(0) = 0$ sẽ được áp dụng để nhận được đáp ứng của chuyển vị theo thời gian.

5. Khảo sát số và thảo luận

Dựa trên lời giải giải tích được xây dựng ở trên, các tác giả đã lập code chương trình trên nền Matlab để phân tích đáp ứng động cho dầm FGP liên kết khớp hai đầu, đặt trên nền đàn hồi. Vật liệu bọt kim loại (metal foam) với các cơ tính $E_1 = 200$ GPa, $\rho_1 = 7850$ kg/m^3, $\nu = 1/3$. Để thuận tiện, các công thức không thứ nguyên sau đây được sử dụng [6, 33, 34]:

$$\begin{gathered} w = \frac{w_0(L/2,t)}{w^*}; \quad w^* = \frac{FL^3}{48E_1 I} \\ \hat{\omega} = \omega L\sqrt{\frac{I_{10}}{A_{110}}}; \quad \bar{\omega} = \omega\frac{L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}; \quad K_0 = K_W\frac{L^4}{E_1 I}; \quad J_0 = K_P\frac{L^2}{E_1 I}; \quad t^* = \frac{v_0 t}{L} \end{gathered} \tag{17}$$

trong đó I_0^*, A_{11}^* tương ứng có giá trị là I_0, A_{11} của dầm khi hệ số lỗ rỗng $e_0 = 0$.

5.1. Ví dụ kiểm chứng

Xét dầm FGP với hai quy luật phân bố lỗ rỗng là: Phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng ($e_0 = 0{,}5$). Bảng 1 bao gồm tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\hat{\omega}$ của dầm với các tỷ số kích thước dầm khác nhau: $L/h = 10$, $L/h = 20$ và $L/h = 50$. Các kết quả tính toán theo lời giải giải tích trong bài báo được kiểm chứng với tác giả Chen và cs. [6] sử dụng nghiệm bán giải tích và phương pháp Ritz cho thấy sự tương đồng (sai số lớn nhất về tần số dao động giữa kết quả trong bài báo so với kết quả của Chen và cs. chỉ là 1,86%).

Tiếp theo, bài báo xem xét dầm đẳng hướng có: $E = 200$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m^3; $\nu = 1/3$, h =0,1 m, $b/h = 0{,}5$; $K_0 = J_0 = 0; v_0 = 10$ m/s, $\Omega = 0$, với hai trường hợp tỷ số kích thước dầm bao gồm: $L/h = 50$ (dầm dài) và $L/h = 10$ (dầm ngắn). Tính hội tụ của chuỗi trong khai triển nghiệm Navier (12) đã được kiểm tra, và số số hạng được chọn là $m = 10$. Sử dụng phương pháp Runge-Kuta, số bước thời gian được lấy là 2×10^4 (bước) khi $L/h = 50$ và 1×10^4 (bước) khi $L/h = 10$. Đồ thị đáp ứng động của dầm dưới tác dụng của tải trọng di động theo lời giải giải tích xây dựng trong bài báo thể hiện trong Hình 2, kết quả này được so sánh với kết quả theo nghiệm giải tích của Chopra [35] sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli theo công thức (18):

$$w_0(L/2) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(L/2)q_n(t) \tag{18}$$

Bảng 1. Kiểm chứng tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\hat{\omega}$ của dầm FGP

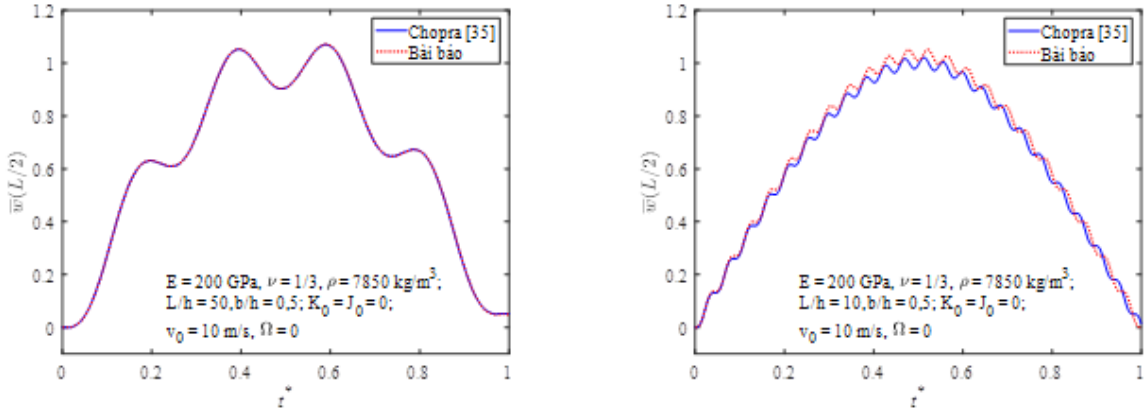
Phân bố lỗ rỗng	L/h	Nguồn		Sai số (%)
		Chen và cs. [6]	Bài báo	
Phân bố đối xứng	10	0,2798	0,2803	0,17
	20	0,1422	0,1422	0,02
	50	0,0571	0,0571	0,05
Phân bố bất đối xứng	10	0,2599	0,2554	1,73
	20	0,1318	0,1293	1,88
	50	0,0529	0,0519	1,86

trong đó:

$$\Phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}; \quad q_n(t) = \frac{2F}{mL}\frac{1}{\omega_n^2 - (n\pi v_0/L)^2}\left(\sin\frac{n\pi v_0 t}{L} - \frac{n\pi v_0}{\omega_n L}\sin\omega_n t\right)$$

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad m = \rho A; \quad A = bh$$

Các kết quả cho thấy, với trường hợp dầm dài, các đường cong độ võng-thời gian theo hai phương pháp tính gần như trùng khớp. Trong trường hợp dầm ngắn, giá trị độ võng lớn nhất tại giữa dầm trong bài báo $\bar{w}_{\max}(L/2) = 1{,}0506$, lớn hơn so với kết quả tương ứng của Chopra có $\bar{w}_{\max}(L/2) = 1{,}0208$ (sai lệch giữa hai phương pháp là 2,92%).



(a) $L/h = 50$ (b) $L/h = 10$

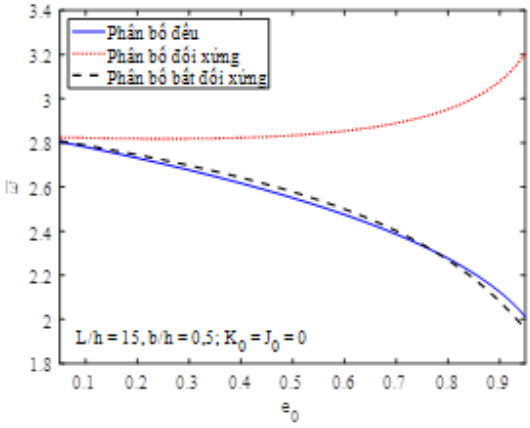
Hình 2. Kiểm chứng đáp ứng dao động của dầm đẳng hướng dưới tác dụng của tải trọng di động

Từ các kết quả tính toán kiểm chứng chỉ ra ở trên, có thể thấy rằng lời giải giải tích và chương trình máy tính sử dụng trong bài báo có độ tin cậy.

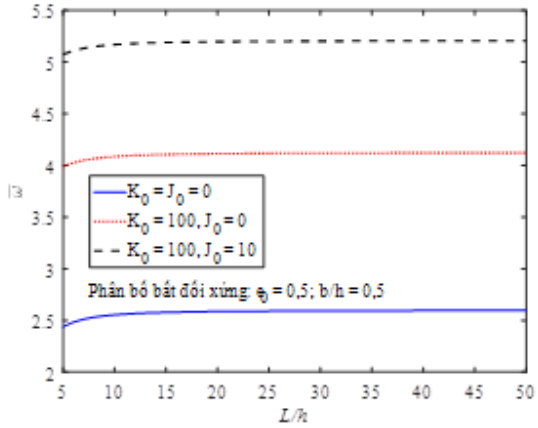
5.2. Khảo sát dao động riêng của dầm FGP

Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng e_0 lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của dầm FGP ($L/h = 15, b/h = 0{,}5; K_0 = J_0 = 0$) được thể hiện bằng đồ thị trên Hình 3. Các

kết quả cho thấy, khi tăng hệ số lỗ rỗng, hai quy luật phân bố lỗ rỗng là phân bố đều và phân bố không đều đối xứng có tần số dao động giảm dần, với kết quả tần số khá gần nhau; tuy nhiên, quy luật phân bố lỗ rỗng không đều đối xứng thì ngược lại, tần số dao động tăng lên khi tăng hệ số lỗ rỗng. Rõ ràng là phân bố đối xứng tỏ ra rất hiệu quả, việc tăng hệ số lỗ rỗng không những làm nhẹ kết cấu (giảm khối lượng dao động), mà vẫn duy trì đà tăng tần số dao động.



Hình 3. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên

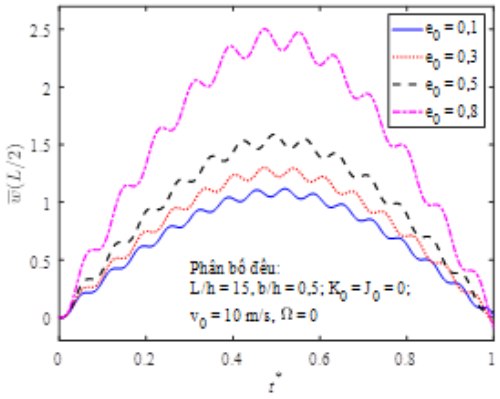


Hình 4. Ảnh hưởng của nền đàn hồi và tỷ số kích thước dầm lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên

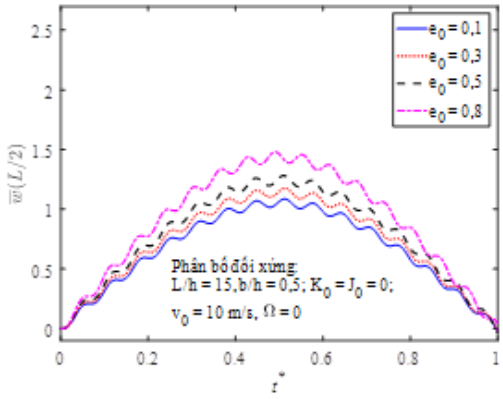
Ảnh hưởng của tham số nền đàn hồi K_0, J_0 và tỷ số kích thước L/h lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên của dầm FGP phân bố bất đối xứng ($e_0 = 0{,}5$; $b/h = 0{,}5$) được thể hiện bằng đồ thị trên Hình 4. Có thể nhận thấy rằng, với mỗi tỷ số kích thước dầm, dầm trên nền Pasternak ($K_0 = 100, J_0 = 10$) luôn có tần số dao động lớn nhất, sau đó đến dầm trên nền Winkler ($K_0 = 100, J_0 = 0$), trường hợp dầm không có nền đàn hồi luôn có tần số dao động nhỏ nhất; việc tăng các hệ số nền đàn hồi góp phần làm tăng cứng cho dầm, dẫn đến tần số dao động riêng tăng. Về ảnh hưởng của tỷ số kích thước dầm lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên, kết quả trên đồ thị cho thấy, việc tăng tỷ số kích thước dầm chỉ làm tăng tần số $\bar{\omega}$ khi $L/h \leq 15$, sau đó thì tần số gần như không thay đổi.

5.3. Khảo sát dao đáp ứng động của dầm FGP

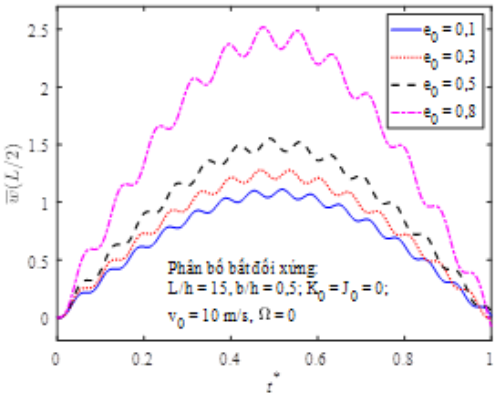
Hình 5 là đồ thị mô tả quan hệ giữa độ võng tại giữa dầm theo thời gian với các hệ số lỗ rỗng khác nhau: $e_0 = 0{,}1$; $e_0 = 0{,}3$;$e_0 = 0{,}5$ và $e_0 = 0{,}8$. Dầm FGP có $L/h = 15, b/h = 0{,}5$; $K_0 = J_0 = 0$ dưới tác dụng của tải trọng di động: $v_0 = 10$ m/s, $\Omega = 0$. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng: Phân bố đều, phân bố không đều đối xứng và phân bố không đều bất đối xứng được tính toán, so sánh với nhau về đáp ứng động. Các kết quả trên đồ thị cho thấy: Với cùng một hệ số lỗ rỗng, phân bố đối xứng luôn có độ võng bé hơn so với hai quy luật phân bố còn lại; và sự khác biệt này càng lớn khi hệ số lỗ rỗng e_0 lớn. Chẳng hạn như: với $e_0 = 0{,}1$ phân bố đối xứng có độ võng lớn nhất tại giữa dầm $\bar{w}(L/2)$ là 1,0862 trong khi phân bố bất đối xứng và phân bố đều có kết quả độ võng tương ứng là 1,1116 và 1,1174; còn khi $e_0 = 0{,}8$ các quy luật phân bố: đối xứng, bất đối xứng và đều, có kết quả độ võng lần lượt là 1,4800, 2,5195 và 2,5038. Ngoài ra, với mỗi quy luật phân bố lỗ rỗng, khi tăng hệ số lỗ rỗng, độ cứng của dầm giảm dẫn đến độ võng tăng.



(a) Phân bố đều



(b) Phân bố đối xứng

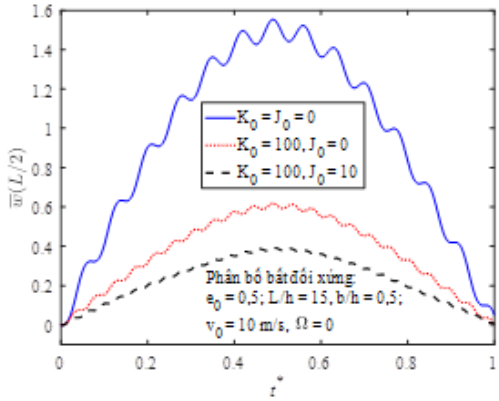


(c) Phân bố bất đối xứng

Hình 5. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng lên đường cong độ võng-thời gian của dầm FGP với 3 quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau

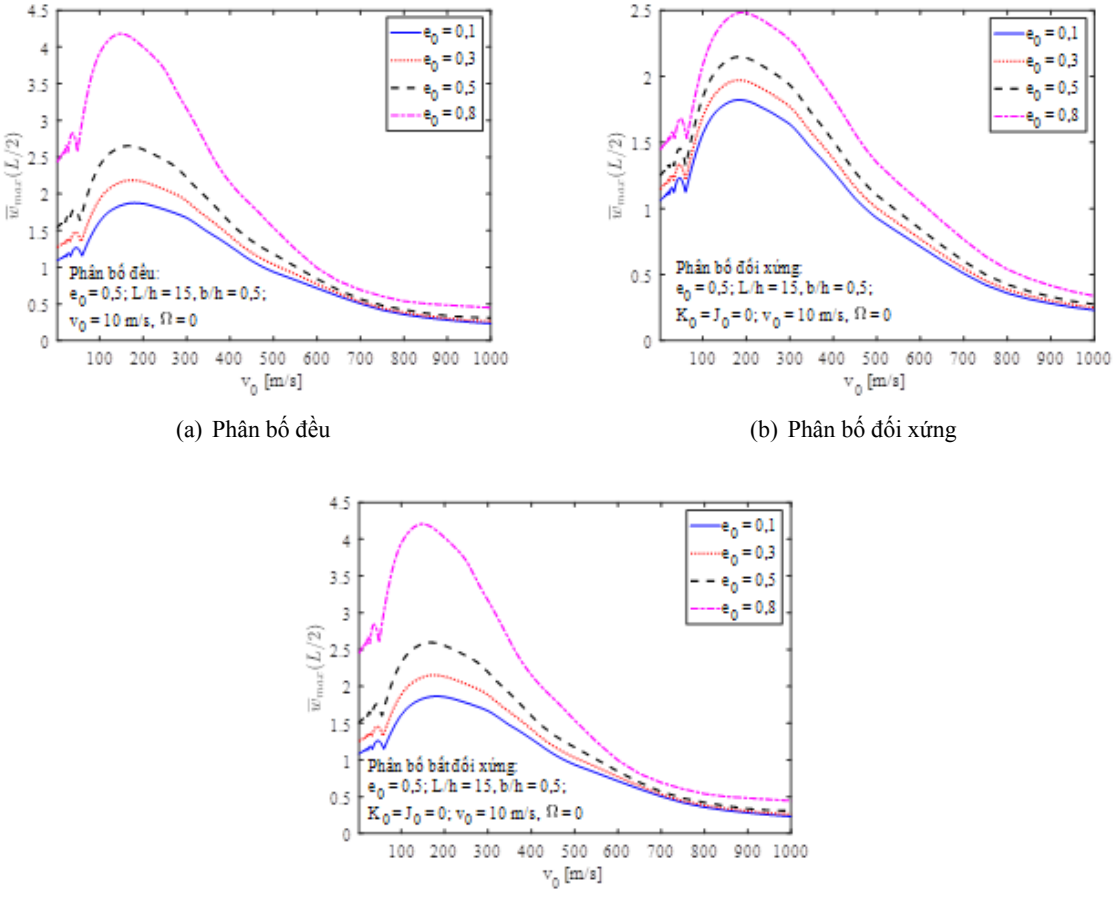
Ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi lên đáp ứng động của dầm FGP phân bố bất đối xứng ($\Omega = 0; L/h = 15, b/h = 0,5; e_0 = 0,5$) được thể hiện qua đồ thị trên Hình 6. Từ đây ta thấy, dầm không có nền đàn hồi luôn có độ võng $\bar{w}(L/2)$ lớn nhất, sau đó đến trường hợp dầm trên nền Winkler; dầm trên nền Pasternak luôn có độ võng nhỏ nhất; với các giá trị độ võng tương ứng cho ba mô hình nền là 1,5530; 0,6184 và 0,3910.

Các đường cong mô tả quan hệ giữa độ võng lớn nhất tại giữa dầm $\bar{w}_{\max}(L/2)$ và vận tốc di chuyển v_0 của lực kích thích, với các giá trị khác nhau của hệ số lỗ rỗng trong ba trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng của dầm FGP được thể hiện



Hình 6. Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên đường cong độ võng-thời gian của dầm FGP

trên đồ thị ở Hình 7. Trong ví dụ này, dầm FGP có $\Omega = 0; L/h = 15, b/h = 0{,}5; e_0 = 0{,}5; K_0 = J_0 = 0$. Kết quả từ các đồ thị này cho thấy, với cả ba quy luật phân bố lỗ rỗng, khi tăng dần tốc độ di chuyển của lực kích động, độ võng biến thiên rất phức tạp, khi v_0 đạt tới một giá trị nhất định (tùy thuộc vào hệ số lỗ rỗng trong từng trường hợp phân bố lỗ rỗng), độ võng $\bar{w}_{\max}(L/2)$ đơn điệu tăng, đạt cực trị rồi lại giảm dần. Sự thay đổi một cách liên tục, lặp lại nhiều lần tính chất tăng dần, rồi lại giảm dần độ võng khi vận tốc v_0 còn nhỏ được giải thích bởi số chu trình dao động của dầm được thực hiện nhiều khi vận tốc lực di động bé. Ngoài ra, về ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng e_0 và quy luật phân bố lỗ rỗng lên đường cong đáp ứng, có thể thấy rằng, với cùng một giá trị vận tốc v_0: Hai quy luật phân bố lỗ rỗng là phân bố đều và phân bố bất đối xứng cho kết quả khá gần nhau, và lớn hơn so với trường hợp phân bố đối xứng; đồng thời, việc tăng hệ số lỗ rỗng làm giảm độ cứng dầm dẫn đến độ võng $\bar{w}_{\max}(L/2)$ tăng.



(a) Phân bố đều

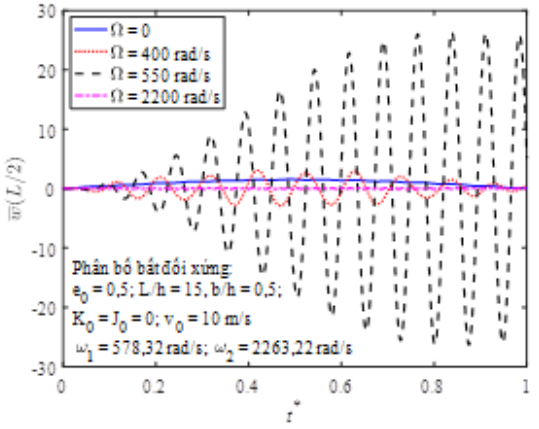
(b) Phân bố đối xứng

(c) Phân bố bất đối xứng

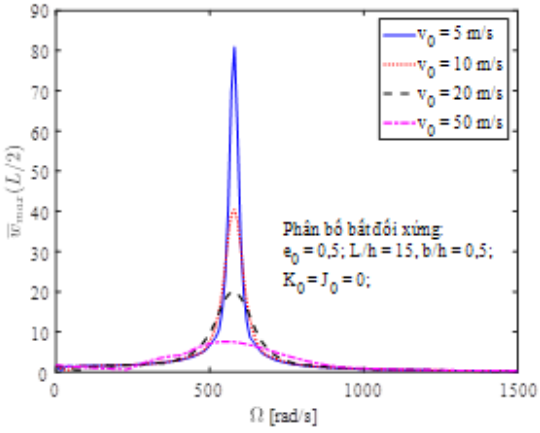
Hình 7. Ảnh hưởng của vận tốc di chuyển lực kích thích hệ số lỗ rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng của dầm FGP

Ảnh hưởng của tần số lực di động lên đáp ứng của dầm FGP phân bố bất đối xứng: $h = 0{,}1$, $L/h = 15, b/h = 0{,}5; e_0 = 0{,}5; K_0 = J_0 = 0$ được thể hiện bằng đồ thị ở Hình 8 và Hình 9. Lưu ý rằng, hai tần số dao động riêng đầu tiên của dầm với các thông số đầu vào như trên là $\omega_1 = 578{,}32$ rad/s và $\omega_2 = 2263{,}22$ rad/s. Có thể nhận thấy, với mỗi giá trị của vận tốc v_0, khi tần số lực kích thích tiến gần

tới tần số dao động cơ bản của dầm, độ võng $\bar{w}_{\max}(L/2)$ của dầm đặc biệt tăng nhanh, độ võng là lớn nhất khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Ví dụ như trong trường hợp v_0 = 10 m/s, khi tần số dao động của lực kích thích $\Omega = 0, \Omega$ = 400 rad/s, Ω = 550 rad/s, Ω = 2200 rad/s, độ võng lớn nhất của dầm có giá trị tương ứng là $\bar{w}_{\max}(L/2)$ = 1,5530; $\bar{w}_{\max}(L/2)$ = 3,0707; $\bar{w}_{\max}(L/2)$ = 26,3592; $\bar{w}_{\max}(L/2)$ = 0,1029. Các kết quả trên Hình 9 cho thấy, trong miền cộng hưởng, việc tăng tốc độ di chuyển của lực kích thích góp phần làm giảm nhanh độ võng của dầm.



Hình 8. Đường cong đáp ứng độ võng theo thời gian với các tần số của lực kích thích khác nhau (v_0 = 10 m/s)



Hình 9. Ảnh hưởng của tần số lực kích thích lên đáp ứng của dầm FGP với các giá trị khác nhau của vận tốc v_0

6. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình giải tích tính toán tần số dao động riêng và đáp ứng động lực học trong dầm FGP, dưới tác dụng của tải trọng điều hòa di động. Nghiệm giải tích được thiết lập cho dầm khi kể đến vị trí thực của mặt trung hòa; chương trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng, cho thấy đủ tin cậy. Với việc sử dụng hệ quy chiếu gắn với mặt trung hòa, các phương trình quan hệ của dầm FGP trở nên đơn giản hơn, tương tự như dầm đẳng hướng. Các khảo sát số cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, nền đàn hồi, tốc độ di chuyển và tần số lực kích thích di động đến đáp ứng động của dầm. Các kết quả nhận được cho thấy:

- Quy luật phân bố không đều đối xứng có ưu điểm phát huy được độ cứng kết cấu, cho tần số dao động riêng lớn hơn và độ võng động bé hơn so với hai quy luật phân bố còn lại: Phân bố đều và phân bố không đều bất đối xứng khi chịu tải di động;
- Khi tăng hệ số rỗng, độ cứng của kết cấu giảm, tần số dao động riêng giảm, độ võng động của dầm tăng;
- Khi tăng các hệ số độ cứng của nền đàn hồi, độ cứng của kết cấu tăng, làm cho tần số dao động riêng tăng;
- Khi tần số của lực kích thích tiến dần tới tần số dao động cơ bản của dầm, hiện tượng cộng hưởng xảy ra, độ võng của dầm tăng đột biến; khi đó, tốc độ di chuyển của lực kích thích càng lớn thì độ võng của dầm càng giảm mạnh;
- Tỷ số kích thước dầm chỉ ảnh hưởng nhẹ tới tần số dao động cơ bản không thứ nguyên khi $L/h \leq 15$.

Các kết quả nhận được là hữu ích cho công tác nghiên cứu, thiết kế các kết cấu dầm làm bằng vật liệu FGP chịu tải di động.

Tài liệu tham khảo

[1] Lopatnikov, S. L., Gama, B. A., Haque, M. J., Krauthauser, C., Gillespie, J. W., Guden, M., Hall, I. W. (2003). Dynamics of metal foam deformation during Taylor cylinder–Hopkinson bar impact experiment. *Composite Structures*, 61(1-2):61–71.

[2] Pinnoji, P. K., Mahajan, P., Bourdet, N., Deck, C., Willinger, R. (2010). Impact dynamics of metal foam shells for motorcycle helmets: Experiments & numerical modeling. *International Journal of Impact Engineering*, 37(3):274–284.

[3] Lefebvre, L.-P., Banhart, J., Dunand, D. (2008). Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments. *Advanced Engineering Materials*, 10(9):775–787.

[4] Ahmad, Z., Thambiratnam, D. P. (2009). Dynamic computer simulation and energy absorption of foam-filled conical tubes under axial impact loading. *Computers & Structures*, 87(3-4):186–197.

[5] Wu, D., Liu, A., Huang, Y., Huang, Y., Pi, Y., Gao, W. (2018). Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis. *Engineering Structures*, 165:287–301.

[6] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109:14–22.

[7] Chen, D., Kitipornchai, S., Yang, J. (2016). Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-Walled Structures*, 107:39–48.

[8] Akbaş, Ş. D. (2018). Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams. *Composite Structures*, 186:293–302.

[9] Noori, A. R., Aslan, T. A., Temel, B. (2021). Dynamic Analysis of Functionally Graded Porous Beams Using Complementary Functions Method in the Laplace Domain. *Composite Structures*, 256:113094.

[10] Frýba, L. (2013). *Vibration of solids and structures under moving loads*, volume 1. Springer Science & Business Media.

[11] Thambiratnam, D., Zhuge, Y. (1996). Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, 198(2):149–169.

[12] Huang, M.-H., Thambiratnam, D. P. (2002). Dynamic Response of Plates on Elastic Foundation to Moving Loads. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(9):1016–1022.

[13] Gbadeyan, J. A., Oni, S. T. (1992). Dynamic response to moving concentrated masses of elastic plates on a non-Winkler elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 154(2):343–358.

[14] Kim, S.-M., Roesset, J. M. (1998). Moving Loads on a Plate on Elastic Foundation. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(9):1010–1017.

[15] Zhu, X. Q., Law, S. S. (2003). Dynamic Behavior of Orthotropic Rectangular Plates under Moving Loads. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(1):79–87.

[16] Şimşek, M. (2010). Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Composite Structures*, 92(4):904–917.

[17] Şimşek, M., Kocatürk, T. (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 90(4):465–473.

[18] Şimşek, M., Kocatürk, T., Akbaş, Ş. (2012). Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures*, 94(8):2358–2364.

[19] Khalili, S., Jafari, A., Eftekhari, S. (2010). A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Composite Structures*, 92(10):2497–2511.

[20] Malekzadeh, P., Monajjemzadeh, S. M. (2015). Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(3): 248–258.

[21] Wang, Y., Wu, D. (2016). Thermal effect on the dynamic response of axially functionally graded beam subjected to a moving harmonic load. *Acta Astronautica*, 127:171–181.

[22] Trung, P. Đ. T. (2014). Phân tích động lực học của dầm phân lớp chức năng trên nền đàn hồi chịu khối lượng di động. *Tạp chí Xây dựng - Bộ Xây dựng*, 2:105–109.
[23] Le, T. H., Gan, B. S., Trinh, T. H., Nguyen, D. K. (2014). Finite element analysis of multi-span functionally graded beams under a moving harmonic load. *Mechanical Engineering Journal*, 1(3):CM0013–CM0013.
[24] Ha, L. T., Kien, N. D., Anh, V. T. (2015). Dynamic behavior of nonuniform functionally graded Euler-Bernoulli beams under multiple moving forces. *Vietnam Journal of Mechanics*, 37(3):151–168.
[25] Thom, T. T., Huan, N. Q., Kien, N. D., Tuyen, B. V. (2016). Fundamental frequency analysis of FG porous beams in thermal environment based on the improved third-order shear deformation theory. *Proceedings of the 4th International Conference on Engineering Mechanics and Automation - ICEMA4, Hanoi*, 393–400.
[26] Tran, T. T., Pham, Q.-H., Nguyen-Thoi, T. (2020). Dynamic Analysis of Functionally Graded Porous Plates Resting on Elastic Foundation Taking into Mass subjected to Moving Loads Using an Edge-Based Smoothed Finite Element Method. *Shock and Vibration*, 2020:1–19.
[27] Nam, N. S., Phương, L. N. (2021). Sử dụng dạng giải tích phân tích dao động cưỡng bức có cản của dầm Timoshenko chịu tải di động. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 15(5V): 44–57.
[28] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2017). Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions. *Composite Structures*, 182:91–98.
[29] Ashby, M. F., Evans, T., Fleck, N. A., Hutchinson, J. W., Wadley, H. N. G., Gibson, L. J. (2000). *Metal foams: a design guide*. Elsevier.
[30] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams#. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
[31] Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.
[32] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
[33] Atmane, H. A., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
[34] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1): 57–66.
[35] Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall.