

NGHIỆM GIẢI TÍCH CỦA DẦM TIMOSHENKO FGM XỐP CHỊU UỐN CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC LIÊN KẾT ĐÀN HỒI

Chu Thanh Bình^a, Nguyễn Văn Long^{a,*}, Trần Minh Tú^a, Lê Thanh Hải^{a,b}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

^b*Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh, 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An, Việt Nam*

Nhận ngày 24/5/2022, Sửa xong 06/7/2022, Chấp nhận đăng 07/7/2022

Tóm tắt

Trong bài báo này, các tác giả xây dựng lời giải giải tích phân tích ứng xử uốn của dầm Timoshenko bằng vật liệu FGM xốp có các liên kết đàn hồi ở hai đầu dầm. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng của vật liệu được xem xét bao gồm: phân bố đều, phân bố đối xứng và phân bố bất đối xứng. Hệ trục tọa độ gắn với mặt trung hòa vật liệu được sử dụng nhằm đơn giản hóa các quan hệ nội lực-chuyển vị. Hệ phương trình cân bằng và điều kiện biên cho dầm được thiết lập trên cơ sở nguyên lý biến phân. Các kết quả được kiểm chứng với các kết quả đã có trong các tài liệu, trong đó các liên kết lý tưởng thông dụng là những trường hợp đặc biệt thu được. Ảnh hưởng của tham số vật liệu, hình học và độ cứng của các liên kết đàn hồi đến ứng xử tĩnh của dầm được khảo sát qua các ví dụ số.

Từ khóa: liên kết đàn hồi; dầm FGM xốp; phân tích uốn; dầm Timoshenko.

ANALYTICAL SOLUTION OF TIMOSHENKO FG POROUS BEAM UNDER BENDING TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF ELASTIC END SUPPORTS

Abstract

This paper presents the analytical solutions for bending analysis of Timoshenko functionally graded porous beam having elastic supports at both ends. Three porosity distribution patterns including uniform, non-uniform symmetric, and non-uniform asymmetric are considered. The reference coordinate system coincides with the neutral surface and it is used to get a simple form of stress-displacement relations. Equilibrium equations and boundary conditions are obtained via the energy variational principle. The results are verified with available results in the literature, in which conventional perfect connections are particular cases. The effect of material and geometry parameters, and stiffness of elastic support on the static behavior of the beam is investigated through numerical examples.

Keywords: elastic connections; FGM porous beam; bending analysis; Timoshenko beam.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2022-16\(3V\)-07](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2022-16(3V)-07) © 2022 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Vật liệu FGM xốp là loại vật liệu có cơ tính biến đổi trơn (functionally graded porous material-FGP) theo tọa độ không gian kết cấu, có thể là vô cơ hoặc hữu cơ, chứa các lỗ rỗng (pores) dưới dạng các hốc (cavity), các ống (chanel), hay khe hở (interstice) nằm sâu trong bề mặt. Loại vật liệu này được sử dụng trong hệ thống hấp thụ năng lượng, cách âm, trao đổi nhiệt; làm màng lọc, lưới chắn bảo vệ điện từ (electromagnetic shielding); hay làm lớp vật liệu bảo vệ cách điện, cách nhiệt, cách âm,

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: longnv@huce.edu.vn (Long, N. V.)

... Các kết cấu nhẹ sử dụng vật liệu xốp (porous material) được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như hàng không vũ trụ, công nghệ đóng tàu, ô tô, xây dựng dân dụng và các lĩnh vực y sinh [1–4].

Do có tính ứng dụng cao và sở hữu nhiều đặc tính nổi trội nên các kết cấu sử dụng vật liệu xốp nói chung và dầm bằng vật liệu xốp nói riêng, đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học trong và ngoài nước, thể hiện qua một số các công bố trong thời gian gần đây. Sử dụng lời giải theo phương pháp Ritz và mô hình dầm Timoshenko, Chen [5] nghiên cứu ứng xử uốn và ổn định đàn hồi của dầm FGM xốp với hai dạng phân bố lỗ rỗng bất đối xứng. Babaei [6] sử dụng lý thuyết dầm bậc cao để phân tích ứng xử tĩnh và ổn định của dầm FGM xốp với ba dạng phân bố lỗ rỗng, ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng, dạng phân bố, nền đàn hồi đến lực tới hạn, chuyển vị và các thành phần ứng suất đã được khảo sát. Sử dụng lời giải giải tích Phuong và cs. [7] phân tích uốn dầm bằng vật liệu FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi, sử dụng hệ quy chiếu là mặt trung hoà. Cũng với cách tiếp cận này Long và cs. [8] phân tích tĩnh dầm FGM có lỗ rỗng vi mô với các điều kiện biên khác nhau.

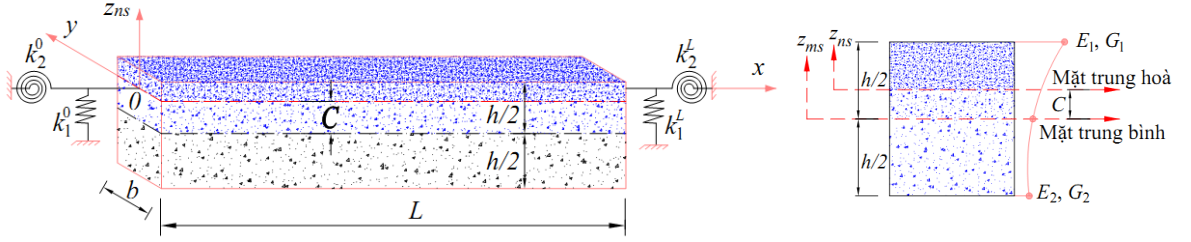
Trong thực tế, các liên kết rất đa dạng và thường không là liên kết lý tưởng, do vậy khi mô hình hóa kết cấu, các liên kết đàn hồi thường được đưa vào. Liên kết đàn hồi trong kết cấu khung phẳng được đề cập đến trong tài liệu của Liên và Khiêm [9] và các nghiên cứu của Hào và Khuyến [10], Liên và cs. [11]. Ứng xử của kết cấu dầm có xét đến ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi cũng đã được các tác giả quan tâm nghiên cứu, chủ yếu là với dầm đẳng hướng. Chun [12] nghiên cứu dao động tự do của dầm một đầu khớp–đàn hồi, một đầu tự do. Maurizi và cs. [13] nghiên cứu dao động tự do của dầm tiết diện không đổi, một đầu khớp–đàn hồi, một đầu tự do bị hạn chế chuyển vị tịnh tiến. Dao động của dầm đặt trên nền đàn hồi gián đoạn được thực hiện bởi Doyle và Pavlovic [14]. Abbas [15] nghiên cứu dao động của dầm Timoshenko với hai đầu dầm là các liên kết đàn hồi. Dao động tự do và ứng xử ổn định của dầm, cột tiết diện không đổi với các lò xo xoắn làm việc đàn hồi phi tuyến tại hai đầu dầm được nghiên cứu bởi Rao and Naidu [16]. Dao động tự do của dầm Euler–Bernoulli nằm trên nền đàn hồi Winkler được nghiên cứu bởi Kacar và cs. [17]. Kim, H.K. và Kim, M.S. [18] nghiên cứu dao động của dầm có các điều kiện liên kết tổng quát sử dụng chuỗi Fourier. Li và cs. [19] nghiên cứu đặc trưng tần số dao động của dầm đẳng hướng có các liên kết đàn hồi ở hai đầu dầm. Yayli và cs. [20] nghiên cứu dao động riêng của dầm Euler–Bernoulli trên nền đàn hồi với các liên kết đàn hồi ở hai đầu dầm.

Qua nghiên cứu tổng quan, có thể thấy rằng, bài toán uốn cho dầm FGM xốp sử dụng các liên kết đàn hồi còn rất hạn chế, cần tiếp tục nghiên cứu đánh giá chi tiết. Trong bài báo này, lý thuyết dầm Timoshenko được sử dụng để phân tích dầm FGM xốp có các liên kết đàn hồi trong đó xét đến yếu tố mặt trung hòa vật liệu. Các phương trình cân bằng của dầm được thiết lập trên cơ sở nguyên lý thế năng cực tiểu. Ba quy luật phân bố của lỗ rỗng bao gồm: phân bố đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng theo chiều cao dầm được thực hiện trong các phân tích. Các kết quả số cho thấy ảnh hưởng của các tham số vật liệu như hệ số rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng, tham số hình học và độ cứng các liên kết đàn hồi lên đáp ứng về độ võng và mô men uốn của dầm FGM xốp.

2. Mô hình dầm bằng vật liệu FGM xốp

Trong nghiên cứu này, dầm FGM xốp có chiều dài L và liên kết đàn hồi ở 2 đầu mút dầm. Các trục tọa độ x, y nằm trong mặt phẳng ngang, trục z theo phương chiều cao dầm. Do có cơ tính thay đổi theo tọa độ chiều cao dầm, mặt trung hòa của dầm có thể không trùng với mặt trung bình. Để chỉ rõ vị trí mặt trung hòa của dầm FGM xốp, hai mặt phẳng khác nhau được sử dụng cho tọa độ z : z_{ms} và z_{ns} tương ứng là tọa độ tính từ mặt trung bình và mặt trung hòa (xem Hình 1). Giả thiết rằng, trong

bài toán uốn phẳng, liên kết đàn hồi tại mỗi đầu được đặc trưng bởi hai lò xo có độ cứng uốn và độ cứng xoắn: k_1^0, k_2^0 tại đầu mút trái dầm ($z = 0$), và k_1^L, k_2^L tại đầu mút phải dầm ($z = L$).



Hình 1. Mô hình dầm FGM xốp có liên kết đàn hồi ở hai đầu

Các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo chiều cao dầm, phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng [21, 22]:

Phân bố đều - Dạng 1:

$$\{E, G\} = \{E_1, G_1\} (1 - e_0 \chi); \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (1)$$

Phân bố đối xứng - Dạng 2:

$$\{E(z_{ms}), G(z_{ms})\} = \{E_1, G_1\} \left[1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z_{ms}}{h} \right) \right] \quad (2)$$

Phân bố bất đối xứng - Dạng 3:

$$\{E(z_{ms}), G(z_{ms})\} = \{E_1, G_1\} \left[1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z_{ms}}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3)$$

trong đó, hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 được xác định bởi: $e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1$; E_1, G_1 và E_2, G_2 lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt ($G_i = E_i / [2(1 + \nu)]$; $i = 1; 2$). Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày: $\nu = \text{const}$.

Vị trí mặt trung hòa của dầm FGM xốp trong trường hợp phân bố bất đối xứng không trùng mặt trung bình, được xác định từ điều kiện [23]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z_{ms} - C) E(z_{ms}) dz_{ms} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \left[\int_{-h/2}^{h/2} z_{ms} E(z_{ms}) dz \right] / \left[\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz \right] \quad (4)$$

3. Các hệ thức và phương trình chủ đạo

Sử dụng khái niệm mặt trung hòa, trường chuyển vị theo lý thuyết dầm Timoshenko [24]:

$$u(x, z_{ns}) = u_0(x) + z_{ns} \theta_x(x); \quad w(x, z_{ns}) = w_0(x) \quad (5)$$

trong đó u_0, w_0 tương ứng là chuyển vị màng và độ võng của một điểm trên mặt trung hòa; θ_x là góc xoay của mặt cắt ngang quanh trục y của dầm.

Theo đó, các thành phần biến dạng bao gồm:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = u_{0,x} + z_{ns}\theta_{x,x} = \varepsilon_x^0 + z_{ns}\varepsilon_x^0; \quad \gamma_{xz} = w_{,x} + u_{,z} = w_{0,x} + \theta_x = \gamma_{xz}^0 \quad (6)$$

Dấu (,) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo biến tương ứng.

Đối với dầm vật liệu FGM xoắn, quan hệ ứng suất biến dạng:

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x; \quad \tau_{xz} = Q_{66}\gamma_{xz} \quad (7)$$

trong đó: $Q_{11} = E(z_{ns})$; $Q_{66} = G(z_{ns})$.

Áp dụng nguyên lý thế năng cực tiểu [24]:

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (8)$$

Biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx + \left(k_1^0 w_0 \delta w_0 + k_2^0 \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=0} + \left(k_1^L w_0 \delta w_0 + k_2^L \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=L} \\ &= \int_0^L \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + Q_{xz} \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \theta_x \right) \right] dx \\ &\quad + \left(k_1^0 w_0 \delta w_0 + k_2^0 \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=0} + \left(k_1^L w_0 \delta w_0 + k_2^L \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó: N_x , M_x và Q_{xz} là các thành phần nội lực, chúng liên hệ với các thành phần chuyển vị:

$$N_x = A_{11}u_{0,x}; \quad M_x = D_{11}\theta_{x,x}; \quad Q_{xz} = A_{55}^s(w_{0,x} + \theta_x) \quad (10)$$

$$\text{với: } A_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_{ns}) dz_{ns}; \quad D_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_{ns}^2 E(z_{ns}) dz_{ns}; \quad A_{55}^s = bk_s \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} dz_{ns}.$$

Hệ số hiệu chỉnh cắt $k_s = 5/6$ được sử dụng trong nghiên cứu này.

Biến phân thế năng của tải trọng uốn q :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta w_0 dx \quad (11)$$

Thay các biểu thức xác định của δU và δV từ (9) và (11) vào (8), rồi tích phân từng phần, ta được:

$$\begin{aligned} 0 &= (N_x \delta u_0 + M_x \delta \theta_x + Q_{xz} \delta w_0) \Big|_0^L + \left(k_1^0 w_0 \delta w_0 + k_2^0 \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=0} + \left(k_1^L w_0 \delta w_0 + k_2^L \theta_x \delta \theta_x \right) \Big|_{x=L} \\ &\quad - \int_0^L [N_{x,x} \delta u_0 + (M_{x,x} - Q_{xz}) \delta \theta_x + (Q_{xz,x} + q) \delta w_0] dx \end{aligned} \quad (12)$$

Cho các hệ số của các biến phân trên chiều dài dầm L bằng không, hệ phương trình cân bằng thu được có dạng:

$$\delta u_0 : N_{x,x} = 0; \quad \delta w_0 : Q_{xz,x} + q = 0; \quad \delta \theta_x : M_{x,x} - Q_{xz} = 0 \quad (13)$$

Thay (10) vào (13), hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị nhận được như sau:

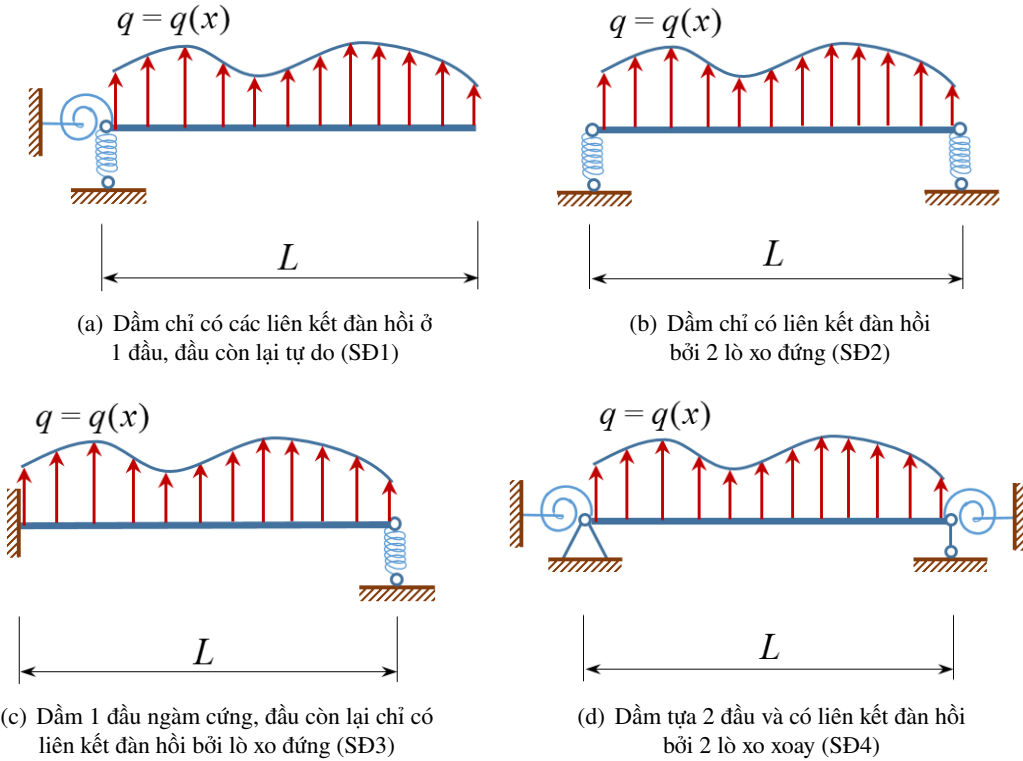
$$A_{11}u_{0,xx} = 0; \quad A_{55}^s w_{0,xx} + A_{55}^s \theta_{x,x} + q = 0; \quad D_{11} \theta_{x,xx} - A_{55}^s w_{0,x} - A_{55}^s \theta_x = 0 \quad (14)$$

Các tham số điều kiện biên: chuyển vị, lực cũng có thể rút ra từ (12):

$$\begin{aligned} 0 = N_x \delta u_0|_{x=L} + (Q_{xz} + k_1^L w_0) \delta w_0|_{x=L} + (M_x + k_2^L \theta_x) \delta \theta_x|_{x=L} \\ - N_x \delta u_0|_{x=0} - (Q_{xz} - k_1^0 w_0) \delta w_0|_{x=0} - (M_x - k_2^0 \theta_x) \delta \theta_x|_{x=0} \end{aligned} \quad (15)$$

Theo đó, các phương trình điều kiện biên:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x = 0: N_x \delta u_0 = 0; \quad (Q_{xz} - k_1^0 w_0) \delta w_0 = 0; \quad (M_x - k_2^0 \theta_x) \delta \theta_x = 0 \\ \text{Tại } x = L: N_x \delta u_0 = 0; \quad (Q_{xz} + k_1^L w_0) \delta w_0 = 0; \quad (M_x + k_2^L \theta_x) \delta \theta_x = 0 \end{aligned} \quad (16)$$



Hình 2. Sơ đồ tính của một số dầm chịu uốn phẳng có liên kết đàn hồi

Dưới đây, bài báo xem xét các trường hợp liên kết thường gặp sau (xem Hình 2):

Trường hợp 1: Dầm chỉ có các liên kết đàn hồi ở 1 đầu, đầu còn lại tự do (SD1):

$$\xi_1, \eta_1 \neq 0; \quad \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (17)$$

Dầm trở thành có liên kết 1 đầu ngàm 1 đầu tự do (CF) khi:

$$\xi_1 = \eta_1 = \infty; \quad \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (18)$$

Trường hợp 2: Dầm chỉ có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo đứng (SD2):

$$\xi_1, \xi_2 \neq 0; \quad \eta_1 = \eta_2 = 0 \quad (19)$$

Dầm trở thành có liên kết khớp ở 2 đầu (SS) khi:

$$\xi_1 = \xi_2 = \infty; \quad \eta_1 = \eta_2 = 0 \quad (20)$$

Trường hợp 3: Dầm 1 đầu ngàm cứng, đầu còn lại chỉ có liên kết đàn hồi bởi lò xo đứng (SD3):

$$\xi_1 = \eta_1 = \infty; \quad \xi_2 \neq 0, \eta_2 = 0 \quad (21)$$

Dầm trở thành có liên kết 1 đầu ngàm 1 đầu khớp (CS) khi:

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = \infty; \quad \eta_2 = 0 \quad (22)$$

Trường hợp 4: Dầm tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay (SD4):

$$\xi_1, \xi_2 = \infty; \quad \eta_1, \eta_2 \neq 0 \quad (23)$$

Dầm trở thành có liên kết ngàm ở 2 đầu (CC) khi:

$$\xi_1 = \xi_2 = \infty; \quad \eta_1 = \eta_2 = \infty \quad (24)$$

trong đó, các độ cứng lò xo không thứ nguyên được xác định bởi:

$$\xi_1 = \frac{k_1^0 L^3}{E_1 I}, \quad \xi_2 = \frac{k_1^L L^3}{E_1 I}, \quad \eta_1 = \frac{k_2^0 L}{E_1 I}, \quad \eta_2 = \frac{k_2^L L}{E_1 I}; \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (25)$$

4. Lời giải chính xác

Phương trình thứ nhất trong (14) chỉ chứa một ẩn u_0 , nghiệm của phương trình này là:

$$u_0 = B_1 x + B_2 \quad (26)$$

trong đó: B_1, B_2 là các hằng số tích phân, được xác định theo điều kiện biên của bài toán.

Hai phương trình còn lại trong (14) gồm hai ẩn số w_0, θ_x ; sau một số biến đổi ta được:

$$A_{55}^s D_{11} w_{0,xxxx} = A_{55}^s q - D_{11} q_{,xx}; \quad \theta_x = -\frac{D_{11}}{A_{55}^s} w_{0,xxx} - w_{0,x} - \frac{D_{11}}{A_{55}^s} q_{,x} \quad (27)$$

Phương trình thứ nhất trong (27) chỉ còn một ẩn w_0 , ta sẽ tìm nghiệm của phương trình này trước; sau khi giải được w_0 ta sẽ suy ra θ_x từ phương trình thứ hai.

Khi dầm chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0$, ta được nghiệm chuyển vị:

$$w_0 = \frac{q_0}{D_{11}} \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4; \quad (28)$$

$$\theta_x = -\frac{q_0}{D_{11}} \frac{x^3}{6} - C_1 \frac{x^2}{2} - \left(C_2 + \frac{q_0}{A_{55}^s} \right) x - \left(C_1 \frac{D_{11}}{A_{55}^s} + C_3 \right)$$

Khi dầm chịu tác dụng của tải trọng phân bố hình sin $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$, ta được nghiệm chuyển vị:

$$w_0 = \left(A_{55}^s + D_{11} \frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{q_0 L^4}{\pi^4 A_{55}^s D_{11}} \sin \frac{\pi x}{L} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4;$$

$$\theta_x = \left[\left(A_{55}^s + D_{11} \frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{q_0 L}{\pi A_{55}^s} - \left(A_{55}^s + D_{11} \frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{q_0 L^3}{\pi^3 A_{55}^s D_{11}} - \frac{D_{11}}{A_{55}^s} \frac{q_0 \pi}{L} \right] \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$- C_1 \frac{x^2}{2} - C_2 x - C_1 \frac{D_{11}}{A_{55}^s} - C_3$$
(29)

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 phụ thuộc vào điều kiện biên trong (16), và được trình bày trong phần Phụ lục A.

5. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình máy tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Trong nghiên cứu này, ứng xử uốn được thực hiện cho dầm FGM xấp, có xét đến ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi ở hai đầu dầm.

Bảng 1. Kiểm chứng độ võng không thứ nguyên của dầm FGM xấp ($L/h = 5$), liên kết lý tưởng với các hệ số lỗ rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau

Phân bố lỗ rỗng	Điều kiện biên	Nguồn	e_0		
			0,2	0,4	0,6
Dạng 1	SS	Nguyen và cs. [25]	0,056	0,066	0,083
		Bài báo	0,0556	0,0660	0,0825
	CF	Nguyen và cs. [25]	0,186	0,221	0,276
		Bài báo	0,1868	0,2216	0,2771
Dạng 2	CS	Nguyen và cs. [25]	0,026	0,030	0,038
		Bài báo	0,0267	0,0317	0,0397
	CC	Nguyen và cs. [25]	0,016	0,018	0,023
		Bài báo	0,0157	0,0186	0,0233
Dạng 2	SS	Nguyen và cs. [25]	0,053	0,058	0,065
		Bài báo	0,0525	0,0575	0,0635
	CF	Nguyen và cs. [25]	0,176	0,194	0,216
		Bài báo	0,1763	0,1927	0,2128
Dạng 2	CS	Nguyen và cs. [25]	0,025	0,027	0,032
		Bài báo	0,0255	0,0282	0,0317
	CC	Nguyen và cs. [25]	0,015	0,017	0,020
		Bài báo	0,0151	0,0169	0,0192

5.1. Kiểm chứng độ võng cho dầm FGM xấp

Để kiểm chứng độ tin cậy của nghiệm giải tích thiết lập trong bài báo, các kết quả số trong trường hợp dầm FGM xấp ($E_1 = 200$ GPa; $\nu = 1/3$; $b = h = 0,1$ m, $L/h = 5$) với 4 trường hợp liên kết lý tưởng được thực hiện. Dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0 = 10^4$ N/m.

Các kết quả tính toán độ võng không thứ nguyên của dầm $\bar{w} = 10^4 w \left(\frac{L}{2} \right) / h$ với các hệ số lỗ rỗng và quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau được trình bày trong Bảng 1. Có thể nhận thấy, các kết quả thu được từ bài báo hoàn toàn phù hợp với nghiệm bán giải tích theo phương pháp Ritz sử dụng lý thuyết dầm biến dạng cắt 2 ẩn cải tiến của tác giả Nguyen và cs. [25].

5.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số độ cứng liên kết đàn hồi, vật liệu, kích thước hình học lên ứng xử uốn của dầm

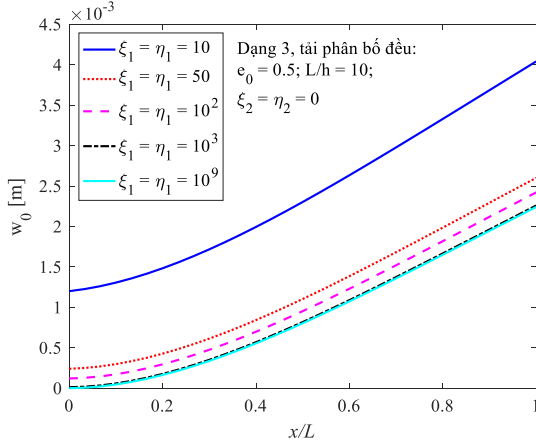
Trong phần này, dầm bằng vật liệu FGM xấp ($E_1 = 200$ GPa, $\nu = 1/3$, $h = 0,1$ m, $b/h = 0,5$) có kể đến ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi ở hai đầu mút dầm. Dầm chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng phân bố q ; hai trường hợp tải trọng được xem xét bao gồm: tải phân bố đều và tải phân bố hình sin.

Bảng 2. Độ võng và mô men uốn lớn nhất trong dầm FGM xấp với các tham số độ cứng lò xo khác nhau

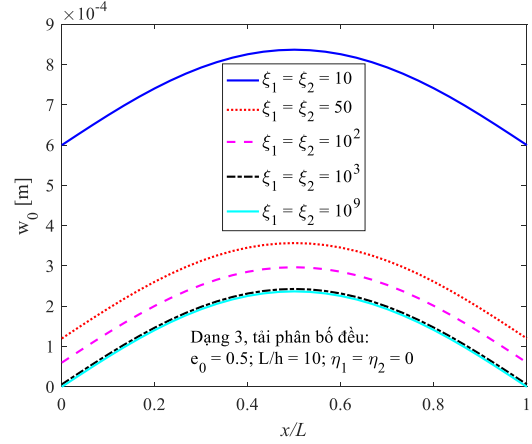
Sơ đồ dầm		Độ võng w_{\max} [mm]	Mô men uốn M_{\max} [Nm]
SD1: $\xi_2 = \eta_2 = 0$	$\xi_1 = \eta_1 = 10$	4,0417	5000
	$\xi_1 = \eta_1 = 50$	2,6017	5000
	$\xi_1 = \eta_1 = 10^2$	2,4217	5000
	$\xi_1 = \eta_1 = 10^3$	2,2597	5000
	$\xi_1 = \eta_1 = 10^9$	2,2417	5000
SD2: $\eta_1 = \eta_2 = 0$	$\xi_1 = \xi_2 = 10$	0,8369	1250
	$\xi_1 = \xi_2 = 50$	0,3569	1250
	$\xi_1 = \xi_2 = 10^2$	0,2969	1250
	$\xi_1 = \xi_2 = 10^3$	0,2429	1250
	$\xi_1 = \xi_2 = 10^9$	0,2369	1250
SD3: $\xi_1 = \eta_1 = \infty, \eta_2 = 0$	$\xi_2 = 10$	0,3756	1870,107
	$\xi_2 = 50$	0,1424	1385,649
	$\xi_2 = 10^2$	0,1218	1314,339
	$\xi_2 = 10^3$	0,1047	1247,711
	$\xi_2 = 10^9$	0,1029	1240,158
SD4: $\xi_1 = \xi_2 = \infty$	$\eta_1 = \eta_2 = 10$	0,0741	734,0568
	$\eta_1 = \eta_2 = 50$	0,0569	811,3864
	$\eta_1 = \eta_2 = 10^2$	0,0545	822,2134
	$\eta_1 = \eta_2 = 10^3$	0,0523	832,2078
	$\eta_1 = \eta_2 = 10^9$	0,0521	833,3333

Trong Bảng 2, các tác giả tiến hành khảo sát độ võng và mô men uốn lớn nhất trong dầm FGM xấp, chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0 = 10^4$ N/m với các tham số độ cứng lò xo khác nhau. Đồ thị mô tả quy luật biến thiên độ võng w_0 và mô men uốn M_x của dầm được thể hiện trên

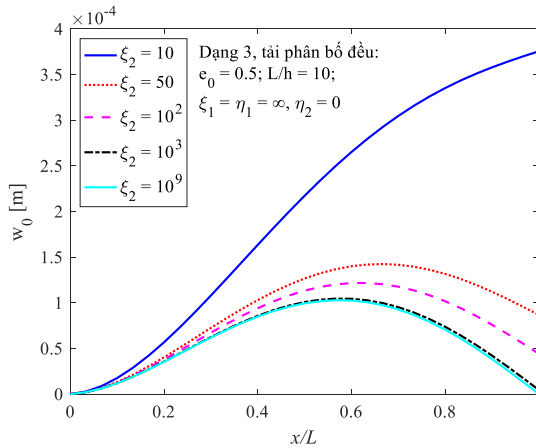
Hình 3 và Hình 4. Các kết quả cho thấy, với cả 4 trường hợp sơ đồ dầm, khi tăng dần độ cứng các lò xo, độ võng của dầm giảm dần và tiến tới hội tụ khi độ cứng lò xo đủ lớn ($\xi_1 = \eta_1 = 10^3$ với SD1, $\xi_1 = \xi_2 = 10^3$ với SD2, $\xi_2 = 10^3$ với SD3 và $\eta_1 = \eta_2 = 10^3$ với SD4). Trong khi đó, ảnh hưởng của độ cứng lò xo lên mô men uốn là khác nhau: mô men uốn không phụ thuộc độ cứng lò xo trong trường hợp SD1, SD2; mô men uốn M_{\max} giảm dần trong trường hợp SD3 và tăng dần trong trường hợp SD4 khi tăng độ cứng lò xo.



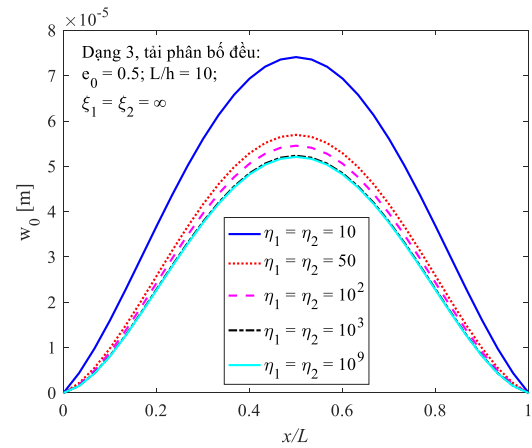
(a) Dầm chỉ có các liên kết đàn hồi ở 1 đầu, đầu còn lại tự do



(b) Dầm chỉ có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo đứng



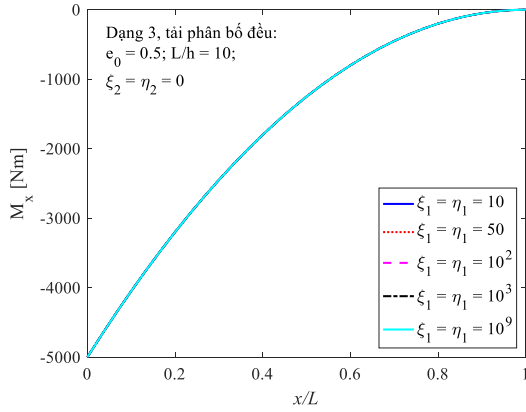
(c) Dầm 1 đầu ngàm cứng, đầu còn lại chỉ có liên kết đàn hồi bởi lò xo đứng



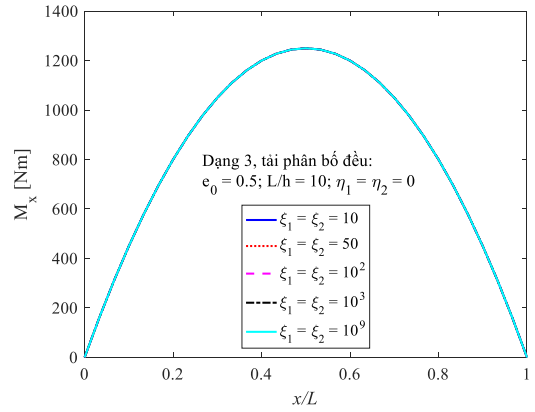
(d) Dầm tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay

Hình 3. Biến thiên độ võng w_0 của dầm với các tham số độ cứng lò xo khác nhau

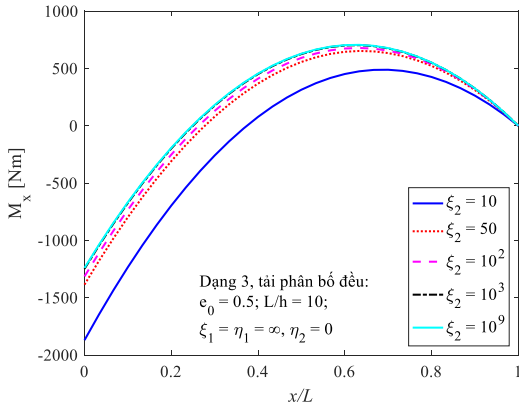
Hình 5 khảo sát ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng e_0 và quy luật phân bố lỗ rỗng lên độ võng của dầm FGM xấp tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay ($L/h = 10, \eta_1 = \eta_2 = 100$). Hai trường hợp tải phân bố được xem xét bao gồm: Tải phân bố đều và tải phân bố hình sin. Các kết quả cho thấy, với cả 2 loại tải trọng được xét, phân bố đối xứng luôn có độ võng nhỏ hơn cả, hai quy luật phân bố còn lại (phân bố đều và phân bố bất đối xứng) cho kết quả độ võng khác nhau không nhiều. Khi hệ số lỗ rỗng tăng, độ võng tăng với cả 3 trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng: Phân bố đối xứng có độ võng



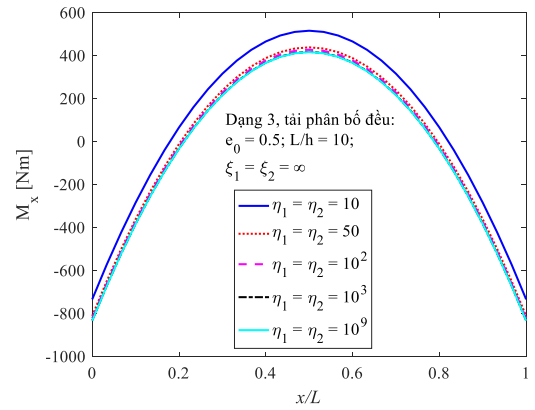
(a) Dầm chỉ có các liên kết đàn hồi ở 1 đầu, đầu còn lại tự do



(b) Dầm chỉ có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo đứng

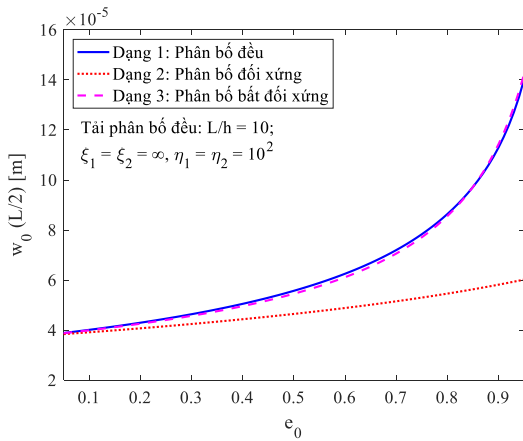


(c) Dầm 1 đầu ngàm cứng, đầu còn lại chỉ có liên kết đàn hồi bởi lò xo đứng

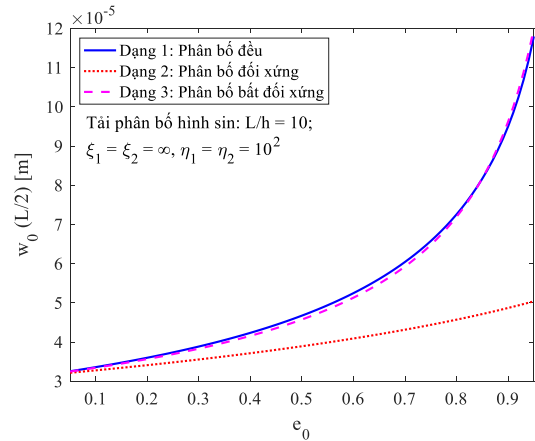


(d) Dầm tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay

Hình 4. Biến thiên mô men uốn M_x của dầm với các tham số độ cứng lò xo khác nhau



(a) Tải phân bố đều

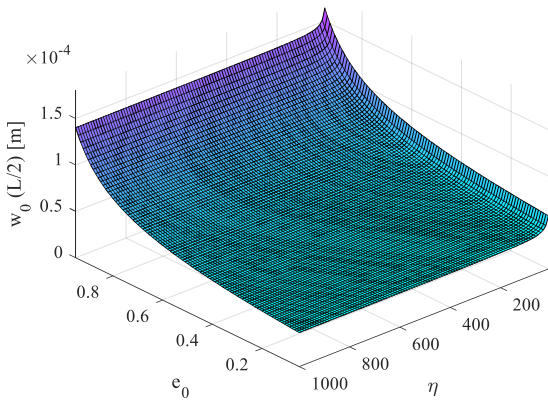


(b) Tải phân bố hình sin

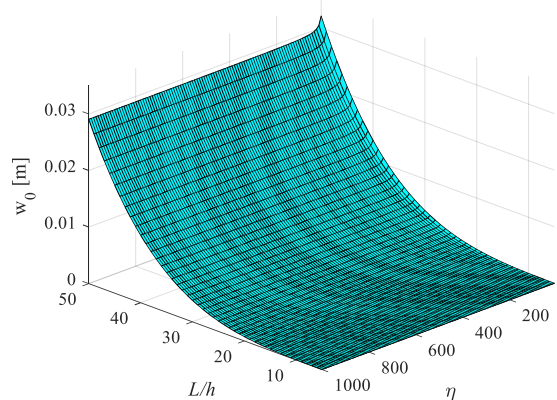
Hình 5. Ảnh hưởng của hệ số lệch và quy luật phân bố lệch lên độ võng của dầm

tăng gần như tuyến tính, trong khi hai quy luật phân bố còn lại cho độ võng tăng nhanh-phi tuyến. Hệ số lỗ rỗng càng lớn thì ảnh hưởng của quy luật phân bố lên độ võng càng rõ ràng. Các kết quả cũng cho thấy, tải phân bố đều luôn cho kết quả độ võng lớn hơn so với dầm chịu tác dụng của tải phân bố hình sin tương ứng. Ví dụ, với hệ số lỗ rỗng $e_0 = 0,5$, trong trường hợp phân bố bất đối xứng, tải phân bố hình sin cho kết quả độ võng tại chính giữa dầm là 0,0458 mm, trong khi tải phân bố đều cho kết quả độ võng là 0,545 mm (tăng 19,2%).

Hình 6 khảo sát ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng e_0 và tham số độ cứng lò xo lên độ võng tại tâm dầm FGM xếp có liên kết tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay ($L/h = 10, \eta_1 = \eta_2 = \eta$). Như mong đợi, với mỗi giá trị của tham số độ cứng lò xo, khi tăng hệ số lỗ rỗng, độ võng của dầm tăng. Đồng thời, với mỗi hệ số lỗ rỗng của vật liệu, khi tăng độ cứng lò xo xoắn, độ võng của dầm giảm; độ võng giảm nhanh trong khoảng $\eta \leq 50$, sau đó độ võng giảm chậm dần lại và tiến tới hội tụ khi $\eta \geq 100$.



Hình 6. Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng và độ cứng lò xo lên độ võng của dầm



Hình 7. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước L/h và độ cứng lò xo lên độ võng của dầm

Hình 7 khảo sát ảnh hưởng của tỷ số kích thước L/h và tham số độ cứng lò xo lên độ võng của dầm FGM xếp tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi 2 lò xo xoay ($e_0 = 0,5; \eta_1 = \eta_2 = \eta$). Trong khảo sát này, các độ cứng lò xo không thứ nguyên được xác định bởi:

$$\xi_1 = \frac{k_1^0 L_0^3}{E_1 I}, \quad \xi_2 = \frac{k_1^L L_0^3}{E_1 I}, \quad \eta_1 = \frac{k_2^0 L_0}{E_1 I}, \quad \eta_2 = \frac{k_2^L L_0}{E_1 I}; \quad L_0 = 10h; \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (30)$$

Các kết quả chỉ ra rằng, với mỗi tham số độ cứng lò xo, khi tăng chiều dài dầm (đồng nghĩa với việc tăng tỷ số kích thước L/h), độ võng của dầm tăng, độ võng tăng nhanh khi $L/h \geq 20$.

6. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình tính toán chuyển vị, nội lực trong dầm FGM xếp, chịu uốn có xét đến ảnh hưởng của các liên kết đàn hồi. Nghiệm giải tích được thiết lập cho dầm khi xem xét yếu tố mặt trung hòa; chương trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng, cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, tham số độ cứng các liên kết đàn hồi đến độ võng và ứng suất trong dầm. Rõ ràng là quy luật phân bố lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng của vật liệu có ảnh hưởng đáng kể lên độ cứng của dầm, phân bố lỗ rỗng trong trường hợp không đều đối xứng có tác dụng tăng cứng và giảm độ võng của dầm so với hai quy luật còn lại. Độ cứng của các lò

xo có ảnh hưởng rõ rệt lên độ võng, các lò xo có độ cứng càng lớn thì càng làm tăng độ cứng kết cấu, dẫn đến giảm độ võng. Các lò xo không ảnh hưởng lên mô men uốn nếu hệ là tĩnh định và sẽ làm thay đổi mô men uốn khi hệ là siêu tĩnh. Các kết quả nhận được là hữu ích cho công tác nghiên cứu, thiết kế các kết cấu dầm làm bằng vật liệu FGM có lỗ rỗng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Smith, B. H., Szytniszewski, S., Hajjar, J. F., Schafer, B. W., Arwade, S. R. (2012). [Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties](#). *Journal of Constructional Steel Research*, 71:1–10.
- [2] Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J.-D., Ienny, P., Croset, M., Bernet, H. (2000). [Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials](#). *Materials Science and Engineering: A*, 289(1-2): 276–288.
- [3] Rabiei, A., Vendra, L. (2009). [A comparison of composite metal foam's properties and other comparable metal foams](#). *Materials Letters*, 63(5):533–536.
- [4] Lefebvre, L.-P., Banhart, J., Dunand, D. (2008). [Porous metals and metallic foams: Current status and recent developments](#). *Advanced Engineering Materials*, 10(9):775–787.
- [5] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2015). [Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam](#). *Composite Structures*, 133:54–61.
- [6] Babaei, M., Asemi, K., Safarpour, P. (2019). Buckling and static analyses of functionally graded saturated porous thick beam resting on elastic foundation based on higher order beam theory. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, 20(1):94–112.
- [7] Phuong, N. T. B., Tu, T. M., Phuong, H. T., Long, N. V. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 13(1):33–45.
- [8] Long, N. V., Tú, T. M. (2019). Nghiệm chính xác của dầm Timoshenko FGM có vi bọt rỗng chịu uốn đặt trên nền đàn hồi khi xét đến vị trí mặt trung hòa. *Hội nghị Cơ học kỹ thuật toàn quốc - Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học*, 218–225.
- [9] Liên, T. V., Khiêm, N. T. (2017). *Phương pháp độ cứng động lực trong phân tích và chẩn đoán kết cấu*. Nhà xuất bản Xây dựng.
- [10] Hào, T. A., Khuyến, H. T. (2017). Phân tích kết cấu khung phẳng có liên kết đàn hồi tại nút. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 4(1):65–73.
- [11] Liên, T. V., Thắng, N. T., Bình, N. T. (2013). Phân tích kết cấu khung bằng phương pháp phần tử hữu hạn khoảng. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 15(3):18–28.
- [12] Chun, K. R. (1972). [Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free](#). *Journal of Applied Mechanics*, 39(4):1154–1155.
- [13] Maurizi, M. J., Rossi, R. E., Reyes, J. A. (1976). [Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and subjected to a translational restraint at the other end](#). *Journal of Sound and Vibration*, 48(4):565–568.
- [14] Doyle, P. F., Pavlovic, M. N. (1982). [Vibration of beams on partial elastic foundations](#). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 10(5):663–674.
- [15] Abbas, B. A. H. (1984). [Vibrations of Timoshenko beams with elastically restrained ends](#). *Journal of Sound and Vibration*, 97(4):541–548.
- [16] Rao, G. V., Naidu, N. R. (1994). [Free vibration and stability behaviour of uniform beams and columns with non-linear elastic end rotational restraints](#). *Journal of Sound and Vibration*, 176(1):130–135.
- [17] Kacar, A., Tan, H., Kaya, M. (2011). [Free vibration analysis of beams on variable winkler elastic foundation by using the differential transform method](#). *Mathematical and Computational Applications*, 16(3): 773–783.
- [18] Kim, H. K., Kim, M. S. (2001). [Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series](#). *Journal of Sound and Vibration*, 245(5):771–784.

- [19] Li, Z. Z., Tang, D. G., Li, W. W. (2013). [Analysis of vibration frequency characteristic for elastic support beam](#). *Advanced Materials Research*, 671-674:1324–1328.
- [20] Özgür Yayli, M., Aras, M., Aksoy, S. (2014). [An efficient analytical method for vibration analysis of a beam on elastic foundation with elastically restrained ends](#). *Shock and Vibration*, 2014:1–7.
- [21] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). [Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109:14–22.
- [22] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2017). [Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions](#). *Composite Structures*, 182:91–98.
- [23] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
- [24] Reddy, J. N. (2006). [Theory and analysis of elastic plates and shells](#). CRC Press.
- [25] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-N., Nguyen, T.-K., Vo, T. P. (2022). [A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams](#). *Composite Structures*, 282:115095.

Phụ lục A. Các hằng số tích phân trong công thức (28), (29)

a. Trường hợp 1: Dầm chỉ có các liên kết đàn hồi ở 1 đầu, đầu còn lại tự do

- Với tải trọng phân bố đều:

$$C_1 = \frac{-q_0 L}{D_{11}}; \quad C_2 = \frac{-q_0 (2D_{11} - A_{55}^s L^2)}{2A_{55}^s D_{11}}; \quad C_3 = \frac{-q_0 L (A_{55}^s L^2 - 2E_1 I \eta_1)}{2A_{55}^s E_1 I \eta_1}; \quad C_4 = \frac{-q_0 L}{E_1 I \xi_1}$$

- Với tải trọng phân bố hình sin:

$$C_1 = \frac{-q_0 L}{\pi D_{11}}; \quad C_2 = \frac{q_0 L^2}{\pi D_{11}}; \quad C_3 = \frac{-q_0 L (\pi^2 A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \eta_1 - \pi^2 D_{11} E_1 I \eta_1)}{\pi^3 A_{55}^s D_{11} E_1 I \eta_1}; \quad C_4 = \frac{-2q_0 L^4}{\pi E_1 I \xi_1}$$

b. Trường hợp 2: Dầm chỉ có liên kết đàn hồi bởi hai lò xo đứng

- Với tải trọng phân bố đều:

$$C_1 = \frac{-q_0 L}{2D_{11}}; \quad C_2 = \frac{-q_0}{A_{55}^s}; \quad C_3 = \frac{q_0 L [12A_{55}^s D_{11} L^2 (\xi_2 - \xi_1) + (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1 I \xi_1 \xi_2]}{24A_{55}^s D_{11} E_1 I \xi_1 \xi_2}; \quad C_4 = \frac{-q_0 L^4}{2E_1 I \xi_1}$$

- Với tải trọng phân bố hình sin:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{-q_0 L^3 (\xi_1 - \xi_2)}{\pi E_1 I \xi_1 \xi_2}; \quad C_4 = \frac{-q_0 L^4}{\pi E_1 I \xi_1}$$

c. Trường hợp 3: Dầm một đầu ngàm cứng, đầu còn lại chỉ có liên kết đàn hồi bởi lò xo đứng

- Với tải trọng phân bố đều:

$$C_1 = \frac{-q_0 L (12D_{11} E_1 I \xi_2 - 24A_{55}^s D_{11} L^2 + 5A_{55}^s E_1 I \xi_2)}{8D_{11} (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)};$$

$$C_2 = \frac{-q_0 (12A_{55}^s{}^2 D_{11} L^4 - E_1 I \xi_2 A_{55}^s{}^2 L^4 - 24A_{55}^s D_{11} L^2 + 8E_1 I \xi_2 A_{55}^s D_{11} L^2 + 24E_1 I \xi_2 D_{11}^2)}{8A_{55}^s D_{11} (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)};$$

$$C_3 = \frac{q_0 L (12D_{11} E_1 I \xi_2 - 24A_{55}^s D_{11} L^2 + 5A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}{8A_{55}^s (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}; \quad C_4 = 0$$

- Với tải trọng phân bố hình sin:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3A_{55}^s q_0 L^3 (\pi^2 D_{11} - E_1 I \xi_2)}{\pi^3 D_{11} (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}; \\ C_2 &= \frac{-3A_{55}^s q_0 L^4 (\pi^2 D_{11} - E_1 I \xi_2)}{\pi^3 D_{11} (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}; \\ C_3 &= \frac{-q_0 L^3 (3\pi^2 D_{11}^2 - 3A_{55}^s A_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}{\pi^3 D_{11} (3D_{11} E_1 I \xi_2 - 3A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \xi_2)}; \quad C_4 = 0 \end{aligned}$$

d. Trường hợp 4: Dầm tựa 2 đầu và có liên kết đàn hồi bởi hai lò xo xoay

- Với tải trọng phân bố đều:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-q_0 L \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ (5\eta_1 + 3\eta_2) A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 \end{aligned} \right]}{2D_{11} \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ (4\eta_1 + \eta_2) A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 \end{aligned} \right]}; \\ C_2 &= \frac{-q_0 \left[\begin{aligned} &144D_{11}^3 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 144A_{55}^s D_{11}^3 L^2 + (A_{55}^s{}^2 L^4 - 144D_{11}^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ 48A_{55}^s D_{11}^2 E_1 I L^2 (\eta_1 + \eta_2) - 6A_{55}^s{}^2 D_{11} E_1 I L^4 \eta_1 \end{aligned} \right]}{12A_{55}^s D_{11} \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ 4A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 (\eta_1 + \eta_2) \end{aligned} \right]}; \\ C_3 &= \frac{q_0 L \left[\begin{aligned} &72D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 6A_{55}^s{}^2 D_{11} L^4 - 72A_{55}^s D_{11}^2 L^2 + A_{55}^s{}^2 E_1 I L^4 \eta_2 - 72D_{11} E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &- 6A_{55}^s E_1^2 I^2 L^2 \eta_1 \eta_2 + 30A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 \eta_1 + 30A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 \eta_2 \end{aligned} \right]}{12A_{55}^s \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I \eta_1 - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 + 12D_{11}^2 E_1 I \eta_2 - 12D_{11} E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 - A_{55}^s E_1^2 I^2 L^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ 4A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 (\eta_1 + \eta_2) \end{aligned} \right]}; \\ C_4 &= 0 \end{aligned}$$

- Với tải trọng phân bố hình sin:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-12A_{55}^s E_1 I L^3 q_0 (\eta_1 - \eta_2)}{\pi^3 \left[4E_1 I (3D_{11}^2 + A_{55}^s D_{11} L^2) (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \right]}; \\ C_2 &= \frac{-2E_1 I L^2 \eta_1 q_0 (12D_{11} E_1 I \eta_2 - 6A_{55}^s D_{11} L^2 + A_{55}^s E_1 I L^2 \eta_2)}{\pi^3 D_{11} \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ 4A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 (\eta_1 + \eta_2) \end{aligned} \right]}; \\ C_3 &= \frac{-E_1 I q_0 L^3 \left[2A_{55}^s D_{11} L^2 (2\eta_1 + \eta_2) - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1 I \eta_1 \eta_2 \right]}{\pi^3 D_{11} \left[\begin{aligned} &12D_{11}^2 E_1 I (\eta_1 + \eta_2) - 12A_{55}^s D_{11}^2 L^2 - (12D_{11} + A_{55}^s L^2) E_1^2 I^2 \eta_1 \eta_2 \\ &+ 4A_{55}^s D_{11} E_1 I L^2 (\eta_1 + \eta_2) \end{aligned} \right]}; \quad C_4 = 0 \end{aligned}$$