



KIỂM TRA THỰC NGHIỆM PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH VẾT NÚT TRONG KHUNG BẰNG PHÂN TÍCH WAVELET DỪNG CỦA CÁC DẠNG DAO ĐỘNG

Nguyễn Việt Khoa¹, Trần Văn Liên², Trịnh Anh Hào³

Tóm tắt: Bài báo trình bày một số kết quả xác định vết nứt trên mô hình khung phẳng trong phòng thí nghiệm dựa vào thực nghiệm đo tần số và dạng dao động riêng. Các dạng dao động riêng đo được là đầu vào cho phân tích wavelet dừng để xác định vị trí vết nứt. Độ sâu vết nứt là kết quả giải bài toán ngược bằng thuật toán di truyền trên cơ sở so sánh kết quả đo thực nghiệm với kết quả tính toán mô hình theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển và mô hình lò xo của vết nứt. Kết quả nghiên cứu cho thấy đây là phương pháp tin cậy để chẩn đoán vết nứt trong kết cấu.

Từ khóa: Vết nứt; dạng dao động; wavelet dừng (SWT); hàm phản ứng tần số (FRF);

Summary: The present article deals with new results of the crack detection of cracked plane frame based on the measured modal analysis. The cracked locations are detected by stationary wavelet transform of measured natural modals. The cracked depths are determined by solving the inverse problem using the genetic algorithms. The methodology approach and results presented in this article are new and the basis for building an efficient method to identify cracks in frame structures using wavelet analysis of natural modals.

Keywords: Cracks; natural modal; stationary wavelet transform (SWT); frequency response function (FRF);

Nhận ngày 15/11/2014, chỉnh sửa ngày 30/11/2014, chấp nhận đăng 31/12/2014



1. Mở đầu

Hiện nay phương pháp thử nghiệm không phá hủy động [1, 2] để chẩn đoán hư hỏng trong kết cấu được tập trung nghiên cứu và đã có nhiều ứng dụng thực tế do có nhiều ưu điểm nổi trội như: không gây ảnh hưởng đến việc khai thác sử dụng công trình, có thể thực hiện được trên phạm vi rộng các công trình nhà, cầu, tháp, đập,... Phương pháp này dựa trên sự thay đổi các đặc trưng động lực như tần số riêng, dạng dao động riêng, hàm phổ phản ứng,... do sự xuất hiện các hư hỏng. Các chỉ tiêu này có thể tách ra và nhận biết trong các tín hiệu đo về rung động như gia tốc, vận tốc, chuyển vị động hay biến dạng động.

Adams, Cawley, Pye và Stone [3] đã xác định được vị trí hư hỏng trong kết cấu bằng việc khảo sát sự suy giảm tần số tự nhiên, tuy nhiên, trong một số trường hợp có nhiều đo đặc thì việc xác định vị trí hư hỏng có thể không chính xác [4]. Các dạng dao động riêng cung cấp nhiều thông tin và nhạy cảm với vị trí hư hỏng hơn so với các tần số riêng [5]. Lieven và Ewins [6] đã đề xuất tiêu chuẩn bảo toàn dạng COMAC để xác định vị trí hư hỏng. Pandey, Biswas và Samman [7] đã sử dụng độ cong của dạng dao động để nhận diện và định vị hư hỏng, đồng thời cũng chứng minh rằng dạng dao động riêng là nhạy cảm hơn độ võng khi xác định vị trí hư hỏng. Hạn chế của độ cong dạng dao động riêng là không thể đo đạc trực tiếp và phụ thuộc nhiều vào các kết quả đo đạc. Douka, Loutridis và Trochidis [8], Wang và Zhu [9] đã sử dụng phân tích wavelet đối với kết quả đo đặc chuyển vị hay dao động tự do để xác định vị trí vết nứt của dầm công son và dầm đơn giản có một hay nhiều vết nứt. Zhu và Law [10] đã sử dụng kết quả đo đặc trong miền thời gian tại

¹TS, Viện Cơ học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

²PGS.TS, Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp. Trường Đại học Xây dựng. Email: LienTV@hotmail.com

³ThS, Công ty cổ phần Đầu tư, Tư vấn và Thi công xây dựng Việt Nam

một điểm trên dầm chịu tải trọng di chuyển làm đầu vào cho phân tích wavelet. Kết quả là vị trí vết nứt được nhận dạng một cách dễ dàng bằng hệ số phân tích wavelet rời rạc tương ứng với vị trí của tải trọng di chuyển. Zhong và Oyadiji [11] đã sử dụng phân tích wavelet dừng (SWT) đối với các dạng dao động của dầm có vết nứt để chẩn đoán vị trí vết nứt.

Gần đây nhất đã có một số thí nghiệm trên kết cấu công trình thực hoặc mô hình lớn tương tự với kết cấu công trình thực. Türker, Kartal, Bayraktar và Muvafik [12] đã tiến hành thí nghiệm trong phòng đối với khung phẳng bằng thép một tầng một nhịp để đánh giá sự thay đổi đặc trưng động lực khi liên kết tại nút là cứng so với liên kết nửa cứng (semi-grid). Tondreau, Deraemaeker và Papatheou [13] đã thí nghiệm để xác định hư hỏng của cánh tên lửa Tomahawk với 15 cảm biến gia tốc và một cảm biến xung. Hư hỏng của cánh được tạo ra với các lỗ thủng và được nhận dạng bằng việc so sánh sự khác nhau của hàm phản ứng tần số (FRF) trên mẫu nguyên vẹn và mẫu hư hỏng. Tondreau và Deraemaeker [14] đã thí nghiệm đo đặc dạng dao động riêng của dầm công son bằng thép mỏng và dầm thép hình chữ I dài 3,78m, sau đó dùng tiêu chuẩn MAC để nhận dạng hư hỏng. Srinivas, Ramanjanneyulu và Jeyasehar [15] đã thực hiện thí nghiệm trong phòng với dầm đơn giản và dầm bản mỏng bê tông cốt thép bị hư hỏng với các mức độ khác nhau, từ đó đánh giá sự thay đổi của dạng dao động, đồng thời đánh giá ảnh hưởng của thiết bị kích động (máy tạo xung hoặc búa gõ) tới kết quả dạng dao động. Hashim, Zainah và Razak [16] đã thực hiện thí nghiệm đo đặc tần số và dạng dao động của kết cấu dầm và sàn một ngôi nhà bị hư hỏng do sạt lở đất; kết quả cho thấy tần số riêng giảm 25-53% và giảm nhiều hơn ở các mode thấp; các dạng dao động cũng được phân tích và so sánh với mô hình phần tử hữu hạn để xác định vị trí hư hỏng. Costa, Magalhaes, Cunha và Figueiras [17] đã thí nghiệm rung động với cầu thép cũ trước và sau khi nâng cấp để đánh giá thay đổi đặc trưng động lực.

Ở Việt Nam, phương pháp thí nghiệm không phá hủy động đối với các công trình xây dựng ngày càng được quan tâm hơn. Các thí nghiệm về đo đặc dạng dao động mới bắt đầu được thực hiện bởi nhóm tác giả Nguyễn Cao Minh, Nguyễn Tiến Khiêm cho các mô hình dầm đơn giản có một vết nứt và hai vết nứt [18]. Tác giả Phạm Xuân Khang [19] đã chẩn đoán hư hỏng của một dầm cầu bê tông bằng đo đặc các dạng dao động.

Bài báo trình bày các kết quả thí nghiệm xác định tần số và dạng dao động riêng của khung phẳng nguyên vẹn và khung phẳng có một vết nứt trong phòng thí nghiệm. Kết quả thí nghiệm được sử dụng để đánh giá sự chính xác của phương pháp phân tích lý thuyết kết cấu hệ thanh có nhiều vết nứt theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển và mô hình lò xo của vết nứt [20, 21].

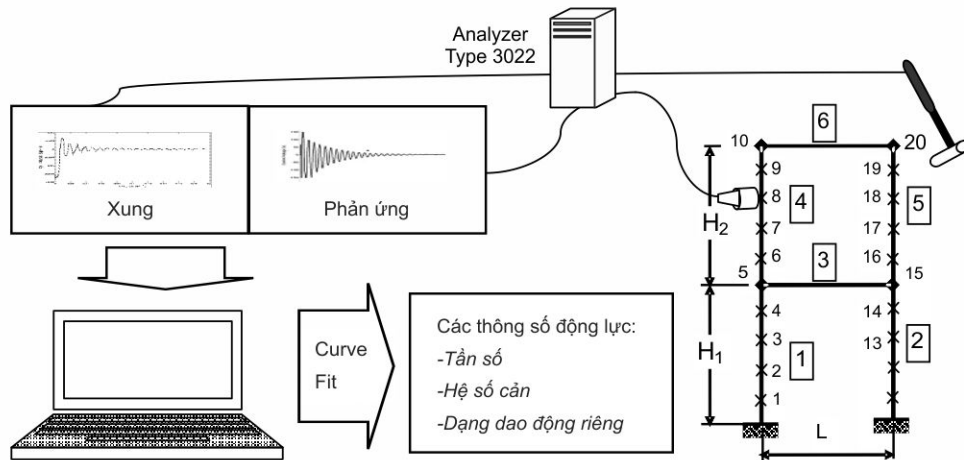


2. Mô tả thí nghiệm

Mô hình thí nghiệm là một khung phẳng gồm 6 thanh có tiết diện hình chữ nhật $b=31\text{mm}$, $h=10\text{mm}$; chiều cao tầng $H_1=510\text{mm}$, $H_2=490\text{mm}$ và chiều dài nhịp $L=510\text{mm}$. Các thanh làm bằng thép CT3 có mô đun đàn hồi $E=2,1 \times 10^{11}\text{N/m}^2$, khối lượng riêng $\rho=7850\text{kg/m}^3$, được liên kết hàn cứng tại các nút khung, hai chân khung được liên kết ngàm với sàn thép phòng thí nghiệm.

Thí nghiệm được thực hiện tại Phòng thí nghiệm Động lực học công trình, Viện Cơ học. Máy đo dao động Pulse system gồm một máy tính chuyên dụng và các mô đun phân tích tín hiệu do hãng Brüel & Kjær sản xuất. Mô đun thu tín hiệu Signal Analyzer Unit - 4 channel input Type 3022. Loại đầu đo Industrial Accelerometer - Type 8325 do hãng Brüel & Kjær sản xuất. Loại búa Type 8202 - Impact Hammer, cán búa bằng thép bọc cao su mềm và đầu gõ thu tín hiệu loại 8200 (Transducer Type 8200). Sử dụng phần mềm ME'Scope 5.0 của hãng Vibration (Mỹ) để phân tích các dạng dao động riêng từ hàm phản ứng phổ.

Sơ đồ thí nghiệm được thể hiện trên Hình 1. Khi tiến hành thí nghiệm, tác giả sử dụng phương pháp đầu đo dao động cố định và điểm gõ búa lực di chuyển trên khung phẳng, gọi là roving method. Đầu đo gia tốc được đặt tại điểm số 8 trong mặt phẳng khung. Các điểm tác động bằng búa lực (điểm 1, 2, ... 20) được bố trí với khoảng cách 10cm dọc theo chiều dài thanh, hướng búa tác động từ phía ngoài vào phía trong khung.

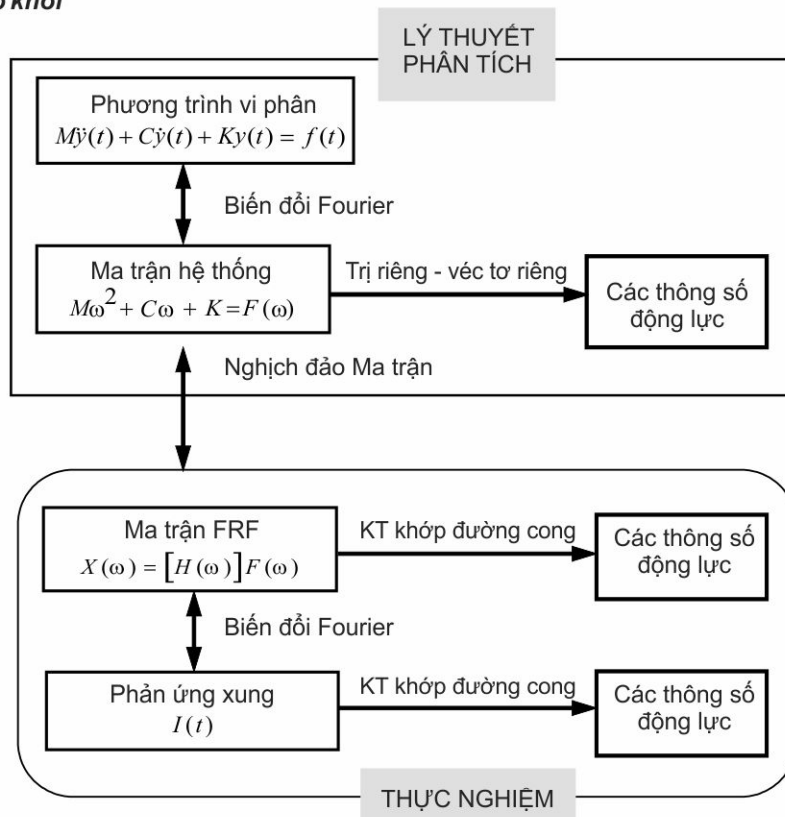


Hình 1. Sơ đồ bố trí thiết bị và khung thí nghiệm

Quy trình thí nghiệm gồm các bước: lắp đặt đầu đo dao động vào khung tại vị trí số 8; nối đầu đo dao động và búa tạo xung với máy đo dao động; bật máy đo và chỉnh không; sau đó gõ búa vào các điểm trên sơ đồ đo và lưu các số liệu đo. Việc xử lý số liệu đo, đưa ra kết quả tần số và dạng dao động riêng được thực hiện bằng phần mềm ME'scope.

3. Phương pháp xác định dạng dao động riêng

3.1 Sơ đồ khối



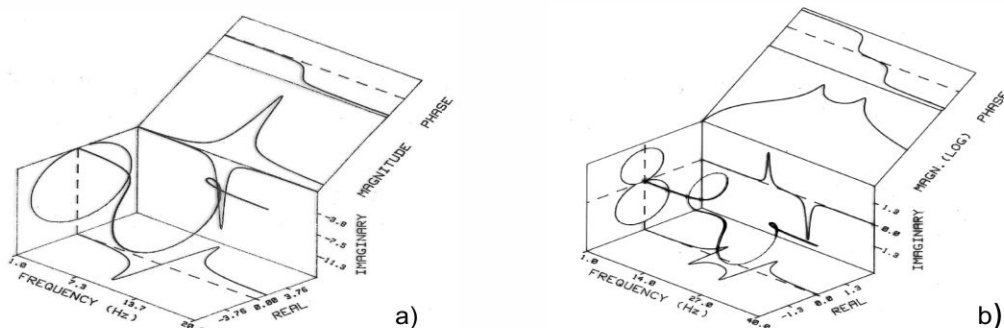
Hình 2. Sơ đồ khối phương pháp xác định dạng dao động riêng

Sơ đồ khối phương pháp xác định tần số và dạng dao động riêng bằng thử nghiệm động [1] được thể hiện trong Hình 2.

Hàm phản ứng tần số (FRF) $H(\omega)$ là tỷ số giữa tín hiệu đầu ra, có được từ đầu đo gia tốc gắn vào kết cấu, và tín hiệu đầu vào, có được từ búa tạo xung, sau khi biến đổi Fourier

$$H(\omega) = \frac{\text{output}}{\text{input}} = \frac{\text{response}}{\text{excitation}} = \frac{g(\omega)}{f(\omega)} \quad (1)$$

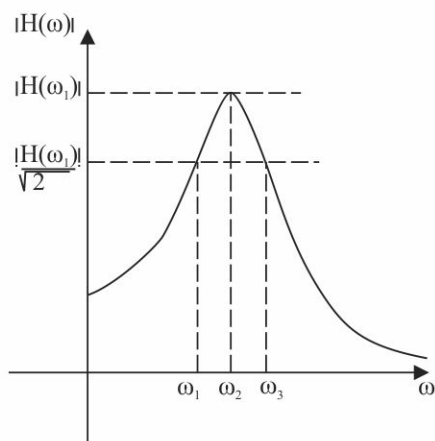
Các đồ thị FRF được thể hiện trong hệ tọa độ vuông góc (phần thực - tần số, phần ảo - tần số) hoặc trong tọa độ cực (biên độ - tần số, pha - tần số). Khi cộng hưởng, trong hệ tọa độ vuông góc phần ảo đạt giá trị lớn nhất và phần thực có giá trị bằng 0, còn trong hệ tọa độ cực biên độ đạt giá trị lớn nhất trong khi trễ pha tiệm cận đến 90° . Hình 3 thể hiện biểu đồ Nyquist của các hàm $H(\omega)$ cho hệ 1 và 2 bậc tự do. Từ các biểu đồ Nyquist, ta có thể xác định các tham số dao động là tần số riêng và hệ số cản của hệ.



Hình 3. Biểu đồ Nyquist của hàm FRF: a) Hệ 1 bậc tự do; b) Hệ 2 bậc tự do

3.2 Phương pháp xác định tần số, hệ số cản và dạng riêng

Tần số riêng được xác định tại từng đỉnh cộng hưởng trên đồ thị FRF (Hình 4). Mỗi đỉnh tương ứng với một tần số riêng ω_r . Theo giá trị cực đại của đỉnh cộng hưởng, ta có:



Hình 4. Đồ thị hàm FRF

$$h_r = \frac{r^A}{\left| \omega_r^2 - \omega^2 + 2j\xi_r\omega\omega_r \right|} \Bigg|_{\omega=\omega_r} = \frac{r^A}{2\xi_r\omega_r^2} \quad (2)$$

Hệ số cản tương ứng với tần số riêng ω_r là

$$\eta_r = 2\xi_r \approx \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} \quad (3)$$

với ω_1 và ω_2 là các tần số ứng với giá trị hàm FRF bằng $h_r/\sqrt{2}$. Cuối cùng ta sẽ xác định giá trị thặng dư cho tần số riêng r qua công thức

$$r^A = h_r\omega_r^2\eta_r \quad (4)$$

Đối với dạng dao động riêng thứ r , khi ω thuộc lân cận tần số riêng ω_r ta có [1, 19]

$$H_{jk}(\omega) \approx \frac{\Phi_j(r)\Phi_k(r)}{k_r - \omega^2 m_r + i c_r \omega} \quad (5)$$

Giả sử tần số riêng và cản đã được xác định theo các bước trên, ta cần xác định dạng riêng $\Phi_j(r)$, $j=1, \dots, m$. Biến đổi (5) ta được

$$H_{jk}(\omega) \approx \frac{\Phi_j(r)\Phi_k(r)}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i h_r \omega \omega_r)} \quad (6)$$

Vì dạng riêng được xác định sai khác một hằng số tùy ý nên ta có thể chọn sao cho $m_k=1$. Ở chế độ cộng hưởng $\omega_r = \omega$, thay giá trị này vào (6), ta được:

$$|H_{jk}(\omega)| = \frac{\Phi_j(r) \cdot \Phi_k(r)}{2 \cdot h_r \cdot \omega^2}$$

nên

$$\Phi_j(r) \cdot \Phi_k(r) = 2 \cdot h_r \cdot \omega_r^2 \cdot |H_{jk}(\omega)| \quad (7)$$

Phương trình (7) biểu diễn quan hệ giữa hệ số h_r , tần số riêng đo được ω , và giá trị hàm phản ứng tần số $H_{jk}(r)$ với dạng riêng thứ r . Phương trình (7) cho nghiệm là độ lớn của dạng riêng, dấu của các hệ số được xác định thông qua đường biểu diễn pha của hàm FRF. Hơn nữa, ma trận $\Phi_j(r) \cdot \Phi_k(r)$ có n^2 phần tử, nhưng chỉ có n phần tử độc lập, do đó cần xác định n giá trị của hàm FRF. Điều này được thực hiện với kích động đặt tại một điểm, còn đầu đo đặt tại các điểm cần xác định độ lớn của dạng riêng. Như vậy, một hàng của ma trận $\Phi_j(r) \cdot \Phi_k(r)$ sẽ được xác định, từ hàng đó tính được các giá trị của $\Phi(r)$. Do đó thuật toán xác định dạng riêng bao gồm các bước như sau:

Giả sử cần xác định dạng riêng thứ r , kích động đặt tại k và có n điểm đo. Giả sử đã biết $H_{jk}(r)$, với $j = 1, \dots, n$. Khi đó ứng với điểm đo thứ k ta có:

$$\Phi_k(r) \cdot \Phi_k(r) = 2 \cdot h_r \cdot \omega_r^2 \cdot |H_{kk}(\omega)|$$

do đó

$$\Phi_k(r) = \sqrt{2 \cdot h_r \cdot \omega_r^2 \cdot |H_{kk}(\omega)|} \quad (8)$$

Thay giá trị này vào các phương trình sau của (8), ta xác định được các giá trị $\Phi_j(r)$ còn lại theo công thức

$$\Phi_j(r) = \frac{\sqrt{2 \cdot h_r \cdot \omega_r^2 \cdot |H_{jk}(\omega)|}}{\Phi_k(r)} \quad j \neq k \quad (9)$$

3.3 Hệ nhiều bậc tự do

Để xác định các tần số, hệ số cản và dạng riêng cho hệ nhiều bậc tự do, người ta sử dụng phương pháp đa thức gần đúng, được xấp xỉ theo phương pháp bình phương tối thiểu [1]. Mặc dù khối lượng tính toán lớn nhưng với khả năng tính toán của máy tính hiện nay thì việc ứng dụng phương pháp đa thức gần đúng này đã mang lại các kết quả tốt.

Từ công thức lý thuyết tính hàm phản ứng xung

$$h_{ik}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{r \cdot A_{ik}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_r\xi_r} \quad (10)$$

Công thức này cũng có thể được biểu diễn dưới dạng phân số của hai đa thức

$$h_{ik}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_{2N-1}(j\omega)^{2N-1}}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_{2N}(j\omega)^{2N}} \quad (11)$$

Ký hiệu hàm FRF đo được là $\tilde{h}_{ik}$, ta định nghĩa sai số giữa số liệu đo và lý thuyết là

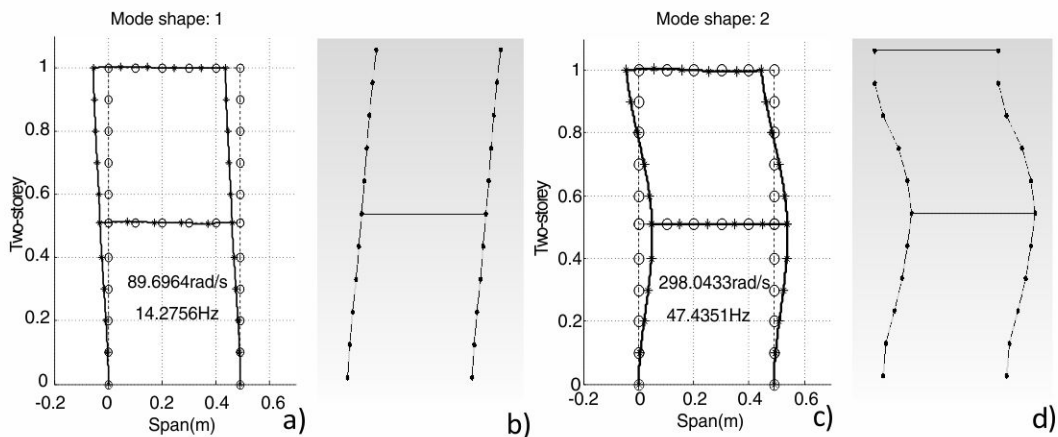
$$\varepsilon = (b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_{2N-1}(j\omega)^{2N-1}) - \tilde{h}_{ik}(a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_{2N}(j\omega)^{2N}) \quad (12)$$

Cực tiểu hóa sai số này ta sẽ thu được các tham số $b_0 \dots b_{2N-1}$, $a_0 \dots a_{2N}$. Bản chất của bài toán này là giải hệ phương trình phương trình tuyến tính. Thay các tham số này vào (11) ta có thể tìm được tử số và mẫu số ứng với các ω khác nhau. Từ tử số ta tính được giá trị thẳng dư và từ mẫu số ta tính được ω , và ξ_r , từ đó tìm được các dạng riêng. Đây chính là nội dung phần xử lý số liệu đo và đưa ra kết quả tần số, hệ số cản và dạng dao động riêng bằng phần mềm ME'scope.

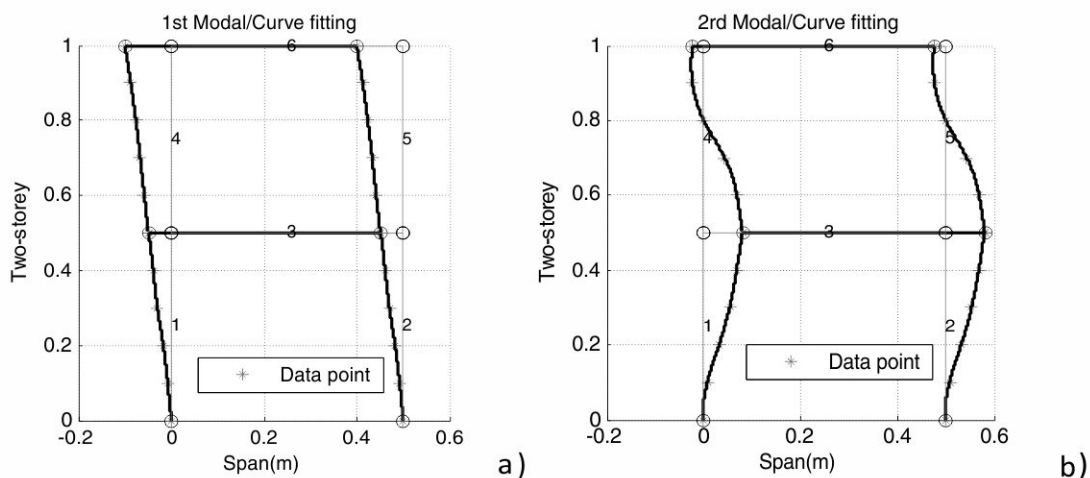


4. Kết quả thí nghiệm và so sánh với lý thuyết

4.1 Kết quả thí nghiệm khung nguyên vẹn



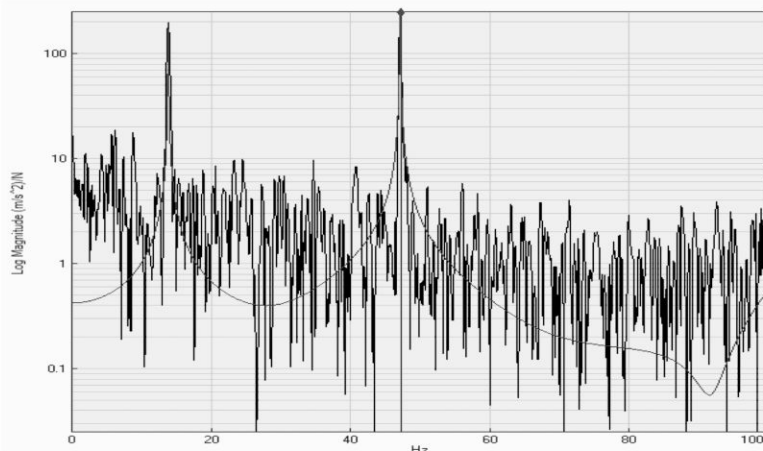
Hình 5. Biểu đồ dạng dao động của khung nguyên vẹn.
(a-b): Dạng dao động riêng thứ nhất; (c-d): Dạng dao động riêng thứ hai



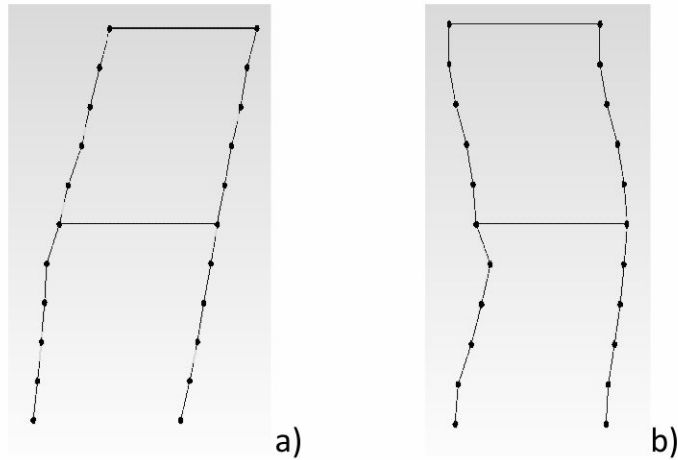
Hình 6. Biểu đồ dạng dao động của khung nguyên vẹn được làm trơn.
(a) Dạng dao động riêng thứ nhất; (b) Dạng dao động riêng thứ hai

Kết quả đo được tần số thứ nhất là 14,27Hz và tần số thứ hai là 47,43Hz. Hình 5a,c là kết quả tính lý thuyết của hai dạng dao động đầu tiên tại các điểm đo. Hình 5b,d là kết quả đo của hai dạng dao động đầu tiên cho khung nguyên vẹn (biểu đồ thô) theo kết quả đo đạc. Hình 6 thể hiện biểu đồ hai dạng dao động này đã được làm trơn bằng nội suy.

4.2 Kết quả thí nghiệm khung có một vết nứt



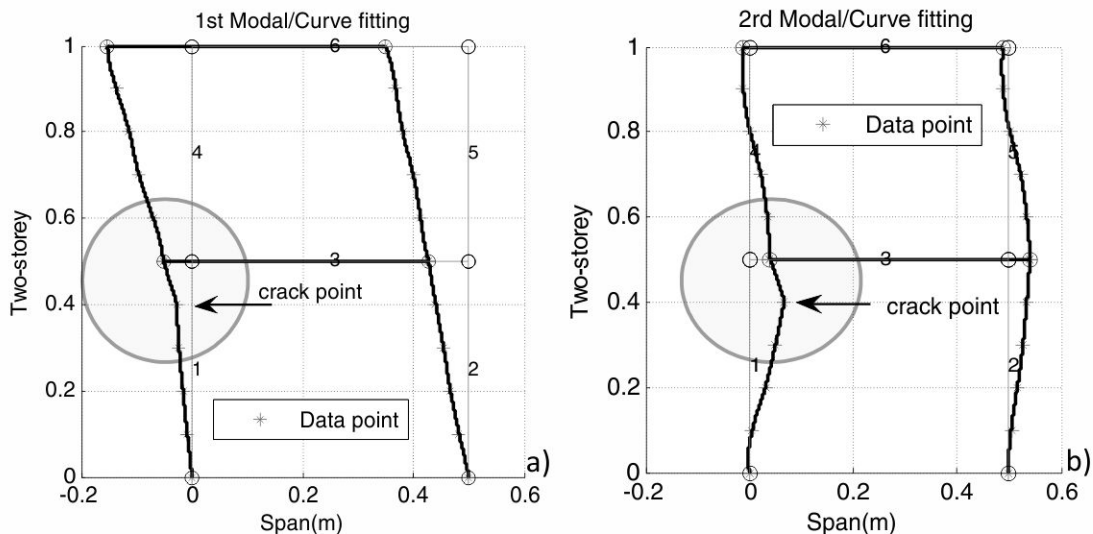
Hình 7. Biểu đồ hàm FRF tín hiệu búa tại điểm 1 - đầu đo gia tốc tại điểm 8



Hình 8. Biểu đồ dạng dao động riêng của khung có vết nứt tại vị trí điểm số 4, chiều sâu mỗi phía là 1,5mm (30%h),
a) Dạng dao động thứ nhất; b) Dạng dao động thứ hai

Khung được tạo một vết nứt tại vị trí điểm số 4, cách chân cột số 1 là 400mm với chiều sâu vết nứt mỗi phía là 1,5mm tương ứng với 30%h. Đồ thị hàm FRF khi gõ búa tại điểm 1 thể hiện trên Hình 7, trong đó đồ thị hàm FRF đo đạc là đường gấp khúc (màu đen), đồ thị hàm FRF xấp xỉ bằng phần mềm ME'scope là đường trơn (màu đỏ). Biểu đồ dạng dao động riêng thứ nhất và thứ hai của khung có một vết nứt thể hiện trên Hình 8.

Hình 9 là biểu đồ dạng dao động riêng của khung có vết nứt đã được nội suy từ các điểm đo. Ta nhận thấy dạng riêng của khung có vết nứt tương tự với dạng riêng được tính từ lý thuyết. Đồng thời, ta cũng nhận thấy trên dạng riêng đo được có sự thay đổi nhỏ ở khu vực xung quanh vết nứt như đã đánh dấu trên hình. Tuy nhiên cũng rất khó xác định được chính xác vị trí của vết nứt từ các dạng riêng đo đạc này. Do vậy ta phải phân tích SWT đối với các dạng dao động riêng này.

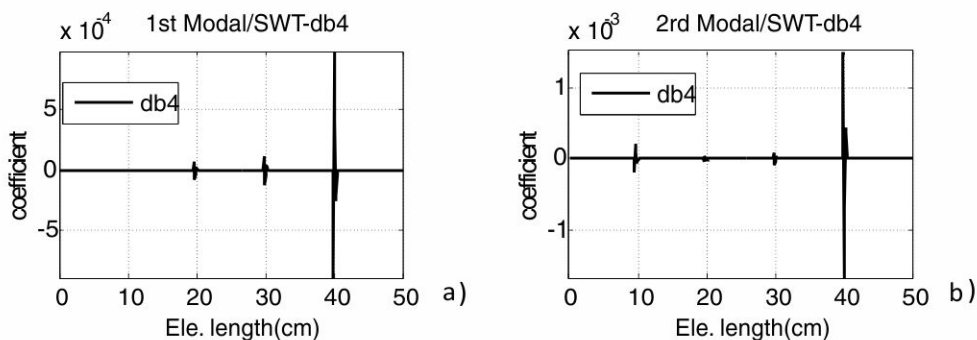


Hình 9. Biểu đồ dạng dao động riêng của khung có vết nứt đã được nội suy
(a) Dạng dao động riêng thứ nhất; (b) Dạng dao động riêng thứ 2



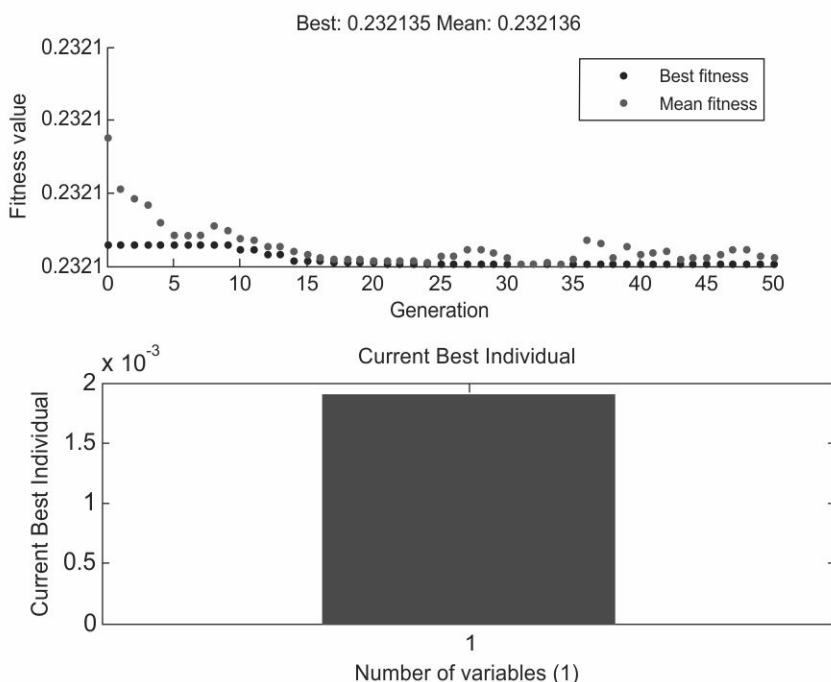
5. Xác định vết nứt

Hình 10 là kết quả phân tích SWT-db4 cho dạng dao động riêng của phần tử 1. Ta nhận thấy biểu đồ hệ số chỉ tiết SWT-db4 có đỉnh rất lớn ở vị trí 40cm tương ứng với vị trí vết nứt trên mô hình thí nghiệm. Điều này chứng tỏ khi có vết nứt, dạng riêng có sự gãy khúc nhỏ và sự gãy khúc này được phóng đại lên bằng biến đổi SWT.



Hình 10. Phân tích SWT-db4 cho dạng dao động riêng của phần tử 1:
a) Hệ số SWT của dạng dao động riêng thứ nhất; b) Hệ số SWT của dạng dao động riêng thứ hai

Kết quả chẩn đoán độ sâu vết nứt bằng thuật toán di truyền đối với phân tích SWT của dạng dao động riêng thứ nhất là 3,51mm, của dạng dao động thứ hai và 3.8mm (hình 11). Như vậy, so với vết nứt thực tế là 3mm thì sai số giữa kết quả đo và tính là 17% đối với dạng riêng thứ nhất và 27% đối với dạng riêng thứ hai.



Hình 11. Kết quả chẩn đoán độ sâu vết nứt bằng thuật toán di truyền

6. Kết luận

Bài báo đã trình bày một số kết quả xác định vết nứt trên mô hình khung phẳng trong phòng thí nghiệm dựa vào thực nghiệm đo đặc tần số và dạng dao động riêng của mô hình khung phẳng nguyên vẹn và khung phẳng có vết nứt:

- Vị trí vết nứt được xác định từ phân tích wavelet dừng của dạng dao động riêng đo đặc trùng kết quả tính toán từ mô hình lý thuyết và số liệu thực tế.

- Độ sâu vết nứt là kết quả giải bài toán ngược bằng thuật toán di truyền trên cơ sở so sánh kết quả đo thực nghiệm với kết quả tính toán mô hình theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển và mô hình lò xo của vết nứt.

Các kết luận trên chứng tỏ rằng, mô hình vết nứt và biểu thức hàm dạng được lập theo phương pháp độ cứng động lực kết hợp với phương pháp ma trận chuyển được sử dụng trong các nghiên cứu lý thuyết [20, 21] là tin cậy cho bài toán chẩn đoán hư hỏng của kết cấu công trình.

Tài liệu tham khảo

1. Ewins D. J., (1995), *Modal testing: theory and practice*, Wiley.
2. Doeling S.W., Farrar C.R., Prime M.B. (1998), "A summary review of vibration-based damage identification methods", *Journal of the Shock and Vibration Digest*, 30(2), p. 91–105.
3. Adams R.D., Cawley P., Pye C.J., Stone B.J. (1978), "A vibration technique for nondestructively assessing the integrity of structures", *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(2), p. 93–100.
4. Biswas M., Pandey A.K., Samman M.M. (1990), "Diagnostic experimental spectral/modal analysis of a highway bridge", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 5(1), p. 33–42.
5. Kim J.T., Ryu Y.S., Cho H.M., Stubbs N. (2003), "Damage identification in beam type structures: Frequency-based method vs. mode-shape-based method", *Engineering Structures*, 25(1), p. 57–67.
6. Lieven N.A.J., Ewins D.J. (1998), "Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)", *Proceedings of the 6th international modal analysis conference*, Vol. 1, p. 690–695
7. Pandey A.K., Biswas M., Samman M.M. (1991), "Damage detection from changes in curvature mode shapes", *Journal of Sound and Vibration*, 145(2), p. 321–332
8. Douka E., Loutridis S., Trochidis A. (2003), "Crack identification in beams using wavelet analysis", *International Journal of Solids and Structures*, 40, p. 3557–3569.
9. Wang Dansheng, Zhu Hongping (2004), "Damage Identification in Beam Structures Based on Mechanical Impedance Characters", *International Symposium on Safety Science and Technology*, Shanghai, (ISSST).
10. Zhu X.Q., Law S.S. (2006), "Wavelet-based Crack Identification of Bridge Beam from Operational Deflection Time History", *International Journal of Solid and Structures*, 43, p. 2299–2317.
11. Zhong S., Oyadiji O. (2007), "Crack Detection in Simply Supported Beams without Baseline Modal Parameters by Stationary Wavelet Transform", *Mechanical Systems and Signal processing*, 21, p. 1853–1884;
12. Temel Türker, Murat Emre Kartal, Alemdar Bayraktar, Murat Muvafik (2009) "Assessment of semi-rigid connections in steel structures by modal testing", *Journal of Constructional Steel Research*, 65, p.1538–1547.
13. Gilles Tondreau, Arnaud Deraemaeker, Evangelos Papatheou (2011) "Experimental damage detection using modal filters on an aircraft wing", *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN*, ISBN 978-90-760-1931-4.
14. Gilles Tondreau, Arnaud Deraemaeker (2014) "Automated data-based damage localization under ambient vibration using local modal filters and dynamic strain measurements: Experimental applications", *Journal of Sound and Vibration* 333, 7364–7385.
15. Srinivas V., Sasml S., Ramanjaneyulu K., Antony Jeyasehar C. (2013) "Influence of test conditions on modal characteristics of reinforced concrete structures under different damage scenarios", *Archives of civil and mechanical engineering* 13, p.491–505.
16. Huzaiifa Hashim, Zainah Ibrahim, Hashim Abdul Razak (2013) "Dynamic characteristics and model updating of damaged slab from ambient vibration measurements", *Measurement*, 46, p. 1371–1378
17. Bruno J.A. Costa, Filipe Magalhães, Álvaro Cunha, Joaquim Figueiras (2013) "Rehabilitation assessment of a centenary steel bridge based on modal analysis", *Engineering Structures*, 56, p. 260–272
18. Nguyễn Cao Minh, Nguyễn Tiến Khiêm,...(1996), "Quy trình chẩn đoán kết cấu giàn khoan biển cố định bằng các đặc trưng động học", *Tuyển tập Hội nghị CHVRBD toàn quốc lần V*, Hà Nội.
19. Phạm Xuân Khang (2001), *Chẩn đoán kết cấu nhịp cầu bằng phương pháp dao động*, Luận án Tiến sỹ kỹ thuật, Viện KH và CN GTVT, Hà nội.
20. Tran Van Lien, Trinh Anh Hao, "Determination of the shape function of a multiple cracked beam element and its application for the free vibration analysis of a multiple cracked frame structure", *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, Science and Education Publishing, Vol. 2, No. 1, 2014, pages 12-25.
21. Tran Van Lien, Nguyen Tien Khiem, Trinh Anh Hao, "Crack identification in frame structures by using the stationary wavelet transform of mode shapes", *Jokull Journal*, Vol. 64, Issue 6, 2014.