

XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ HƯ HỎNG TRÊN DẦM BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỘ CONG CỦA DẠNG DAO ĐỘNG

Nguyễn Hương Dương^{a,*}, Bùi Tiến Thành^b

^a*Khoa Cầu đường, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,*

55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

^b*Khoa Công trình, Trường Đại học Giao thông Vận tải, 3 đường Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 23/9/2021, Sửa xong 03/11/2021, Chấp nhận đăng 04/11/2021

Tóm tắt

Hư hỏng trong một công trình kết cấu nếu như được phát hiện và khoan vùng sớm sẽ tạo thuận lợi cho công tác sửa chữa, tránh được sự phá hoại sụp đổ, và kéo dài tuổi thọ của công trình. Trong bài báo này, dạng dao động, độ cong của dạng dao động sẽ được xác định từ số liệu đo dao động. Dựa vào các thông số này, vị trí hư hỏng của kết cấu có thể tìm ra. Một mô hình dầm hai đầu tự do được xây dựng trong phòng thí nghiệm. Các đầu đo gia tốc được gắn trên dầm để tìm ra dạng dao động của dầm thí nghiệm. Các hư hỏng được tạo ra bằng hai vết cắt trên dầm. Phương pháp xác định vị trí hư hỏng sử dụng độ cong của dạng dao động đã được kiểm tra tính chính xác dựa trên mô hình thí nghiệm này.

Từ khoá: đánh giá sức khỏe công trình; hư hỏng kết cấu; dầm tự do; độ cong của dạng dao động; đánh giá hư hỏng dựa trên dao động.

DAMAGE DETECTION IN A BEAM STRUCTURE USING MODAL CURVATURE

Abstract

Early damage detection can prevent the structure from failure, improve the maintenance process, and extend the lifetime. In this paper, damage in a structure will be detected based on the vibration response measurements. Modal properties such as mode shapes, and modal curvatures can be extracted using the vibration response data. A laboratory beam with free-free boundary conditions was set up. Accelerometers were attached to the top of the beam to find out the modal properties. Damage was introduced in the beam using two cutting notches. The modal curvature method was verified based on the vibration data from this laboratory beam.

Keywords: structural health monitoring; damage; free beam; modal curvature; vibration based damage detection.

[https://doi.org/10.31814/stce.huice\(nuce\)2021-15\(7V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.huice(nuce)2021-15(7V)-05) © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Đặt vấn đề

Phương pháp đánh giá sức khỏe công trình dựa vào số liệu đo dao động là phương pháp không phá hoại, nên sau khi thực hiện không ảnh hưởng tới hệ kết cấu. Thêm vào đó, phương pháp đánh giá sức khỏe công trình dựa vào phương pháp đo dao động là phương pháp có thể đánh giá tổng quát hư hỏng trong hệ kết cấu, có thể áp dụng được với cả kết cấu phức tạp và sử dụng được số liệu quan trắc theo thời gian. Phương pháp này dựa trên nguyên tắc là khi hư hỏng xuất hiện tại vị trí nào trong kết cấu nó sẽ dẫn tới việc giảm độ cứng cục bộ tại vị trí đó. Việc giảm độ cứng tại một vị trí nào đó trên tiết diện sẽ dẫn tới sự thay đổi của các thông số dao động như tần số dao động, dạng dao động, độ

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: duongnh2@nuce.edu.vn (Dương, N. H.)

cong của dạng dao động, hệ số cản. Nhiều nghiên cứu đã thành công khi có thể phát hiện được kết cấu bị hư hỏng khi đánh giá các thông số dao động của hệ [1, 2]. Trong các thông số dao động của hệ thì thông số về độ cong của dạng dao động được chứng minh là rất nhạy cảm với hư hỏng. Pandey và cs. [3] đề xuất phát hiện hư hỏng bằng cách tính hiệu tuyệt đối độ cong của dạng dao động giữa kết cấu nguyên và kết cấu bị hư hỏng. Trong khi đó, Wahab và De Roeck [4] đề xuất lấy chỉ số “Curvature Damage Factor” (CDF) là tổng hiệu tuyệt đối của đường cong dạng dao động ở tất cả các dạng dao động. Phương pháp này được áp dụng thành công để xác định hư hỏng trong hệ dầm. Nhược điểm của phương pháp này là yêu cầu phải biết độ cong của dạng dao động của kết cấu ở thời điểm chưa bị hư hỏng (kết cấu nguyên). Nhưng thông số này không phải lúc nào cũng có do không phải kết cấu nào cũng có số liệu quan trắc từ lúc mới xây dựng.

Đối với kết cấu mà không có số liệu quan trắc dầm nguyên, phương pháp làm mịn độ cong của dạng dao động (GSM) được đề xuất trong tài liệu [5]. Phương pháp này chỉ sử dụng số liệu đo dao động của dầm hư hỏng, sau đó tạo ra độ cong của dạng dao động của dầm nguyên bằng cách làm mịn độ cong dạng dao động của dầm hư hỏng. Do vậy, phương pháp này hoàn toàn không cần biết trước số liệu đo dao động hay độ cong của dạng dao động của dầm nguyên. Phương pháp này áp dụng thành công và tìm ra vị trí vết cắt trên dầm nguyên khối [5] hoặc là trên dầm liên hợp [6]. Trong những năm gần đây, phương pháp GSM được nhiều nhà khoa học nghiên cứu và kết hợp với các phương pháp hiện đại khác để nâng cao tính chính xác và phạm vi ứng dụng. Mô hình hồi quy Gaussian được đề xuất để xây dựng dạng dao động ít chịu ảnh hưởng bởi dao động nhiễu, từ đó nâng cao tính chính xác và hiệu quả của phương pháp GSM [7]. GSM kết hợp với mạng nơ ron nhân tạo đã thành công trong việc xác định hư hỏng và mức độ hư hỏng trong kết cấu dạng dầm [8] và trong dầm chủ của kết cấu cầu dầm [9].

Hiện nay tại Việt Nam, công tác đo dao động các kết cấu được quan tâm. Nhiều tần số dao động hay dạng dao động của kết cấu đã được đo và quan trắc như cầu Nam O [10], cầu Bộ Nghi [9], cầu Tân An [11]. Các thiết bị không dây bước đầu được nghiên cứu để tăng hiệu quả của phép đo [12]. Tuy vậy việc áp dụng số liệu thu thập được từ các phép đo quan trắc dao động vào trong lĩnh vực đánh giá sức khỏe công trình ở nước ta còn hạn chế. Trong bài báo này, dao động của mô hình dầm thí nghiệm được quan trắc và sử dụng để đánh giá phương pháp xác định hư hỏng bằng độ cong của dạng dao động. Sự thành công của phương pháp khi áp dụng cho mô hình dầm thí nghiệm sẽ là bước đầu để phát triển phương pháp. Tương lai, có thể đánh giá và sự báo sớm hư hỏng trong kết cấu phức tạp hơn như nhà, công trình cầu dựa vào số liệu đo dao động của các công trình này.

2. Độ cong của dạng dao động

2.1. Xác định độ cong của dạng dao động từ dạng dao động

Độ cong của dạng dao động của một kết cấu dầm là đạo hàm bậc hai của dạng dao động, tỷ lệ thuận với mô men uốn tại tiết diện đó và tỷ lệ nghịch với độ ứng chống uốn của tiết diện.

$$\phi''(x) = \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{M}{EI(x)} \quad (1)$$

Trong đó: $\phi(x)$ là dạng dao động chuyển vị; $EI(x)$ là độ cứng của tiết diện dầm tại vị trí tính toán; M là mô men uốn tại tiết diện tính toán.

Từ công thức trên ta nhận thấy rằng nếu như hư hỏng xuất hiện tại một vị trí nào đó trên dầm sẽ dẫn tới giảm độ cứng cục bộ của tiết diện dầm, từ đó làm tăng độ cong của dạng dao động tại vị trí

này. Việc thay đổi độ cong của dạng dao động chỉ diễn ra cục bộ tại vị trí hư hỏng nên có thể dùng chỉ số này để xác định vị trí hư hỏng.

Đối với các bài toán thực nghiệm, độ cong của dạng dao động có thể được xác định từ sai phân trung tâm của dạng dao động.

$$\phi_i'' = -\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (2)$$

trong đó ϕ_i dạng dao động chuyển vị theo phương thẳng đứng tại vị trí điểm đo thứ i và Δx là khoảng cách giữa hai điểm đo. Đối với điểm đo đầu tiên và điểm đo cuối cùng, độ cong của dạng dao động tại vị trí này được tính gần đúng dựa vào giá trị của 3 điểm đo gần kề. Chỉ số hư hỏng được định nghĩa là hiệu số giữa giá trị độ cong dạng dao động của kết cấu hư hỏng trừ đi kết cấu nguyên [4].

$$CDF = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\phi_{0j}'' - \phi_{dj}''| \quad (3)$$

trong đó N là tổng tất cả các mode dao động được đưa vào tính toán và phân tích; ϕ_{0j}'' : Độ cong của dạng dao động của dầm nguyên tại dạng dao động thứ j ; ϕ_{dj}'' : Độ cong của dạng dao động của dầm hư hỏng tại dạng dao động thứ j .

2.2. Phương pháp làm mịn độ cong của dạng dao động

Dựa chỉ số hư hỏng cho trong công thức (3) vị trí của hư hỏng trên dầm có thể được tìm ra. Tuy nhiên phương pháp này yêu cầu phải có số liệu dạng dao động của dầm nguyên, tức là của dầm trước khi hư hỏng. Tuy nhiên số liệu đo dao động của dầm nguyên không phải lúc nào cũng có.

Như đã biết rằng khi hư hỏng xảy ra tại một vị trí cục bộ nào đó trên dầm sẽ dẫn tới bước nhảy của độ cong dạng dao động tại vị trí đó. Vì vậy, đường cong trơn mịn được xây dựng từ chuỗi số Fourier lấy gần đúng từ giá trị đường cong của dầm hư hỏng được sử dụng để mô phỏng đường cong dạng dao động của dầm nguyên. Phương trình Fourier dùng để xây dựng đường cong trơn mịn của độ cong của dạng dao động được cho như sau:

$$\phi_{fi}''(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) \quad (4)$$

trong đó: a_0 : là hằng số; ω : Tần số lặp của dữ liệu; n : Số lượng các chuỗi dữ liệu được sử dụng ($1 \leq n \leq 8$). Các hệ số a_k, b_k trong phương trình sẽ được lựa chọn và tính toán dựa vào hàm “fit function” trong Matlab R2018b.

Từ phương trình (3) và (4), hệ số hư hỏng mới được định nghĩa dựa vào sự biến thiên của hàm độ cong dạng dao động của dầm hư hỏng và đường cong trơn được xây dựng từ chuỗi Fourier. Với mỗi dạng dao động khác nhau, có các hệ số hư hỏng khác nhau. Ở nghiên cứu này tác giả đề xuất lấy giá trị bình phương sự sai khác về độ cong của dạng dao động thay vì lấy giá trị tuyệt đối như trong phương pháp làm mịn, sau đó thực hiện phép chuẩn hóa ở mỗi dạng dao động và rồi cộng tất cả các hệ số hư hỏng ở các dạng dao động sau chuẩn hóa sẽ ra hệ số hư hỏng của hệ tại từng điểm. Quy trình tính toán được thể hiện trong các công thức bên dưới.

$$D_{ij} = (\phi_{dij}'' - \phi_{fij}'')^2 \quad (5)$$

trong đó: ϕ_{dij}'' và ϕ_{fij}'' là độ cong của dạng dao động tại dạng thứ j và tại điểm đo thứ i lần lượt của dầm bị phá hoại và đường cong Fourier.

Sử dụng hệ số hư hỏng theo phương trình (5) không cần số liệu của dầm nguyên. Đường cong trơn xây dựng từ chuỗi Fourier ϕ''_{fi} bằng cách lấy xấp xỉ đường cong dạng dao động của dầm hư hỏng được sử dụng như là đường cong của dạng dao động của dầm nguyên. Việc sử dụng hệ số hư hỏng đơn giản và dễ áp dụng trong thực tế.

Hệ số hư hỏng xác nhận được ở mỗi dạng dao động được chuẩn hóa. Ví dụ như đối với dạng thứ j , có M điểm đo, hệ số hư hỏng tại dạng dao động này có giá trị trung bình là X và độ lệch chuẩn là σ :

$$X = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_{ij}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (D_{ij} - X)^2} \quad (6)$$

Hệ số hư hỏng DI_{ij} tại dạng dao động thứ j và tại điểm đo thứ i được chuẩn hóa như sau:

$$DI_{ij} = \frac{(D_{ij} - X)}{\sigma} \quad (7)$$

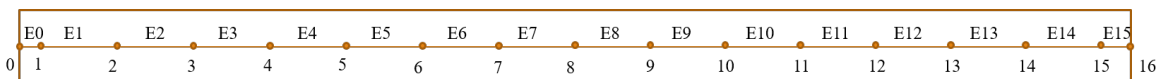
Hệ số hư hỏng của dầm tại một vị trí được định nghĩa là tổng hệ số hư hỏng tại điểm đó ở tất cả các dạng dao động:

$$DI_i = \sum_{j=1}^N DI_{ij} \quad (8)$$

3. Mô hình số

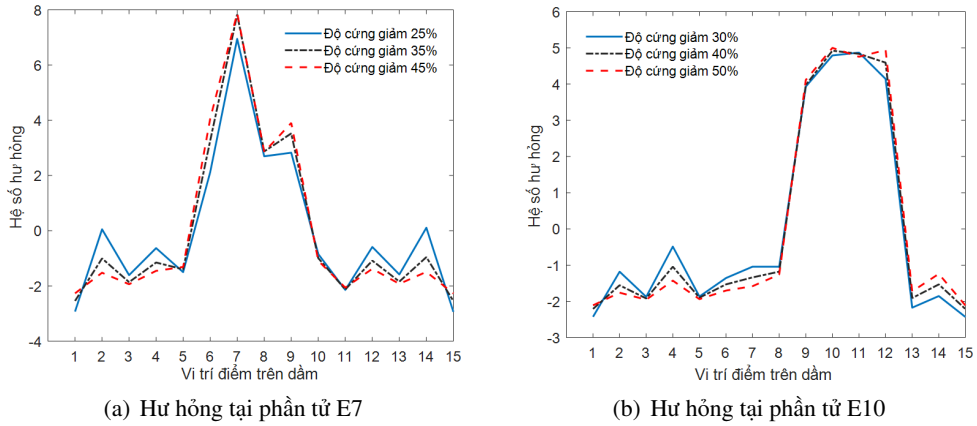
Để xác thực hiệu quả của phương pháp, một mô hình dầm được mô phỏng và các kích bản hư hỏng được tạo ra trên mô hình số này. Dầm thép có kích thước $1000 \times 70 \times 10$ (mm) được mô hình số trong phần mềm Matlab R2018b. Khối lượng riêng của thép $\rho = 7820 \text{ kg/m}^3$, và mô đun đàn hồi $E = 2,00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Mỗi phần tử dầm được mô phỏng bằng 2 nút. Trong mô hình không gian mỗi nút có 6 bậc tự do, 3 xoay và 3 chuyển vị. Trong bài báo này, dầm nguyên được mô hình bằng 100 phần tử dạng dầm trong mặt phẳng. Lúc này mỗi nút dầm có 3 bậc tự do, 1 xoay và 2 chuyển vị. Số lượng phần tử được điều chỉnh cho đến khi sai số tính toán của các tần số riêng giảm dưới mức cho phép.

Dầm được khảo sát tại 14 phần tử (từ E1 tới E14) và 15 điểm (từ điểm 1 đến 15) như trên Hình 1 và các kích bản hư hỏng được giả thiết tạo ra trên phần tử E7 và E10. Trên Hình 6 thể hiện bảy dạng dao động của dầm nguyên. Áp dụng phương trình (2) để tìm độ cong của dạng dao động của các kích bản dầm hư hỏng tại 15 điểm khảo sát. Từ đó tính toán được hệ số hư hỏng tại 15 điểm khảo sát này theo phương trình từ (4) đến (8) cho bốn dạng dao động đầu tiên của dầm.



Hình 1. Mô hình số

Hệ số hư hỏng thể hiện Hình 2 cho thấy rằng dựa vào hệ số hư hỏng tính, phần tử hư hỏng đã được khoanh vùng chính xác. Kích bản đầu tiên, hư hỏng giả thiết xuất hiện ở phần tử E7 với nhiều mức độ hư hỏng khác nhau, lần lượt là 25%, 35%, và 34%. Hệ số hư hỏng trên hình 2a đã khoanh vùng hư hỏng đúng vị trí này đúng với cả ba mức độ này. Tương tự như vậy, khi hư hỏng xảy ra ở phần tử E10,



Hình 2. Hệ số hư hỏng tính cho mô hình số

với các mức độ hư hỏng lần lượt là 30%, 40%, và 50%, hệ số hư hỏng tại vùng có phần tử hư hỏng rất cao so với các vùng khác. Như vậy, chỉ số hư hỏng trong phương pháp GSM đã giúp xác định vị trí hư hỏng rõ ràng. Nếu số điểm khảo sát trên dầm càng lớn, khoảng cách càng nhỏ thì kết quả càng gần với vị trí hư hỏng và độ chính xác về vị trí càng cao.

4. Thí nghiệm dầm hai đầu tự do

4.1. Mô hình thí nghiệm

Một mô hình dầm hai đầu tự do được xây dựng trong phòng thí nghiệm bộ môn Cầu - Công trình ngầm, khoa Cầu đường, trường Đại học Xây dựng Hà Nội. Dầm thí nghiệm có chiều dài 1,0 m, rộng 0,07 m và cao 0,01 m (Hình 3(a)). Dầm được làm bằng thép có khối lượng riêng $\rho = 7820 \text{ kg/m}^3$, và mô đun đàn hồi $E = 2,00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. Máy tính kết nối với bộ thiết bị NI được sử dụng để thu thập dữ liệu đo (Hình 3(b)). Dầm được treo trên hai sợi dây thép mảnh tại vị trí đặt đầu đo số 4 và 12. Mười lăm đầu đo gia tốc được gắn trên dầm. Vị trí các đầu đo được miêu tả ở Hình 4. Các đầu đo có trọng lượng khoảng 7,8 g và độ nhạy trong khoảng 10,13 – 10,50 mV/m/s^2 . Tần số lấy mẫu là $f_s = 2560$



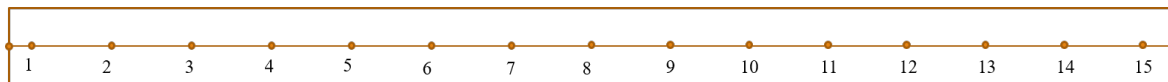
(a) Dầm thí nghiệm



(b) Máy tính và bộ đầu đo

Hình 3. Hệ số hư hỏng tính cho mô hình số

Hz và thời gian lấy mẫu cho mỗi lần đo là 300 giây. Tần số lấy mẫu càng cao thì số dạng dao động tìm được của dầm càng lớn. Tuy vậy, với các dạng dao động có tần số dao động riêng cao thường khó chính xác, nên với tần số lấy mẫu này sẽ tìm được bảy dạng dao động đầu tiên của dầm.



Hình 4. Vị trí bố trí các đầu đo trên dầm

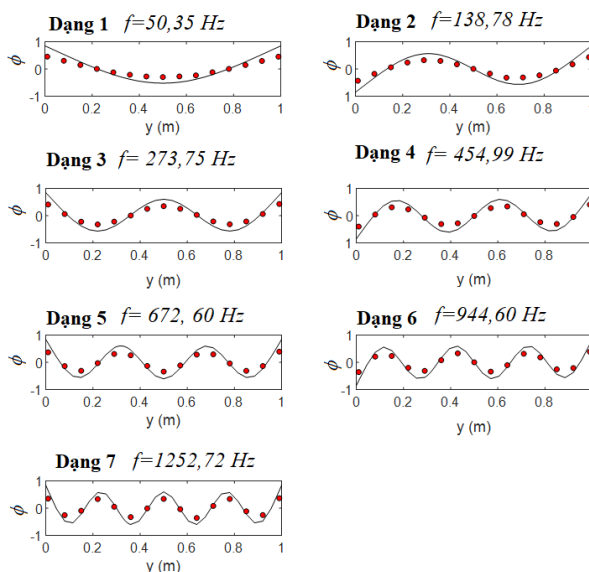
Dầm được kích thích dao động bằng cách sử dụng búa gõ chuyên dụng, gõ vào một vị trí bất kỳ trên dầm một lần duy nhất trong mỗi phép đo. Trong thí nghiệm này, lực đầu vào của búa sẽ không được đo lại. Có thể thay búa chuyên dụng bằng các thiết bị gõ bất kỳ hoặc lực kích thích dao động cho dầm.

Để mô phỏng dầm hư hỏng, tại giữa vị trí hai đầu đo số 5 và 6, hai vết cắt được tạo ra trên dầm. Kích thước của hai vết cắt lần lượt là $5 \times 12,5$ (mm) and $5 \times 13,3$ (mm). Vị trí và hình dạng các vết cắt được thể hiện trên Hình 5.



Hình 5. Vết cắt trên dầm

Phương pháp khai triển hàm mật độ phổ trong miền tần số (FDD) [13] được sử dụng để phân tích số liệu đo được trên dầm hư hỏng. Phương pháp phân tích miền tần số FDD được biết đến như là một phương pháp đơn giản và hiệu quả khi cần phân tích dữ liệu dao động. Dựa vào phương pháp này, tần số dao động riêng và dạng dao động của 7 dạng dao động đầu tiên được tìm ra và thể hiện trên Hình 6.

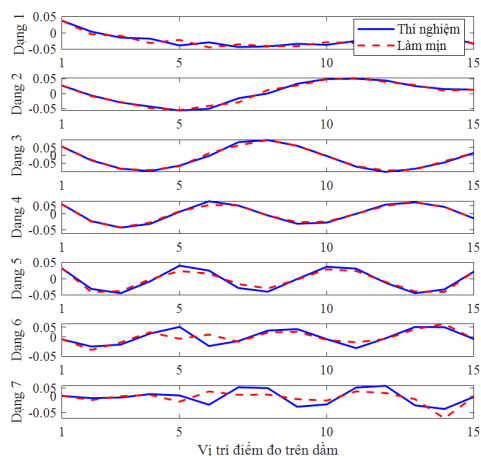


Hình 6. Bảy dạng dao động đầu tiên của dầm thí nghiệm, trục y dọc theo chiều dài dầm

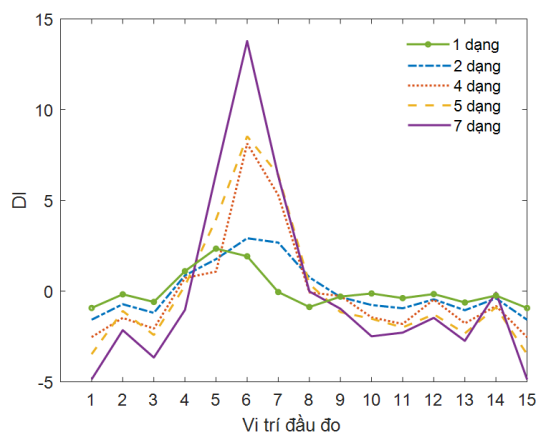
Trong đó đường tròn thể hiện các dạng dao động của dầm tìm được theo mô hình số ở phần 2 và các dạng dao động của dầm tìm được từ thí nghiệm thể hiện qua các tung độ tại vị trí đặt đầu đo. Ta nhận thấy rằng các dạng dao động tìm được từ thực nghiệm hoàn toàn khớp với mô hình số.

4.2. Kết quả

Từ các dạng dao động đã tìm được ở trên, sử dụng phương pháp sai phân trung tâm của dạng dao động để tìm ra độ cong của dạng dao động của dầm dao động. Sau đó, sử dụng phương pháp làm mịn độ cong của dạng dao động theo công thức (4) và tính toán chỉ số hư hỏng theo công thức từ (5) đến (8). Trên Hình 7 thể hiện độ cong của dạng dao động được tính toán từ dạng dao động có được từ thí nghiệm. Sau đó phương pháp làm mịn dạng dao động được ứng dụng để làm tròn độ cong của dạng dao động thí nghiệm. Hình 8 thể hiện tổng hệ số hư hỏng của các dạng dao động sau khi được chuẩn hóa cho các trường hợp khác nhau là đo được 1 dạng, 2 dạng, 4 dạng, 5 dạng và 7 dạng dao động riêng. Hệ số hư hỏng trong trường hợp dùng 1 dạng dao động tại đầu đo số 5 là cao nhất. Các trường hợp còn lại tại vị trí đầu đo số 6 là cao nhất. Như vậy có thể kết luận hư hỏng ở quanh vị trí đầu đo có hệ số hư hỏng cao này. Điều này là hoàn toàn chính xác với thí nghiệm, khi dầm được tạo vết cắt tại vị trí giữa đầu đo số 5 và số 6. Khi sử dụng càng nhiều dạng dao động thì hệ số hư hỏng càng cao và càng dễ phân biệt được vị trí hư hỏng so với các vị trí khác. Trong trường hợp chỉ có 1 dạng dao động đầu tiên, phương pháp vẫn thể hiện được đỉnh tại vị trí hư hỏng cho dù hệ số hư hỏng tính được không chênh lệch lớn so với các điểm còn lại như với trường hợp dùng nhiều dạng dao động. Để kết quả khoanh vùng hư hỏng được chính xác hơn nữa thì cần sử dụng thêm nhiều đầu đo, chia nhỏ dầm hoặc kết hợp với các phương pháp tiên tiến khác.



Hình 7. Độ cong của dạng dao động



Hình 8. Hệ số hư hỏng trên dầm

5. Kết luận

Trong bài báo này, hư hỏng tại một vị trí trên dầm đã được tìm ra bằng phương pháp thí nghiệm dựa vào số liệu đo dao động. Một chỉ số phát hiện hư hỏng dựa vào phương pháp làm mịn độ cong của dạng dao động được đề xuất. Nhờ đó vị trí hư hỏng trên dầm có thể được khoanh vùng mà chỉ cần biết số liệu đo dao động của dầm hư hỏng, không cần biết số liệu đo dao động của dầm nguyên. Điều này có ý nghĩa rất lớn trong việc áp dụng thực tế vì không phải lúc nào cũng có sẵn số liệu đo dao động của kết cấu nguyên, kết cấu trước khi bị hư hỏng hay phá hoại. Để kiểm tra tính ứng dụng của

hệ số phát hiện hư hỏng đề xuất, thí nghiệm dầm giản đơn có hư hỏng được thực hiện trong phòng thí nghiệm. Tại vị trí xảy ra hư hỏng ghi nhận giá trị đỉnh của hệ số phát hiện hư hỏng. Trong bài báo này, hệ số hư hỏng được tính toán dựa vào bảy dạng dao động tìm được trong thí nghiệm. Tuy nhiên, phương pháp này có thể áp dụng được khi có thể tìm được ít nhất một dạng dao động của kết cấu hoặc tìm được nhiều dạng dao động không liên tiếp. Số lượng điểm đo bố trí trên dầm càng lớn thì đường cong dạng dao động tìm được càng chính xác và trơn, từ đó dẫn tới việc khoanh vùng vị trí hư hỏng tìm được càng chính xác. Phương pháp xác định hư hỏng dựa vào độ cong của dạng dao động xác định từ số liệu do dao động đơn giản, dễ thực hiện. Việc áp dụng thành công phương pháp này trong phòng thí nghiệm tạo điều kiện cho việc nghiên cứu, phát triển và áp dụng cho các mô hình kết cấu phức tạp hơn và các công trình ngoài thực tế.

Tài liệu tham khảo

- [1] Yan, Y. J., Cheng, L., Wu, Z. Y., Yam, L. H. (2007). [Development in vibration-based structural damage detection technique](#). *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5):2198–2211.
- [2] Alvandi, A., Cremona, C. (2006). [Assessment of vibration-based damage identification techniques](#). *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2):179–202.
- [3] Pandey, A. K., Biswas, M., Samman, M. M. (1991). [Damage detection from changes in curvature mode shapes](#). *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332.
- [4] Wahab, M. M. A., De Roeck, G. (1999). [Damage detection in bridges using modal curvatures: application to a real damage scenario](#). *Journal of Sound and vibration*, 226(2):217–235.
- [5] Ratcliffe, C. P. (1997). [Damage detection using a modified Laplacian operator on mode shape data](#). *Journal of Sound and Vibration*, 204(3):505–517.
- [6] Ratcliffe, C. P., Bagaria, W. J. (1998). [Vibration technique for locating delamination in a composite beam](#). *AIAA Journal*, 36(6):1074–1077.
- [7] Meruane, V., Fernandez, I., Ruiz, R. O., Petrone, G., Lopez-Droguett, E. (2019). [Gapped Gaussian smoothing technique for debonding assessment with automatic thresholding](#). *Structural Control and Health Monitoring*, 26(8):e2371.
- [8] Nguyen, D. H., Bui-Tien, T., Roeck, G. D., Wahab, M. A. (2021). [Damage detection in structures using modal curvatures gapped smoothing method and deep learning](#). *Structural Engineering and Mechanics*, 77(1):47–56.
- [9] Nguyen, D. H., Nguyen, Q. B., Bui-Tien, T., De Roeck, G., Wahab, M. A. (2020). [Damage detection in girder bridges using modal curvatures gapped smoothing method and Convolutional Neural Network: Application to Bo Nghi bridge](#). *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109:102728.
- [10] Nguyen, D. H., Tran-Ngoc, H., Bui-Tien, T., De Roeck, G., Wahab, M. A. (2020). [Damage detection in truss bridges using transmissibility and machine learning algorithm: Application to Nam O bridge](#). *Smart Structures and Systems*, 26(1):35–47.
- [11] Phuc, N. D., Tung, K. D., Duong, N. H. (2018). [Loại bỏ ảnh hưởng ngẫu nhiên trong dữ liệu đo đạc nhằm xác định hiệu quả hơn các tham số động học cho công trình cầu](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐHXDHN*, 12(2):31–35.
- [12] Thanh, T. Đ. (2020). [Thiết bị thu thập dữ liệu không dây sử dụng cảm biến áp điện ứng dụng trong đo dao động kết cấu cầu](#). *Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải*, 71(2):135–144.
- [13] Brincker, R., Zhang, L., Andersen, P. (2001). [Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition](#). *Smart Materials and Structures*, 10(3):441.