

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG DẦM SANDWICH FGM XOPP VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÁC NHAU BẰNG PHƯƠNG PHÁP RITZ

Hương Quý Trường^{a,*}, Đặng Xuân Hùng^a, Trần Minh Tú^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 07/08/2021, Sửa xong 15/09/2021, Chấp nhận đăng 20/09/2021

Tóm tắt

Bài báo phân tích dao động riêng của dầm sandwich có lớp bề mặt là vật liệu FGM và lớp lõi là vật liệu FGM xopp với các điều kiện biên khác nhau. Sử dụng nguyên lý cực tiểu năng lượng toàn phần, hệ phương trình chuyển động được thiết lập cho các mô hình dầm khác nhau trên cơ sở trường chuyển vị dưới dạng tổng quát. Tần số dao động riêng của dầm được xác định theo tiếp cận nghiệm bán giải tích bằng phương pháp Ritz. Kết quả phân tích được kiểm chứng với các tài liệu uy tín cho thấy độ tin cậy của mô hình và chương trình tính đã thiết lập. Ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu và điều kiện biên đến tần số dao động riêng được đánh giá qua các khảo sát số.

Từ khoá: dầm sandwich; vật liệu FGM; vật liệu FGM xopp; phân tích dao động riêng; phương pháp Ritz.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED POROUS SANDWICH BEAMS UNDER VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS BY USING RITZ METHOD

Abstract

In this paper, free vibration of sandwich beams with functionally graded face sheets and porous core subjected to various boundary conditions is analyzed. Using the minimum total potential energy principle in the framework with generalized beam theory, equations of motion are derived. Based on the semi-analytical approach, natural frequencies are predicted by applying the Ritz method. Obtained results are compared with those of available literature to validate the accuracy of the proposed theoretical model and homemade Matlab's code. Effects of geometrical and material parameters, boundary conditions on natural frequency are evaluated through numerical investigations.

Keywords: sandwich beam; functionally graded materials; functionally graded porous materials; free vibration analysis; Ritz method.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2021-15\(5V\)-02](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2021-15(5V)-02) © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Tổng quan

Kết cấu sandwich có cấu tạo gồm ba lớp vật liệu: hai lớp bề mặt tương đối mỏng, thường làm từ các loại vật liệu có cường độ cao, đóng vai trò chịu lực chính; lớp lõi có chiều dày lớn hơn và thường được làm từ các loại vật liệu nhẹ, mềm, chủ yếu chịu lực cắt, đóng vai trò cách âm, cách nhiệt, ... Với đặc điểm cấu tạo hợp lý, kết cấu sandwich phát huy tốt được ưu điểm của các vật liệu thành phần và đang ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp, đặc biệt là lĩnh vực kỹ thuật xây dựng.

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: truonghq@nuce.edu.vn (Trường, H. Q.)

Vật liệu xốp hay vật liệu rỗng (functionally graded porous materials - FGPMs) là một dạng của vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded materials - FGMs). Loại vật liệu này có các lỗ rỗng phân bố liên tục với qui luật phân bố và mật độ lỗ rỗng xác định nhằm đạt được những tính chất cơ học mong muốn của người thiết kế. Với cấu tạo như vậy, vật liệu FGP có trọng lượng nhẹ, khả năng hấp thụ năng lượng cao, khả năng cách âm, cách nhiệt và khả năng thấm thấu tốt [1–3], ... Do đó, loại vật liệu này thích hợp để làm lớp lõi của kết cấu sandwich. Để hạn chế hiện tượng tập trung ứng suất và hiện tượng tách lớp thường thấy trong kết cấu sandwich, cần đảm bảo tính liên tục giữa các lớp vật liệu. Dầm sandwich với hai lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi làm bằng bọt kim loại (metal foam) là một lựa chọn hợp lý để tính chất vật liệu theo chiều cao dầm được liên tục. Trong thực tế, các bài toán phân tích tĩnh, dao động riêng và ổn định của dầm sandwich có lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi bằng vật liệu đẳng hướng đã được nghiên cứu tương đối đầy đủ [4–7]. Magnucka-Blandzi và Magnucki [8] mặc dù đã nghiên cứu bài toán tĩnh và ổn định của dầm sandwich có lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi bằng bọt kim loại nhưng mới chỉ dừng lại ở điều kiện biên tựa khớp, các nghiên cứu về dao động riêng của mô hình dầm này với các điều kiện biên khác nhau còn ít được đề cập đến.

Lý thuyết tính toán dầm đã có một lịch sử phát triển lâu đời. Lý thuyết dầm cổ điển (classical beam theory-CBT) [9] hay còn được gọi là lý thuyết dầm Euler-Bernoulli cho kết quả tốt khi áp dụng cho các dầm dài. Tuy nhiên với các dầm ngắn thì lý thuyết này cho kết quả không phù hợp với thực nghiệm [10, 11], ... do chưa kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt. Lý thuyết dầm Timoshenko (Timoshenko beam theory - TBT) tuy đã kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang nhưng lại phải sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt [12] do ứng suất tiếp theo lý thuyết này phân bố đều theo chiều cao tiết diện dầm. Các lý thuyết dầm bậc cao (Higher order beam theory - HBT) sau đó được đề xuất để hạn chế nhược điểm này của lý thuyết TBT. Có thể kể đến một số lý thuyết điển hình như: lý thuyết dầm bậc ba Reddy [13, 14]; lý thuyết dầm với trường chuyển vị dạng hàm sin, sinh của Touratier [15, 16], ... Để đánh giá phạm vi sử dụng của các lý thuyết dầm cho từng cấu kiện dầm cụ thể, cần có những nghiên cứu để phân tích ứng xử cơ học của chúng nhằm tối ưu hóa quá trình tính toán, thiết kế, thi công và bảo trì các kết cấu công trình trong thực tế.

Trong các nghiên cứu trước, Hùng và Trường [17] đã phân tích dao động tự do, sau đó cùng với Anh [18] đã giải quyết vấn đề tối ưu hóa thiết kế theo tiêu chuẩn cực đại tần số dao động riêng cơ bản của dầm sandwich với hai lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi bằng vật liệu xốp. Tuy nhiên trong các nghiên cứu trên các tác giả chỉ sử dụng dạng nghiệm Navier cho dầm có liên kết đơn giản ở hai đầu. Bài báo này sẽ tiến hành phân tích dao động riêng tuyến tính của dầm sandwich với hai lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi bằng vật liệu xốp (metal foam) với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Ritz. Trường chuyển vị được biểu diễn dưới dạng tổng quát, theo đó các trường hợp riêng tương ứng với một số lý thuyết dầm thông dụng. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học và điều kiện biên đến tần số dao động riêng của dầm sandwich sẽ được khảo sát, từ đó phạm vi sử dụng của các lý thuyết dầm cũng sẽ được làm rõ.

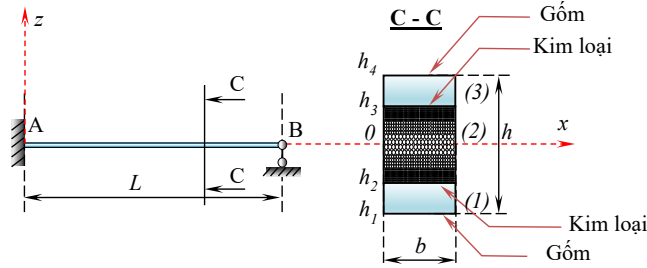
2. Dầm sandwich có lớp bề mặt bằng vật liệu FGM và lớp lõi bằng vật liệu xốp

Xét dầm sandwich có kích thước $L \times b \times h$ và hệ trục tọa độ như thể hiện trên Hình 1. Các lớp vật liệu được đánh số 1, 2, 3 từ dưới lên. Hai lớp bề mặt của dầm sandwich bằng vật liệu FGM với các cơ tính vật liệu được giả thiết biến thiên theo chiều cao của dầm với quy luật :

$$V(z) = (V_c - V_m)g(z) + V_m \quad (1)$$

trong đó: V_c, V_m lần lượt là các hằng số vật liệu của gôm và kim loại; $g(z)$ là hàm tỷ lệ thể tích được giả thiết dưới dạng hàm lũy thừa. Với lớp thứ 1 và 3 của dầm sandwich thì hàm tỷ lệ thể tích $g(z)$ có dạng như sau:

$$\begin{cases} g_z^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_2}{h_1 - h_2} \right)^p, & z \in [h_1, h_2] \\ g_z^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_4 - h_3} \right)^p, & z \in [h_3, h_4] \end{cases} \quad (2)$$



Hình 1. Dầm sandwich có bề mặt bằng FGM và lõi bằng vật liệu xốp

Lớp lõi của dầm sandwich (lớp thứ 2 của dầm) làm bằng bột kim loại với quy luật phân bố lỗ rỗng đối xứng. Đặc trưng cơ học vật liệu của lớp lõi được định nghĩa bởi công thức (3) và biểu diễn theo Hình 1 [19].

$$V(z) = V_1 \left[1 - e_0 \cos \left(\frac{\pi z}{h_3 - h_2} \right) \right] \quad (3)$$

trong đó: V_1 là giá trị lớn nhất của đặc trưng cơ học của vật liệu lớp lõi; e_0 là hệ số mật độ lỗ rỗng.

3. Các lý thuyết dầm khác nhau và phương pháp Ritz

3.1. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của dầm được biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - zw_{0,x} + f(z)\theta_x \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó: u_0, w_0 là các chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, z ; θ_x là góc xoay của mặt cắt ngang của dầm tại điểm đang xét quanh trục y ; $f(z)$ là hàm số phụ thuộc vào lý thuyết dầm cụ thể và được cho trong Bảng 1.

3.2. Trường biến dạng - ứng suất

Trường biến dạng được xác định từ quan hệ giữa chuyển vị - biến dạng theo lý thuyết đàn hồi được viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} = u_{0,x} - zw_{0,xx} + f(z)\theta_{x,x} \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = f(z)_{,z}\theta_x \end{aligned} \quad (5)$$

Dấu phẩy trước chỉ số dưới là ký hiệu đạo hàm riêng bậc 1 và bậc 2 theo các biến không gian tương ứng.

Bảng 1. Bảng xác định các hàm số theo các lý thuyết dầm khác nhau

Lý thuyết dầm	Ký hiệu	$f(z)$
Euler – Bernoulli [9]	CBT	0
Timoshenko [20]	FSDBT	z
Lý thuyết dầm bậc ba [21]	PSDBT	$z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$
Lý thuyết dầm với hàm chuyển vị dạng hàm sin [15]	TSDBT	$\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$
Lý thuyết dầm với hàm chuyển vị dạng hàm sinh [16]	HSDBT	$h \sinh \left(\frac{z}{h} \right) - z \cosh \left(\frac{1}{2} \right)$

Trường ứng suất trong dầm được xác định từ trường biến dạng thông qua định luật Hooke, với $\nu = 0,3$ là hệ số Poisson được giả thiết là hằng số theo phương chiều cao tiết diện. Thành phần ứng suất tại mỗi điểm thuộc lớp thứ k của tiết diện dầm được xác định như sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{pmatrix} E(z) & 0 \\ 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (6)$$

3.3. Thành phần nội lực trong dầm

Các thành phần nội lực tại các tiết diện dầm được xác định theo công thức sau:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ F_{xx} \\ H_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k}^{h_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ -z\sigma_{xx} \\ f\sigma_{xx} \\ f_{,z}\sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (7)$$

3.4. Biểu thức năng lượng toàn phần của dầm

Biểu thức năng lượng toàn phần cho bài toán phân tích tần số dao động riêng của dầm được xác định theo biểu thức

$$\Pi = U - K \quad (8)$$

trong đó U là thế năng biến dạng đàn hồi, K là động năng.

- Thế năng biến dạng đàn hồi được xác định theo công thức sau:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \int_0^L (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dx dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A(u_{0,x})^2 + 2Bu_{0,x}w_{0,xx} + D(w_{0,xx})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2B^*u_{0,x}\theta_{x,x} + 2D^*w_{0,xx}\theta_{x,x} + H^*(\theta_{x,x})^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L [A^*(\theta_x)^2] dx \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó:

$$(A; B; D; B^*; D^*; H^*) = b \int_{-h/2}^{h/2} E_z(1; -z; z^2; f; -zf; f^2) dz$$

$$A^* = b \int_{-h/2}^{h/2} G_z(f; z)^2 dz$$
(10)

- Động năng của dầm được xác định bởi:

$$K = \frac{1}{2} \int_A \int_0^L \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dA$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_0 \dot{u}_0^2 + I_2 (\dot{w}_{0,x})^2 + I_5 (\dot{\theta}_x)^2 + 2I_1 \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} \right. \\ \left. + 2I_3 \dot{\theta}_x \dot{u}_0 + 2I_4 \dot{w}_{0,x} \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0^2 \right\} dx$$
(11)

trong đó các thành phần mô men quán tính của dầm được xác định như sau:

$$(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, -z, z^2, f, -zf, f^2) dz$$
(12)

trong đó ρ_z là hàm khối lượng riêng tại vị trí z dọc theo chiều cao dầm.

- Thay (9) và (11) vào biểu thức (8) ta nhận được hàm năng lượng toàn phần của dầm như sau:

$$\Pi = U - K$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[A(u_{0,x})^2 + 2Bu_{0,x}w_{0,xx} + D(w_{0,xx})^2 + \right. \\ \left. + 2B^*u_{0,x}\theta_{x,x} + 2D^*w_{0,xx}\theta_{x,x} + H^*(\theta_{x,x})^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L [A^*(\theta_x)^2] dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_0 \dot{u}_0^2 + I_2 (\dot{w}_{0,x})^2 + I_5 (\dot{\theta}_x)^2 + 2I_1 \dot{u}_0 \dot{w}_{0,x} \right. \\ \left. + 2I_3 \dot{\theta}_x \dot{u}_0 + 2I_4 \dot{w}_{0,x} \dot{\theta}_x + I_0 \dot{w}_0^2 \right\} dx$$
(13)

3.5. Phương pháp Ritz

Theo phương pháp Ritz, các thành phần chuyển vị của một điểm trên mặt trung bình được giả thiết dưới dạng chuỗi đa thức như sau:

$$u_0(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k e^{i\omega t}; \quad w_0(x, t) = \sum_{k=1}^m d_k \psi_k e^{i\omega t}; \quad \theta_x(x, t) = \sum_{k=1}^m e_k \phi_k e^{i\omega t}$$
(14)

trong đó, $c_k; d_k; e_k$ là các hệ số chưa biết, $\varphi_k; \psi_k; \phi_k$ là các hàm đa thức đã xác định thỏa mãn các điều kiện biên của dầm, được chọn dưới dạng tổng quát như sau:

$$\varphi_k = f_u x^{k-1}; \quad \psi_k = f_w x^{k-1}; \quad \phi_k = f_\theta x^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$
(15)

Bảng 2. Bảng xác định các hệ số p_*, q_* theo các điều kiện biên khác nhau (C- Ngàm; S- Gối; F- đầu tự do)

Điều kiện biên	C-C	S-S	C-F	C-S
p_u	1	1	1	1
q_u	1	1	0	0
p_w	2	1	2	2
q_w	2	1	0	1
p_θ	1	0	1	1
q_θ	1	0	0	0

trong đó m là số số hạng của chuỗi đa thức, hàm $f_* = x^{p_*}(L-x)^{q_*}$ là hàm đặc trưng điều kiện biên với p_*, q_* được chọn theo Bảng 2 và $*$ = u, w, θ .

Với dầm có kích thước $L \times b \times h$, với các thành phần chuyển vị $u_0(x, t); w_0(x, t); \theta_x(x, t)$ được thể hiện theo công thức (14). Thay các thành phần chuyển vị này vào biểu thức năng lượng toàn phần của dầm (13) ta được hàm tổng năng lượng toàn phần theo dạng đa thức với $3m$ ẩn số là các hệ số chưa biết $c_k; d_k; e_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Áp dụng nguyên lý năng lượng toàn phần cực tiểu ta có hệ $3m$ phương trình với các ẩn số $c_k; d_k; e_k$ dưới dạng:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = \frac{\partial \Pi}{\partial d_k} = \frac{\partial \Pi}{\partial e_k} = 0 \quad (16)$$

Viết hệ phương trình (16) dưới dạng ma trận ta có dạng phương trình như sau:

$$\left(\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ (K^{12})^T & K^{22} & K^{23} \\ (K^{13})^T & (K^{23})^T & K^{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ (M^{12})^T & M^{22} & M^{23} \\ (M^{13})^T & (M^{23})^T & M^{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} c_k \\ d_k \\ e_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

trong đó: $[K]$ là ma trận độ cứng $3m \times 3m$; $[M]$ là ma trận khối lượng $3m \times 3m$. Các hệ số trong ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phương trình (17) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= A \int_0^L \varphi_{i,x} \varphi_{j,x} dx; & K_{ij}^{12} &= B \int_0^L \varphi_{i,x} \psi_{j,xx} dx \\ K_{ij}^{13} &= B^* \int_0^L \varphi_{i,x} \phi_{j,x} dx; & K_{ij}^{22} &= D \int_0^L \psi_{i,xx} \psi_{j,xx} dx - N_{0x} \int_0^L \psi_{i,x} \psi_{j,x} dx \\ K_{ij}^{33} &= H^* \int_0^L \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx + A^* \int_0^L \phi_i \phi_j dx; & K_{ij}^{23} &= D^* \int_0^L \psi_{i,xx} \phi_{j,x} dx \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^{11} &= I_0 \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx; & M_{ij}^{12} &= I_1 \int_0^L \varphi_i \psi_{j,x} dx \\
 M_{ij}^{13} &= I_3 \int_0^L \varphi_i \phi_j dx; & M_{ij}^{22} &= I_0 \int_0^L \psi_i \psi_j dx + I_2 \int_0^L \varphi_{i,x} \varphi_{j,x} dx \\
 M_{ij}^{23} &= I_4 \int_0^L \psi_{i,x} \phi_j dx; & M_{ij}^{33} &= I_5 \int_0^L \phi_i \phi_j dx
 \end{aligned} \tag{19}$$

Giải hệ phương trình trị riêng (17) ta có thể xác định tần số dao động riêng của dầm sandwich.

4. Kết quả số

Trong các khảo sát sau đây, bài báo xét dầm sandwich có kích thước $L \times b \times h$, hai lớp bề mặt làm bằng vật liệu P-FGM (Al – Al₂O₃) với $E_m = 70$ MPa, $\nu_m = 0,3$, $\rho_m = 2702$ (kg/m³) và $E_c = 380$ MPa, $\nu_c = 0,3$, $\rho_c = 3960$ (kg/m³); lớp lõi làm bằng bọt kim loại nhôm (Aluminium foam) có mô đun đàn hồi lớn nhất $E_1 = 70$ MPa, hệ số Poisson $\nu_1 = 0,3$, khối lượng riêng lớn nhất $\rho_1 = 2702$ (kg/m³) và mật độ lỗ rỗng e_0 và tuân theo quy luật phân bố lỗ rỗng (3). Dầm sandwich được đặt tên theo tỷ lệ chiều dày các lớp bề mặt-lõi-bề mặt. Ví dụ dầm 1-1-1 có chiều dày các lớp bề mặt bằng nhau và bằng chiều dày lớp lõi. Ba điều kiện biên khác nhau được xem xét: Hai đầu liên kết đơn giản (S-S), hai đầu liên kết ngàm (C-C) và một đầu ngàm một đầu tự do (C-F). Trong các khảo sát sau đây, bài báo sử dụng khái niệm tần số dao động riêng không thứ nguyên được định nghĩa như sau [5]:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{20}$$

4.1. Kiểm chứng độ tin cậy của chương trình tính

Để kiểm chứng độ tin cậy của mô hình và chương trình tính, bài báo tiến hành khảo sát lại bài toán trong các tài liệu [4, 5]. Xét dầm sandwich cấu hình 1-1-1; 1-2-1 có lớp bề mặt làm bằng vật liệu FGM và lõi bằng vật liệu ceramic đẳng hướng với các điều kiện biên khác nhau S-S, C-C, C-F. Các

Bảng 3. Kết quả kiểm chứng tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên của dầm sandwich ($p = 5$, $L/h = 5$, $e_0 = 0$)

Lý thuyết	S-S		C-C		C-F		
	1-1-1	1-2-1	1-1-1	1-2-1	1-1-1	1-2-1	
$\bar{\omega}$	HSDBT [5]	3,0182	3,3771	6,3925	7,0723	1,0936	1,2258
	PSDBT [4]	3,0181	3,3771	6,3889	7,0691	1,0935	1,2257
	PSDBT - Bài báo	3,0181	3,3771	6,3912	7,0722	1,0935	1,2257
	TSDBT - Bài báo	3,0188	3,3772	6,3991	7,0744	1,0937	1,2258
	HSDBT - Bài báo	3,0180	3,3771	6,3905	7,0721	1,0935	1,2257
	CBT - Bài báo	3,0471	3,4517	6,9449	7,7981	1,1033	1,2387
	FSDBT - Bài báo	3,0039	3,3652	6,2565	6,9589	1,0910	1,2235

thông số hình học và vật liệu đầu vào như sau: $L/h = 5$; $e_0 = 0$; $p = 5$. Kết quả kiểm chứng được giới thiệu trong Bảng 3.

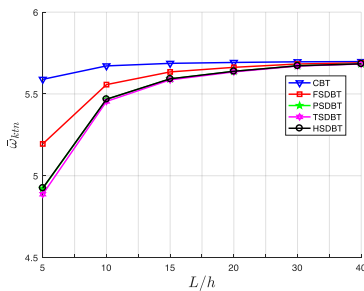
Kết quả kiểm chứng cho thấy sự phù hợp so với các kết quả đã công bố trong [4, 5]. Cụ thể, kết quả kiểm chứng với các lý thuyết bậc cao PSDBT, HSDBT có sai số rất bé (0,005%), với các lý thuyết CBT và FSDBT cho sai số lớn hơn. Điều này là hoàn toàn phù hợp với các giả thiết và sự hạn chế của các lý thuyết CBT và FSDBT. Như vậy chương trình tính mà bài báo đã xây dựng là đáng tin cậy.

4.2. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước dầm L/h

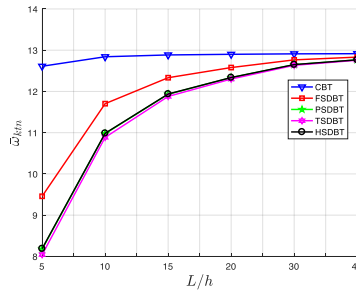
Tiến hành khảo sát dầm sandwich 1-2-1, hệ số độ rỗng của vật liệu lõi $e_0 = 0,4$, các giá trị của tỷ số $L/h = 5$; 10; 15; 20; 30; 40 và chỉ số tỷ lệ thể tích lớp bề mặt $p = 5$. Kết quả khảo sát được giới thiệu chi tiết trong Bảng 4 và được thể hiện dưới dạng đồ thị trên Hình 2.

Bảng 4. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên tính theo các mô hình dầm khác nhau khi tỷ số L/h thay đổi

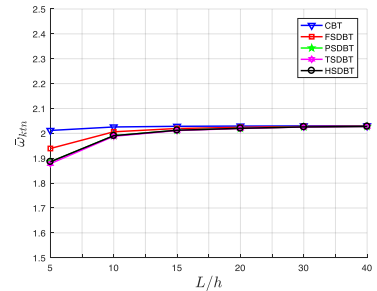
Lý thuyết		L/h					
		5	10	15	20	30	40
Tần số $\bar{\omega}$ biên S-S	CBT	5,5894	5,6714	5,6870	5,6925	5,6965	5,6978
	FSDBT	5,1947	5,5571	5,6346	5,6627	5,6831	5,6903
	PSDBT	4,9220	5,4667	5,5920	5,6382	5,6720	5,6840
	TSDBT	4,8870	5,4543	5,5860	5,6347	5,6705	5,6831
	HSDBT	4,9251	5,4678	5,5925	5,6385	5,6722	5,6841
Tần số $\bar{\omega}$ biên C-C	CBT	12,6107	12,8409	12,8849	12,9004	12,9115	12,9154
	FSDBT	9,4576	11,7032	12,3327	12,5793	12,7652	12,8324
	PSDBT	8,1748	10,9770	11,9323	12,3344	12,6493	12,7657
	TSDBT	8,0429	10,8862	11,8788	12,3008	12,6331	12,7562
	HSDBT	8,1870	10,9852	11,9371	12,3374	12,6508	12,7665
Tần số $\bar{\omega}$ biên C-F	CBT	2,0117	2,0257	2,0284	2,0293	2,0299	2,0302
	FSDBT	1,9392	2,0063	2,0196	2,0243	2,0277	2,0289
	PSDBT	1,8853	1,9905	2,0124	2,0202	2,0259	2,0279
	TSDBT	1,8783	1,9883	2,0114	2,0196	2,0256	2,0277
	HSDBT	1,8859	1,9907	2,0125	2,0203	2,0259	2,0279



(a) Biên S-S



(b) Biên C-C



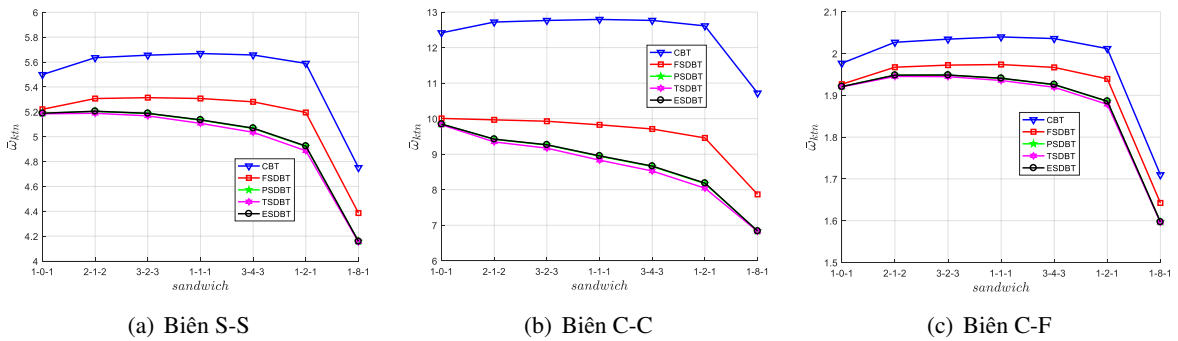
(c) Biên C-F

Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ số L/h đến tần số $\bar{\omega}$

Chúng ta có thể nhận thấy rằng đối với các dầm ngắn ($L/h \leq 10$), tần số dao động riêng tính toán theo các lý thuyết dầm khác nhau sẽ cho kết quả chênh lệch lớn, thể hiện ảnh hưởng biến dạng cắt lớn trong các dầm ngắn. Nhưng khi dầm càng dài thì kết quả tính toán tần số dao động riêng của dầm theo các lý thuyết lại sai khác nhỏ dần và gần như hội tụ khi $L/h > 20$. Kết quả tính theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli cho kết quả gần như hằng số do bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt. Kết quả này là phù hợp với các phân tích định tính kỹ thuật.

4.3. Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày các lớp sandwich

Xét dầm sandwich có lớp bề mặt bằng FGM có chỉ số tỷ lệ thể tích $p = 5$, với kích thước dầm $L/h = 5$, hệ số độ rỗng của vật liệu lõi $e_0 = 0,4$ với các cấu hình dầm sandwich khác nhau 1-0-1, 2-1-2, 3-2-3, 1-1-1, 3-4-3, 1-2-1, 1-8-1. Kết quả khảo sát thể hiện trên Hình 3 và giới thiệu chi tiết trong Bảng 5.



Hình 3. Ảnh hưởng tỷ số chiều dày lớp lõi đến tần số $\bar{\omega}$

Bảng 5. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ tính theo các mô hình dầm khác nhau với tỷ lệ chiều dày các lớp thay đổi

$L/h = 5$	Lý thuyết	Loại sandwich						
		1-0-1	2-1-2	3-2-3	1-1-1	3-4-3	1-2-1	1-8-1
S-S	CBT	5,4992	5,6353	5,6554	5,6689	5,6571	5,5894	4,7510
	FSDBT	5,2202	5,3066	5,3139	5,3070	5,2803	5,1947	4,3861
	PSDBT	5,1880	5,2034	5,1863	5,1332	5,0662	4,9220	4,1582
	TSDBT	5,1840	5,1881	5,1672	5,1073	5,0353	4,8870	4,1535
	HSDBT	5,1884	5,2048	5,1880	5,1355	5,0690	4,9251	4,1588
C-C	CBT	12,415	12,719	12,763	12,792	12,765	12,611	10,720
	FSDBT	10,007	9,9663	9,9270	9,8264	9,7089	9,4576	7,8687
	PSDBT	9,8453	9,4172	9,2574	8,9436	8,6541	8,1748	6,8366
	TSDBT	9,8275	9,3448	9,1694	8,8314	8,5275	8,0429	6,8281
	HSDBT	9,8472	9,4238	9,2654	8,9538	8,6656	8,1870	6,8380
C-F	CBT	1,9766	2,0268	2,0343	2,0396	2,0357	2,0117	1,7097
	FSDBT	1,9265	1,9672	1,9722	1,9736	1,9667	1,9392	1,6424
	PSDBT	1,9208	1,9480	1,9482	1,9403	1,9252	1,8853	1,5969
	TSDBT	1,9201	1,9451	1,9446	1,9354	1,9192	1,8783	1,5961
	HSDBT	1,9208	1,9482	1,9485	1,9408	1,9258	1,8859	1,5970

Khi chiều dày lớp lõi càng tăng ta thấy tần số dao động riêng lại càng giảm dần với tất cả các trường hợp điều kiện biên khác nhau. Kết quả này phù hợp với các phân tích định tính, khi lớp lõi xốp càng dày thì độ cứng của dầm càng giảm và làm cho tần số dao động riêng giảm theo. Hình 3 còn cho thấy kết quả khi tính toán tần số dao động riêng của dầm ngắn ($L/h = 5$) theo lý thuyết CBT và FSDBT có sự sai khác lớn khi so với các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Trong khi đó, các kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao lại tương đối đồng nhất.

Ngoài ra, chúng ta có thể nhận thấy rằng các điều kiện biên khác nhau cũng ảnh hưởng tới tần số dao động riêng của dầm. Điều kiện biên hai đầu ngàm (C-C) cho tần số dao động riêng lớn hơn các trường hợp biên khớp-khớp (S-S) hay ngàm-tự do (C-F). Đặc biệt, điều kiện biên C-F cho tần số dao động riêng bé nhất và sự ảnh hưởng của các lý thuyết tính cũng ít hơn so với các điều kiện biên khác.

4.4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGM lớp bề mặt

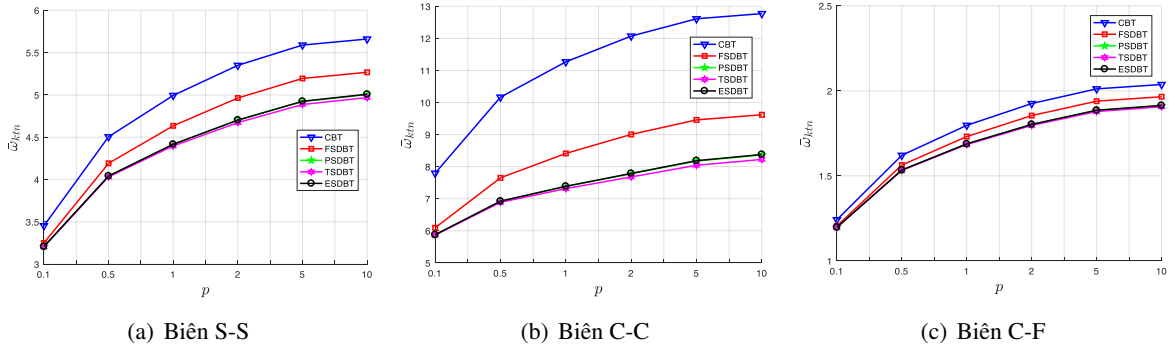
Xét dầm sandwich 1-2-1 với các thông số mật độ lỗ rỗng $e_0 = 0,4$, tỷ lệ kích thước dầm $L/h = 5$ và chỉ số tỷ lệ thể tích lớp bề mặt thay đổi $p = 0, 1; 0, 5; 1; 2; 5; 10$. Kết quả khảo sát được thể hiện trong Bảng 6 và trên Hình 4.

Bảng 6. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ theo các mô hình dầm khác nhau với chỉ số tỷ lệ thể tích lớp bề mặt p thay đổi

Lý thuyết		p					
		0,1	0,5	1	2	5	10
S-S	CBT	3,4539	4,5056	4,9940	5,3498	5,5894	5,6608
	FSDBT	3,2503	4,1920	4,6347	4,9640	5,1947	5,2678
	PSDBT	3,2077	4,0409	4,4154	4,7004	4,9220	5,0048
	TSDBT	3,2054	4,0321	4,3970	4,6728	4,8870	4,9683
	HSDBT	3,2079	4,0419	4,4171	4,7030	4,9251	5,0081
C-C	CBT	7,7962	10,1677	11,2685	12,0704	12,6107	12,7719
	FSDBT	6,0950	7,6521	8,4119	9,0052	9,4576	9,6186
	PSDBT	5,8765	6,9204	7,3818	7,7796	8,1748	8,3662
	TSDBT	5,8685	6,8883	7,3151	7,6786	8,0429	8,2252
	HSDBT	5,8775	6,9241	7,3883	7,7891	8,1870	8,3792
C-F	CBT	1,2419	1,6208	1,7970	1,9253	2,0117	2,0373
	FSDBT	1,2050	1,5634	1,7310	1,8544	1,9392	1,9653
	PSDBT	1,1972	1,5341	1,6878	1,8022	1,8853	1,9135
	TSDBT	1,1968	1,5325	1,6842	1,7967	1,8783	1,9062
	HSDBT	1,1972	1,5343	1,6882	1,8027	1,8859	1,9142

Chúng ta có thể quan sát thấy rằng khi chỉ số tỷ lệ thể tích p của lớp bề mặt tăng thì tần số dao động riêng không thứ nguyên đều tăng theo quan hệ phi tuyến. Điều này có thể giải thích là khi p tăng lên sẽ làm cho hàm lượng ceramic trong các lớp bề mặt tăng lên và do đó độ cứng của dầm tăng theo. Vì vậy tần số dao động riêng sẽ tăng dần khi chỉ số tỷ lệ thể tích p tăng. Chúng ta vẫn quan sát được ảnh hưởng của biến dạng cắt trong dầm ngắn ($L/h = 5$) khi kết quả tần số tính theo các lý thuyết khác

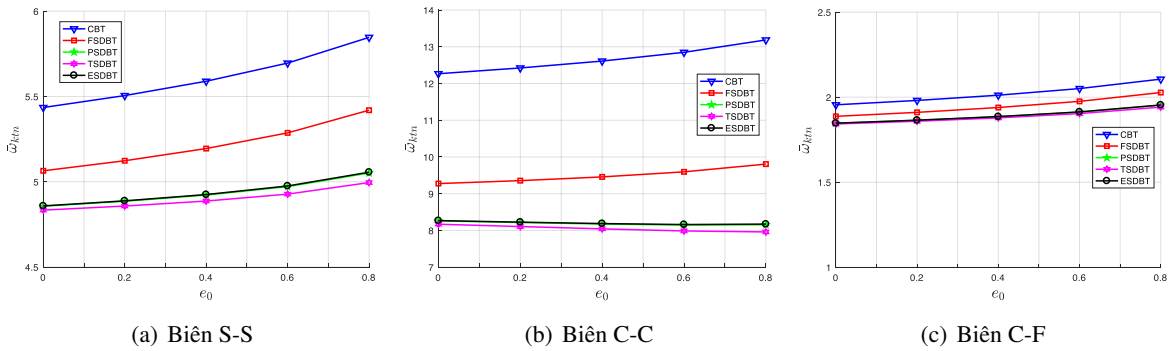
nhau là tương đối khác nhau. Mặt khác, chúng ta cũng có thể quan sát được sự ảnh hưởng khác nhau của các điều kiện biên tới tần số dao động riêng của dầm.



Hình 4. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích p đến tần số $\bar{\omega}$

4.5. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng e_0 của lớp lõi sandwich

Xét dầm sandwich 1-2-1 với các thông số kích thước dầm $L/h = 5$, chỉ số tỷ lệ thể tích lớp bề mặt $p = 5$ và hệ số mật độ lỗ rỗng của lớp lõi thay đổi $e_0 = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$. Kết quả khảo sát được thể hiện trên Hình 5 và giới thiệu chi tiết trong Bảng 7.



Hình 5. Ảnh hưởng mật độ lỗ rỗng e_0 của lớp lõi tới tần số $\bar{\omega}$

Chúng ta quan sát thấy rằng mật độ lỗ rỗng của lớp lõi không ảnh hưởng quá nhiều đến tần số dao động riêng không thứ nguyên $\bar{\omega}$. Khi mật độ lỗ rỗng tăng, làm cho độ cứng của dầm giảm đi nhưng mặt khác nó làm cho các thành phần mô men quán tính cũng giảm theo. Do ảnh hưởng đồng thời của hai yếu tố này nên ta cần phân tích định lượng cụ thể để phán đoán sự thay đổi của tần số dao động riêng của dầm. Vì vậy kết quả khảo sát này là minh chứng định lượng chỉ ra rằng hiệu ứng tổng thể của cả hai yếu tố làm cho tần số dao động riêng không thứ nguyên tăng nhẹ. Ngoài ra chúng ta cũng có thể quan sát được ảnh hưởng của các yếu tố điều kiện biên và mô hình tính toán dầm như các khảo sát phía trên.

Bảng 7. Tần số dao động riêng cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ tính theo các mô hình dầm khác nhau với mật độ lỗ rỗng của lớp lõi e_0 thay đổi

Lý thuyết		e_0				
		0	0,2	0,4	0,6	0,8
S-S	CBT	5,4353	5,5053	5,5894	5,6958	5,8465
	FSDBT	5,0644	5,1232	5,1947	5,2867	5,4196
	PSDBT	4,8564	4,8856	4,9220	4,9715	5,0514
	TSDBT	4,8338	4,8576	4,8870	4,9275	4,9953
	HSDBT	4,8585	4,8882	4,9251	4,9753	5,0562
C-C	CBT	12,2660	12,4228	12,6107	12,8486	13,1855
	FSDBT	9,2761	9,3559	9,4576	9,5952	9,8059
	PSDBT	8,2595	8,2154	8,1748	8,1460	8,1552
	TSDBT	8,1694	8,1064	8,0429	7,9862	7,9599
	HSDBT	8,2681	8,2257	8,1870	8,1606	8,1728
C-F	CBT	1,9552	1,9808	2,0117	2,0507	2,1061
	FSDBT	1,8874	1,9108	1,9392	1,9754	2,0272
	PSDBT	1,8469	1,8643	1,8853	1,9126	1,9531
	TSDBT	1,8425	1,8587	1,8783	1,9036	1,9415
	HSDBT	1,8473	1,8648	1,8859	1,9134	1,9541

5. Kết luận

Bài báo áp dụng phương pháp Ritz để xác định tần số dao động riêng của dầm sandwich với các điều kiện biên khác nhau, sử dụng một số lý thuyết dầm thông dụng với trường chuyển vị biểu diễn dưới dạng tổng quát. Các ví dụ kiểm chứng được thực hiện đã chứng minh độ tin cậy của lời giải và chương trình tính trên nền Matlab mà bài báo đã xây dựng. Các khảo sát số cho thấy ảnh hưởng của chỉ số kích thước L/h , chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu FGM lớp bề mặt, mật độ lỗ rỗng của vật liệu xốp lớp lõi cũng như tỷ số chiều dày các lớp và điều kiện biên đến giá trị tần số dao động riêng không thứ nguyên của dầm. Ảnh hưởng của các lý thuyết tính toán dầm khác nhau đến tần số dao động riêng không thứ nguyên cũng được xem xét và làm sáng tỏ. Các kết quả trên đây là tài liệu tham khảo hữu ích cho công tác thiết kế, thi công và bảo trì kết cấu dầm sandwich trong cơ khí và kết cấu xây dựng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lefebvre, L.-P., Banhart, J., Dunand, D. (2008). [Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments](#). *Advanced Engineering Materials*, 10(9):775–787.
- [2] Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J.-D., Ienny, P., Croset, M., Bernet, H. (2000). [Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials](#). *Materials Science and Engineering: A*, 289(1-2): 276–288.
- [3] Avalor, M., Belingardi, G., Montanini, R. (2001). [Characterization of polymeric structural foams under compressive impact loading by means of energy-absorption diagram](#). *International Journal of Impact Engineering*, 25(5):455–472.

- [4] Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Maheri, A., Lee, J. (2014). [Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory](#). *Engineering Structures*, 64:12–22.
- [5] Nguyen, T.-K., Nguyen, T. T.-P., Vo, T. P., Thai, H.-T. (2015). [Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 76:273–285.
- [6] Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Inam, F., Lee, J. (2015). [Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 68:59–74.
- [7] Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, B.-D., Lee, J. (2016). [An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 156:238–252.
- [8] Magnucka-Blandzi, E., Magnucki, K. (2007). [Effective design of a sandwich beam with a metal foam core](#). *Thin-Walled Structures*, 45(4):432–438.
- [9] Euler, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. apud Marcum-Michaellem Bousquet.
- [10] Yang, J., Chen, Y. (2008). [Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks](#). *Composite Structures*, 83(1):48–60.
- [11] Şimşek, M., Kocatürk, T. (2009). [Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load](#). *Composite Structures*, 90(4):465–473.
- [12] Li, X.-F. (2008). [A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams](#). *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5):1210–1229.
- [13] Reddy, J. N. (1984). [A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates](#). *Journal of Applied Mechanics*, 51(4):745–752.
- [14] Wang, C. M., Reddy, J. N., Lee, K. H. (2000). *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*. Elsevier.
- [15] Touratier, M. (1991). [An efficient standard plate theory](#). *International Journal of Engineering Science*, 29(8):901–916.
- [16] Soldatos, K. P. (1992). [A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates](#). *Acta Mechanica*, 94(3-4):195–220.
- [17] Hung, D. X., Truong, H. Q. (2018). [Free vibration analysis of sandwich beams with FG porous core and FGM faces resting on Winkler elastic foundation by various shear deformation theories](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - HUCE*, 12(3):23–33.
- [18] Pham, H.-A., Huong, Q.-T., Dang, X.-H. (2020). Optimal design of functionally graded sandwich porous beams for maximum fundamental frequency using metaheuristics. *International Conference on Modern Mechanics and Applications (ICOMMA)*, Ho Chi Minh City, Vietnam.
- [19] Chen, D., Kitipornchai, S., Yang, J. (2016). [Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core](#). *Thin-Walled Structures*, 107:39–48.
- [20] Timoshenko, S. P. (1921). LXVI. [On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars](#). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245):744–746.
- [21] Reddy, J. N. (1997). *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*. CRC Press, Boca Raton, FL.