Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2021, 15 (5V): 1–14

LỜI GIẢI NAVIER PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH VÀ DAO ĐỘNG RIÊNG TẤM CHỮ NHẬT BẰNG VẬT LIỆU FGM RỖNG BÃO HÒA CHẤT LỎNG ĐẶT TRÊN NỀN ĐÀN HỒI PASTERNAK

Nguyễn Văn Long[a,*], Trần Minh Tú[a], Vũ Thị Thu Trang[b]

[a]*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Cơ khí, Đại học Hàng hải Việt Nam, 484 đường Lạch Tray, quận Lê Chân, TP Hải Phòng, Việt Nam*

Nhận ngày 04/08/2021, Sửa xong 23/08/2021, Chấp nhận đăng 30/08/2021

Tóm tắt

Bài báo phân tích ứng xử ổn định và dao động riêng của tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng - FGP (functionally graded porous material) chứa đầy chất lỏng đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Các tính chất cơ học của vật liệu rỗng biến đổi trơn theo chiều dày tấm với ba dạng phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng. Quan hệ ứng suất - biến dạng được xác định theo lý thuyết đàn hồi cho vật liệu rỗng của Biot. Các phương trình quan hệ và nghiệm giải tích sử dụng lời giải Navier được thiết lập trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng và các tham số hình học, nền đàn hồi, cũng như hệ số Skempton đến tải trọng tới hạn và tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGM rỗng được đánh giá cụ thể. Kết quả cho thấy sự khác biệt về ứng xử của tấm FGP khi các lỗ rỗng chứa đầy chất lỏng so với khi không chứa chất lỏng.

Từ khoá: phân tích ổn định; phân tích dao động riêng; tấm FGP; tấm vật liệu rỗng; bão hòa chất lỏng; lời giải Navier.

BUCKLING AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF SATURATED FUNCTIONALLY GRADED POROUS PLATE RESTED ON PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION BY USING NAVIER'S SOLUTION

Abstract

This paper analyses buckling and free vibration response of saturated functionally graded porous (FGP) plate resting on Pasternak's elastic foundation. The materials properties are assumed to vary smoothly along the thickness direction according to three porosity distribution patterns: uniform, non-uniform (symmetric and asymmetric). The stress-strain relations are performed by using Biot's poroelasticity theory. Based on first-order shear deformation theory, constitutive equations and Navier's solution are obtained. The effects of porosity distribution patterns, porosity coefficient, geometrical parameters, elastic foundation as well as Skempton coefficient on critical loads and natural frequencies are evaluated in detail. The results show a difference in the mechanical behavior of FGP plates when the pores are filled with saturated fluid in comparison with when the pores are not filled with fluid.

Keywords: buckling analysis; free vibration analysis; functionally graded porous plate; saturated fluid; Navier's solution.

https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2021-15(5V)-01 © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

---

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* longnv@nuce.edu.vn (Long, N. V.)

1. Mở đầu

Vật liệu rỗng (porous materials) nhận được sự chú ý của giới chuyên môn toàn cầu như là một loại vật liệu tiên tiến được sử dụng nhiều trong kỹ thuật hàng không, công nghiệp ô tô và xây dựng dựng dân dụng do sở hữu nhiều đặc tính nổi trội như: trọng lượng nhẹ, khả năng tiêu tán năng lượng tốt, hệ số dẫn nhiệt và dẫn điện thấp, dễ gia công và tái chế. Loại vật liệu này gồm hai pha: pha rắn và pha lỏng hoặc khí, thường tồn tại trong tự nhiên như gỗ, đá, các lớp cát, ... [1]. Trong cấu trúc vật liệu, các lỗ rỗng phân bố liên tục trong không gian, làm cho cơ tính vật liệu cũng thay đổi trơn và liên tục theo một phương nhất định, vì thế vật liệu này được xếp vào loại vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded porous material – FGP). Biot [2] được coi là người tiên phong đề xuất lý thuyết đàn hồi cho vật liệu rỗng (poroelasticity). Lý thuyết này đưa ra hai luận điểm chính: a) ứng suất trong lỗ rỗng tăng làm giãn nở các lỗ rỗng; b) nén các lỗ rỗng làm tăng áp suất trong nó. Cấu trúc rỗng của vật liệu cũng như sự có mặt của chất lỏng hay khí trong các lỗ rỗng sẽ làm thay đổi các đặc trưng của vật liệu rỗng so với vật liệu truyền thống. Chính vì vậy, việc nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu rỗng đã và đang là đề tài thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trên khắp thế giới.

Một số nghiên cứu lựa chọn bỏ qua ảnh hưởng của pha lỏng mà chỉ phân tích ảnh hưởng của sự phân bố lỗ rỗng cũng như hệ số rỗng đến ứng xử tĩnh và động của kết cấu dầm và tấm FGP. Magnucki và Stasiewicz [3] nghiên cứu ổn định đàn hồi của dầm FGP theo mô hình dầm Euler-Bernoulli bằng phương pháp giải tích. Long và Hường [4] xây dựng nghiệm giải tích hiển phân tích ổn định cho dầm FGP với các dạng điều kiện biên khác nhau. Chen và cs. [5] phân tích ổn định đàn hồi và ứng xử uốn của dầm FGP theo mô hình dầm Timoshenko. Sử dụng lý thuyết dầm bậc nhất, Kitipornchai và cs. [6] khảo sát ứng xử ổn định và đặc trưng dao động của dầm FGP gia cường bằng GPL (graphene nanoplatelet) bằng phương pháp Ritz. Magnucki và cs. [7] khảo sát ứng xử uốn và ổn định của tấm chữ nhật FGP sử dụng hàm chuyển vị phi tuyến có kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt, lực nén trong mặt trung bình theo một hoặc hai phương được xem xét với bài toán ổn định. Thang và cs. [8] phân tích ổn định đàn hồi và dao động riêng của tấm chữ nhật FGP theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, sử dụng dạng nghiệm Navier. Cong và cs. [9] phân tích phi tuyến ổn định cơ nhiệt và sau ổn định tấm FGM có vi bọt rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Reddy.

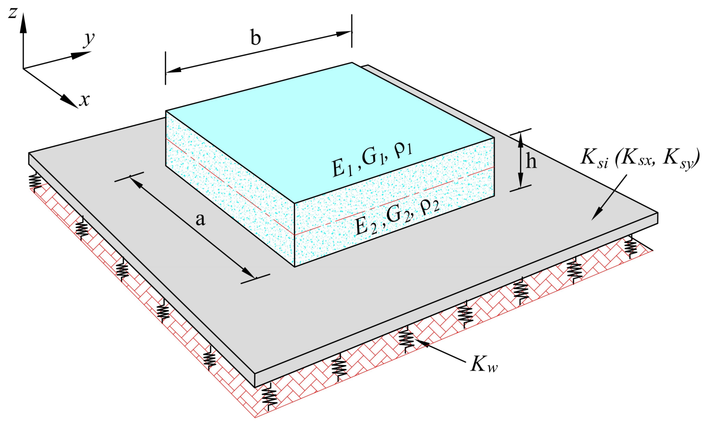
Các nghiên cứu về ảnh hưởng áp suất chất lỏng trong các lỗ rỗng đến ứng xử uốn, dao động và ổn định của kết cấu tấm sử dụng vật liệu FGP bão hòa chất lỏng đã được thực hiện trong những năm gần đây. Leclaire và cs. [10] nghiên cứu dao động uốn của tấm mỏng FGP bão hòa chất lỏng. Mojahedin và cs. [1, 11] khảo sát ứng xử ổn định cơ học và ổn định nhiệt của tấm tròn FGP bão hòa chất lỏng trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Xiang và cs. [12] sử dụng lý thuyết đàn hồi Biot nghiên cứu đặc trưng động lực học của tấm mỏng chữ nhật FGP bão hòa chất lỏng với các điều kiện biên khác nhau. Sử dụng dạng nghiệm Levy, Rezaei và Saidi [13] phân tích dao động tự do của tấm dày FGP bão hòa chất lỏng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết đàn hồi Biot, Arani và cs. [14] tính toán tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGP đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Bằng phương pháp vi phân cầu phương tổng quát (generalized differential quadrature method), Khouzestani và Khorshidvand [15] phân tích ứng suất và dao động riêng của tấm FGP hình vành khuyên bão hòa chất lỏng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Lixian [16] khảo sát đặc trưng động lực học của tấm chữ nhật FGP bão hòa chất lỏng, tựa khớp trên chu vi.

Từ những phân tích tổng quan nêu trên, có thể thấy rằng các nghiên cứu về ảnh hưởng của áp suất chất lỏng đến ứng xử uốn, dao động và ổn định của kết cấu tấm FGP bão hòa chất lỏng còn có nhiều vấn đề có thể đào sâu, làm phong phú thêm. Với góc nhìn này, bài báo này sẽ xây dựng nghiệm giải tích tính toán tải trọng tới hạn và tần số dao động riêng của tấm chữ nhật FGP bão hòa chất lỏng tựa

khớp trên chu vi. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cũng như lý thuyết đàn hồi Biot sẽ được sử dụng để thiết lập hệ phương trình chuyển động trên cơ sở nguyên lý Hamilton. Sau khi kiểm chứng nghiệm Navier đã thiết lập và chương trình tính trên nền Matlab tự viết, ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học, hệ số nên đàn hồi và hệ số Skempton đến tải trọng tới hạn cũng như tần số dao động cơ bản sẽ được khảo sát.

2. Mô hình tấm bằng vật liệu rỗng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng có chiều dày h, kích thước theo phương các trục x, y là a (chiều dài), b (chiều rộng). Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số nền: K_w là hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness), K_{si} ($i = x, y$) là hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật vật liệu rỗng trên nền đàn hồi

Các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo chiều dày tấm, phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng, được giả thiết tuân theo các quy luật sau [17, 18]:

- Phân bố đều:

$$\{E, G\} = \{E_1, G_1\}(1 - e_0\chi); \quad \rho = \rho_1\sqrt{1 - e_0\lambda}; \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0}\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1\right)^2 \tag{1}$$

- Phân bố không đều đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\}\left[1 - e_0\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right]; \quad \rho(z) = \rho_1\left[1 - e_m\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right] \tag{2}$$

- Phân bố không đều bất đối xứng:

$$\{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\}\left[1 - e_0\cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad \rho(z) = \rho_1\left[1 - e_m\cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3}$$

trong đó: E_1, G_1, ρ_1 và E_2, G_2, ρ_2 lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt ($G_i = E_i/[2(1+\nu)]; i = 1; 2$) và khối lượng riêng. Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày: $\nu =$ conts. Hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 được xác định bởi:

$$e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1; \quad e_m = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (0 < e_0, e_m < 1) \tag{4}$$

3. Trường chuyển vị và biến dạng

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất - FSDT (First-order Shear Deformation Theory), các thành phần chuyển vị u, v, w của điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z) trong không gian tấm biểu diễn dưới dạng [19]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\theta_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\theta_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{5}$$

trong đó t là biến thời gian; u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z; θ_x, θ_y là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh hai trục y, x.

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được từ quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} + \theta_x \\ w_{0,y} + \theta_y \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Dấu (,) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo các biến tương ứng.

4. Các hệ thức quan hệ - hệ phương trình chủ đạo

Đối với vật liệu FGP trong đó các lỗ rỗng chứa chất lỏng, quan hệ ứng suất-biến dạng tuân theo lý thuyết đàn hồi tuyến tính cho vật liệu rỗng của Biot [20]:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda_u \theta \delta_{ij} - p\alpha\delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{7}$$

trong đó: σ_{ij} và ε_{ij} tương ứng là các thành phần ứng suất và biến dạng; δ_{ij} là chỉ số Kronecker; $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ là biến dạng thể tích tỷ đối; α là các hệ số Biot của ứng suất hiệu dụng; p là áp suất chất lỏng trong lỗ rỗng; λ_u là hằng số Lame. Các hệ số này được xác định bởi:

$$\begin{aligned} p = M(\xi - \alpha\theta); \quad \alpha = 1 - \frac{G}{G_1}; \quad M = \frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2 (1 - 2\nu_u)(1 - 2\nu)} \\ \lambda_u = \frac{2\nu_u}{1 - 2\nu_u} G; \quad \nu_u = \frac{\nu + \alpha B(1 - 2\nu)/3}{1 - \alpha B(1 - 2\nu)/3} \end{aligned} \tag{8}$$

trong đó: ξ là biến thiên của thể tích chất lỏng, M là mô đun Biot, ν_u là hệ số Poisson khi bão hòa nước, $0 < B < 1$ là hệ số Skempton phản ánh khả năng nén được của chất lỏng.

Với tấm bão hòa nước ($\xi = 0$), bỏ qua ứng suất pháp theo phương chiều dày ($\sigma_z = 0$), quan hệ ứng suất – biến dạng (7) có thể viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

trong đó: $Q_{11} = Q_{22} = k_1 G(z); Q_{12} = Q_{21} = k_2 G(z); Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G(z); k_1 = 2\dfrac{1 - 4\nu + 2\nu_u}{1 - 3\nu_u + 2\nu_u \nu}$; $k_2 = 2\dfrac{-\nu + 2\nu_u(1 - \nu)}{1 - 3\nu_u + 2\nu_u \nu}$.

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm ta nhận được các thành phần nội lực:

$$\left\{\begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{array}\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array}\right\} dz; \quad \left\{\begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array}\right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array}\right\} zdz; \quad \left\{\begin{array}{c} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{array}\right\} = k_c \int_{-h/2}^{h/2} \left\{\begin{array}{c} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{array}\right\} dz \tag{10}$$

với k_c là hệ số hiệu chỉnh cắt (trong phân tích này lấy $k_c = 5/6$).

Hệ phương trình cân bằng động của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có dạng [21]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= I_0 \ddot{u} + I_0 \ddot{\theta}_x; N_{xy,x} + N_{y,y} = I_0 \ddot{v}_0 + I_0 \ddot{\theta}_y \\ Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + N_x^0 w_{0,xx} &+ 2N_{xy}^0 w_{0,xy} + N_y^0 w_{0,yy} + q + f_e = I_0 \ddot{w}_0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} &= I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\theta}_x; M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{yz} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\theta}_y \end{aligned} \tag{11}$$

trong đó: N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 là các thành phần lực dọc màng; các mô men quán tính: $I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^i dz; (i = 0, 1, 2)$; f_e là phản lực nền, được xác định bởi [22, 23]: $f_e = -K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy}$.

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực và chuyển vị vào (11), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$\begin{aligned} & A_{11} u_{0,xx} + A_{66} u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66}) v_{0,xy} \\ & + B_{11} \theta_{x,xx} + B_{66} \theta_{x,yy} + (B_{12} + B_{66}) \theta_{y,xy} = I_0 \ddot{u} + I_0 \ddot{\theta}_x \\ & (A_{12} + A_{66}) u_{0,xy} + A_{11} v_{0,yy} + A_{66} v_{0,xx} \\ & + (B_{12} + B_{66}) \theta_{x,xy} + B_{11} \theta_{y,yy} + B_{66} \theta_{y,xx} = I_0 \ddot{v}_0 + I_0 \ddot{\theta}_y \\ & A_{44}^s w_{0,yy} + A_{44}^s w_{0,xx} + A_{44}^s \theta_{x,x} + A_{44}^s \theta_{y,y} \\ & + N_x^0 w_{0,xx} + 2N_{xy}^0 w_{0,xy} + N_y^0 w_{0,yy} - K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy} + q = I_0 \ddot{w}_0 \\ & B_{11} u_{0,xx} + B_{66} u_{0,yy} + (B_{12} + B_{66}) v_{0,xy} \\ & + D_{11} \theta_{x,xx} + D_{66} \theta_{x,yy} + (D_{12} + D_{66}) \theta_{y,xy} - A_{44}^s (\theta_x + w_{0,x}) = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\theta}_x \\ & (B_{66} + B_{12}) u_{0,xy} + B_{66} v_{0,xx} + B_{11} v_{0,yy} \\ & + (D_{66} + D_{12}) \theta_{x,xy} + D_{66} \theta_{y,xx} + D_{11} \theta_{y,yy} - A_{44}^s \left(\theta_y + w_{0,y}\right) = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\theta}_y \end{aligned} \tag{12}$$

trong đó: $\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left(1, z, z^2\right) dz; ij = 11, 12, 66; A_{44}^s = k_c \int_{-h/2}^{h/2} Q_{44} dz.$

5. Lời giải Navier

Xét tấm chữ nhật vật liệu rỗng có chiều dài a và chiều rộng b liên kết khớp trên các cạnh, chịu tác dụng của tải trọng nén theo hai phương: $N_x^0 = \gamma_1 N_0$, $N_y^0 = \gamma_2 N_0$, $N_{xy}^0 = 0$. Trong các phân tích ổn định và dao động riêng dưới đây, tải trọng uốn được bỏ qua ($q = 0$). Các biểu thức điều kiện biên của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, bao gồm:

$$\begin{aligned} &\text{Tại } x = 0, a: v_0 = 0, w_0 = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x = 0 \\ &\text{Tại } y = 0, b: u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Chọn dạng nghiệm Navier để thoả mãn các điều kiện biên (13):

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} e^{i\omega t} \cos\alpha x \sin\beta y;\ v_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \cos\beta y$$

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \sin\beta y \tag{14}$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xmn} e^{i\omega t} \cos\alpha x \sin\beta y;\ \theta_y = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ymn} e^{i\omega t} \sin\alpha x \cos\beta y$$

trong đó: $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}$ là các hệ số cần tìm; $\alpha = \dfrac{m\pi}{a}, \beta = \dfrac{n\pi}{b}$; m, n là số nửa bước sóng hình sin theo phương x, y phản ánh dạng vồng.

Thay (14) vào hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị (12), nhóm các hệ số để được hệ phương trình đại số tuyến tính, $\forall m, n$:

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33}+k_{33}N_0 & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{0mn} \\ \theta_{xmn} \\ \theta_{ymn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

trong đó: $s_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$; $s_{12} = s_{21} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$; $s_{14} = s_{41} = B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2$; $s_{15} = s_{51} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta$; $s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{11}\beta^2$; $s_{24} = s_{42} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta$; $s_{25} = B_{66}\alpha^2 + B_{11}\beta^2$; $s_{33} = A_{44}^s\alpha^2 + A_{66}\beta^2 + K_w + K_{sx}\alpha^2 + K_{sy}\beta^2$; $s_{34} = A_{44}^s\alpha$; $s_{35} = A_{66}\beta$; $s_{44} = D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + A_{44}^s$; $s_{45} = s_{54} = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta$; $s_{55} = D_{66}\alpha^2 + D_{11}\beta^2 + A_{66}$; $m_{11} = m_{22} = m_{33} = I_0$; $m_{14} = m_{41} = m_{25} = m_{52} = I_1$; $m_{44} = m_{55} = I_2$; $k_{33} = \gamma_1\alpha^2 + \gamma_2\beta^2$.

Trong phân tích ổn định, cho $\omega = 0$ ta xác định được tải trọng mất ổn định từ điều kiện:

$$\det\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33}+k_{33}N_0 & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Nghiệm của phương trình này là N_{mn}: tải trọng mất ổn định ứng với dạng mất ổn định (m, n); tải trọng tới hạn là giá trị nhỏ nhất trong các tải trọng mất ổn định: $N_{th} = \min\{N_{mn}\}$.

Trong phân tích dao động riêng, cho $N_0 = 0$ ta xác định được tần số dao động riêng từ điều kiện:

$$\det\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & 0 & 0 & m_{55} \end{bmatrix}\right) = 0 \tag{17}$$

Nghiệm của phương trình này là ω_{mn}^2, từ đó suy ra ω_{mn}: là tần số góc dao động riêng ứng với dạng dao động (m, n); tần số góc dao động riêng cơ bản được xác định bởi: $\omega_{cb} = \min\{\omega_{mn}\}$.

6. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Tấm chữ nhật vật liệu rỗng, đặt trên nền đàn hồi Pasternak, liên kết khớp 4 cạnh. Vật liệu rỗng là bọt nhôm với các đặc trưng cơ học bao gồm: $\nu = 0{,}3$; $\rho_1 = 2707$ kg/m^3; $G_1 = 26{,}293$ GPa; $E_1 = 2G_1(1+\nu)$ [24]. Các công thức không thứ nguyên được sử dụng:

$$\bar{N} = N_{th}\frac{a^2}{E_1 h^3};\quad \bar{\omega} = \omega h\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}};\quad K_0 = K_w\frac{a^4}{E_0 h^3};\quad J_0 = K_{sx}\frac{a^2}{E_0 h^3 \nu} = K_{sy}\frac{b^2}{E_0 h^3 \nu} \tag{18}$$

6.1. *Ví dụ kiểm chứng*

a. Kiểm chứng tải trọng tới hạn của tấm rỗng ở trạng thái khô

Xét tấm vuông bằng vật liệu rỗng, trạng thái khô ($b/a = 1, a/h = 10, B = 0$) với các hệ số rỗng e_0 khác nhau. Bảng 1 bao gồm tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm dưới tác dụng của tải trọng nén đều theo phương x ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$). Hai quy luật phân bố lỗ rỗng được xem xét bao gồm: phân bố đều và phân bố không đều-đối xứng. Các kết quả trong bài báo được so sánh với các kết quả của Thang và cs. [8] cùng sử dụng lời giải Navier và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT.

Bảng 1. Tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm vuông vật liệu rỗng dưới tác dụng của tải nén đều theo phương x

Phân bố lỗ rỗng	Nguồn	e_0					
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Đều	Thang và cs. [8]	3,2109	2,9856	2,7549	2,5173	2,2710	2,0135
	Bài báo	3,2023	2,9777	2,7475	2,5105	2,2650	2,0081
	Sai số (%)	0,268	0,265	0,269	0,270	0,264	0,268
Không đều-Đối xứng	Thang và cs. [8]	3,3023	3,1729	3,0432	2,9130	2,7822	2,6506
	Bài báo	3,2933	3,1640	3,0343	2,9041	2,7733	2,6417
	Sai số (%)	0,273	0,281	0,292	0,306	0,320	0,336

Có thể thấy rằng, các kết quả tính toán tải trọng tới hạn trong bài báo có sự tương đồng với tác giả Thang và cs. [8] (sai số lớn nhất khi $e_0 = 0{,}6$ trong trường hợp phân bố không đều-đối xứng là 0,336%). Các sai lệch này là do trong nghiên cứu của Thang và cs. [8], họ đã giả thiết loại bỏ các thành phần chuyển vị màng u_{0mn}, v_{0mn} trong quá trình xác định tải trọng giới hạn.

b. Kiểm chứng tải trọng tới hạn của tấm rỗng ở trạng thái bão hòa nước

Các kết quả tính toán tải trọng tới hạn cho tấm vuông ($a = b = 1$ m) vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng, ở trạng thái bão hòa chất lỏng: $G_1 = 24$ GPa; $\nu = 0{,}25$; $B = 0{,}51$ [25] được trình bày trong Bảng 2. Tấm chịu tác dụng của tải trọng nén trên các cạnh trong hai trường hợp: nén đều theo phương x ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) và nén đều theo cả hai phương x, y ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$).

Từ các số liệu chỉ ra trong bảng tính, có thể thấy rằng với các hệ số lỗ rỗng e_0 khác nhau và cả hai trường hợp tỷ số kích thước tấm h/a, các kết quả của bài báo đều tiệm cận với kết quả nghiệm giải tích của Rad và cs. [26] cùng sử dụng lý thuyết FSDT tuy nhiên theo tiếp cận Levy.

Bảng 2. Tải trọng tới hạn N_{th} (MN/m) của tấm vuông vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng, bão hòa chất lỏng

(γ_1, γ_2)	h/a	Nguồn	e_0			
			0	0,3	0,5	0,7
$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$	0,1	Rad và cs. [26]	200,023	167,163	141,292	109,823
		Bài báo	200,023	167,390	141,600	110,122
		Sai số (%)	0,000	0,136	0,218	0,272
	0,2	Rad và cs. [26]	1391,442	1157,871	978,262	764,934
		Bài báo	1391,442	1163,338	985,700	772,221
		Sai số (%)	0,000	0,472	0,760	0,953
$\gamma_1 = \gamma_2 = 1$	0,1	Rad và cs. [26]	100,011	83,582	70,646	54,912
		Bài báo	100,011	83,695	70,800	55,061
		Sai số (%)	0,000	0,135	0,218	0,271
	0,2	Rad và cs. [26]	695,721	578,936	489,131	382,467
		Bài báo	695,721	581,669	492,850	386,110
		Sai số (%)	0,000	0,472	0,760	0,953

c. Kiểm chứng tần số dao động cơ bản của tấm rỗng ở trạng thái khô

Bảng 3 bao gồm tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vuông vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng, với hai trường hợp tỷ số kích thước tấm: $a/h = 5$ và $a/h = 10$. Các kết quả tính toán của bài báo được kiểm chứng với các nghiên cứu của Rezaei và Saidi [24] sử dụng phương pháp không gian trạng thái, trong khi nghiên cứu của Thang và cs. [8] sử dụng phương pháp giải tích với dạng nghiệm Navier.

Bảng 3. Tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vuông vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng

Nguồn	$e_0 = 0{,}1$	$e_0 = 0{,}3$	$e_0 = 0{,}5$	$e_0 = 0{,}7$
	$a/h = 5$			
Rezaei và Saidi [24]	0,2091	0,2020	0,1931	0,1804
Thang và cs. [8]	0,2138	0,2067	0,1978	0,1853
Bài báo	0,2082	0,2013	0,1926	0,1803
Sai số (%)	0,427	0,335	0,259	0,069
	$a/h = 10$			
Rezaei và Saidi [24]	0,0570	0,0551	0,0526	0,0491
Thang và cs. [8]	0,0574	0,0555	0,0531	0,0495
Bài báo	0,0569	0,0550	0,0526	0,0491
Sai số (%)	0,189	0,131	0,004	0,092

*Sai số so với kết quả của Rezaei và Saidi [24]

Các kết quả tính toán tần số dao động cơ bản trong bài báo cho thấy sự tương đồng với các công bố của Rezaei và Saidi, và Thang và cs. (sai số lớn nhất so với Rezaei và Saidi khi $e_0 = 0{,}1$ và $a/h = 5$ là 0,427%). Các kết quả của Thang và cs. lớn hơn một chút so với kết quả trong bài báo và của Rezaei

và Saidi, lý do là trong nghiên cứu này các tác giả đã bỏ qua các thành phần chuyển vị màng và góc xoay trong việc xác định tần số dao động riêng của tấm.

d. Kiểm chứng tần số dao động cơ bản của tấm rỗng ở trạng thái bão hòa nước

Với tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng, ở trạng thái bão hòa chất lỏng, các kết quả kiểm chứng tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ được trình bày trong Bảng 4. Tấm vuông bằng vật liệu rỗng, phân bố không đều-bất đối xứng: E_1 = 69 GPa; ρ_1 = 2260 kg/m^3; v = 0,25 [10]; e_0 = 0; $K_0 = J_0 = 0$) liên kết khớp 4 cạnh, với các tỷ số kích thước tấm a/h = 5; 10; 20.

Bảng 4. Tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vuông vật liệu rỗng phân bố bất đối xứng, bão hòa chất lỏng

B	Nguồn	$a/h = 5$	$a/h = 10$	$a/h = 20$
0,1	Ebrahim và Habibi [27]	0,21275	0,05783	0,01473
	Bài báo	0,21276	0,05812	0,01491
	Sai số (%)	0,005	0,501	1,222
0,3	Ebrahim và Habibi [27]	0,21563	0,05876	0,01495
	Bài báo	0,21577	0,05894	0,01512
	Sai số (%)	0,065	0,306	1,137
0,5	Ebrahim và Habibi [27]	0,21857	0,05954	0,01526
	Bài báo	0,21865	0,05973	0,01532
	Sai số (%)	0,037	0,319	0,393
0,7	Ebrahim và Habibi [27]	0,22162	0,06055	0,01549
	Bài báo	0,22142	0,06048	0,01552
	Sai số (%)	0,090	0,116	0,194

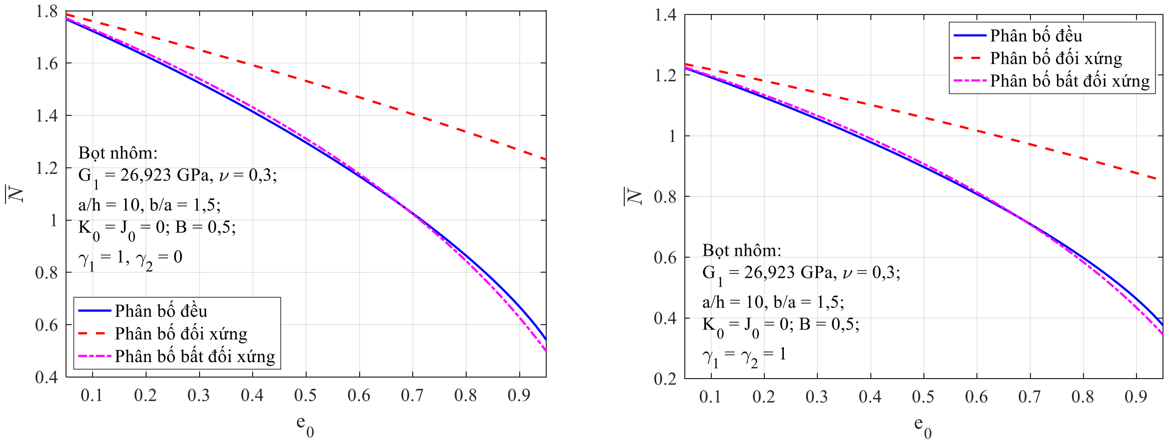
Các kết quả trong bài báo được so sánh với tác giả Ebrahimi và Habibi [27] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba-TSDT gồm 5 ẩn số chuyển vị của Reddy [28]. Rõ ràng là, với cả 3 trường hợp tỷ số kích thước tấm a/h và các hệ số Skempton khác nhau; các kết quả của bài báo đều phù hợp với kết quả của Ebrahim và Habibi (sai số lớn nhất giữa hai phương pháp chỉ là 1,222%).

Qua các kết quả kiểm chứng cho cả hai bài toán phân tích tải trọng tới hạn và tần số dao động cơ bản của tấm như chỉ ra ở trên, có thể thấy rằng, nghiệm giải tích xây dựng trong bài báo và code chương trình máy tính đã thiết lập bằng ngôn ngữ Matlab là có độ tin cậy.

6.2. *Khảo sát ổn định*

Xét tấm chữ nhật vật liệu rỗng (bọt nhôm), bão hòa nước, đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng nén theo hai phương: $N_x^0 = \gamma_1 N_0, N_y^0 = \gamma_2 N_0$. Biến thiên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm chữ nhật vật liệu rỗng ($a/h = 10; b/a = 1{,}5; K_0 = J_0 = 0; B = 0{,}5$) theo hệ số rỗng e_0 với ba quy luật phân bố lỗ rỗng được thể hiện bằng đồ thị trên Hình 2. Ba quy luật phân bố lỗ rỗng: phân bố đều, phân bố đối xứng và phân bố bất đối xứng; và hai trường hợp tải trọng nén được xem xét bao gồm: tải nén theo 1 phương (phương x: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) và tải nén đều theo 2 phương x, y ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$). Các kết quả cho thấy, khi tăng hệ số rỗng e_0, với cả hai trường hợp tải trọng nén, tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm đều giảm: giảm theo quy luật gần như tuyến tính khi phân

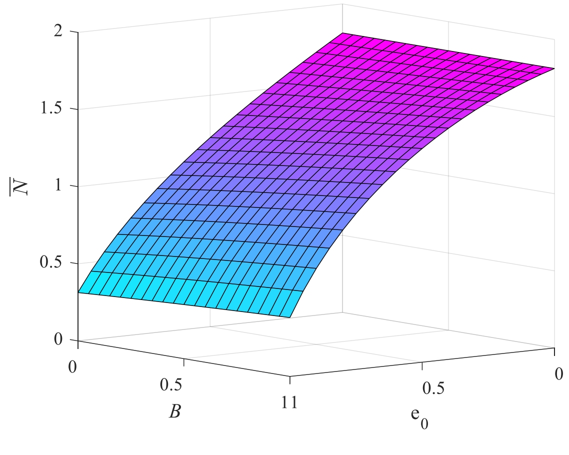
bố đối xứng; giảm nhanh hơn, phi tuyến đối hai quy luật phân bố đều và bất đối xứng (hai quy luật này cho kết quả tải trọng tới hạn gần như nhau với cùng một hệ số rỗng e_0).



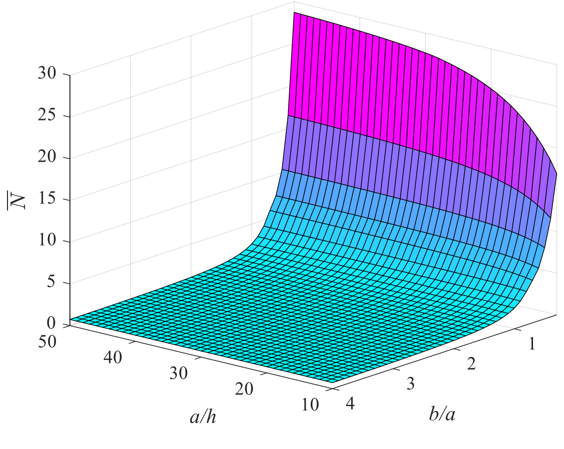
(a) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ (b) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

Hình 2. Ảnh hưởng của quy luật phân bố và hệ số lỗ rỗng lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm rỗng

Hình 3 thể hiện ảnh hưởng của hệ số Skempton, B và hệ số rỗng e0 lên tải trọng tới hạn thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm chữ nhật vật liệu rỗng, phân bố bất đối xứng ($a/h = 10; b/a = 1{,}5; K_0 = J_0 = 0; \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$). Có thể thấy rằng, khi B tăng, với mỗi hệ số rỗng e_0, tải trọng tới hạn $\bar{N}$ của tấm vật liệu rỗng tăng nhẹ với quy luật gần như tuyến tính; ảnh hưởng của hệ số Skempton, B là đáng kể khi e_0 lớn. Ví dụ, với $e_0 = 0{,}95$, khi $B = 0$: $\bar{N} = 0{,}443$; khi $B = 1$: $\bar{N} = 0{,}543$ (tăng 22,567%).



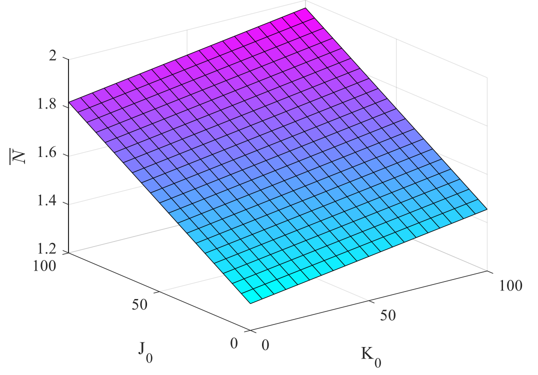
Hình 3. Biến thiên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm rỗng phân bố bất đối xứng theo B và e_0



Hình 4. Ảnh hưởng của kích thước hình học lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm rỗng phân bố bất đối xứng

Hình 4 thể hiện ảnh hưởng của kích thước hình học (tỷ số kích thước tấm a/h và tỷ số kích thước cạnh b/a) lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên của tấm vật liệu rỗng, phân bố bất đối xứng ($K_0 = J_0 = 0; B = 0{,}5; e_0 = 0{,}5; \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$). Rõ ràng là, tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm

vật liệu rỗng giảm khi tăng tỷ số kích thước cạnh b/a, lực tới hạn giảm nhanh khi $b/a \leq 2$, sau đó giảm chậm dần. Tỷ số kích thước tấm a/h có ảnh hưởng đáng kể lên lực tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ chỉ khi b/a còn nhỏ (tỷ số a/h tăng làm tăng $\bar{N}$). Ví dụ: với b/a = 0,3, khi tăng tỷ số kích thước tấm từ a/h = 10 đến a/h = 50, lực tới hạn không thứ nguyên tăng từ $\bar{N}$ = 16,942 lên $\bar{N}$ = 28,723 (tăng 69,533%); trong khi đó, các kết quả tương ứng với trường hợp b/a = 4, lực tới hạn $\bar{N}$ chỉ tăng 2,855%.



Hình 5. Ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm rỗng

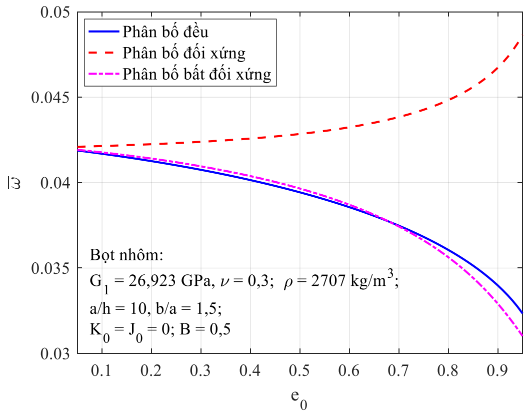
Đồ thị so sánh ảnh hưởng của các tham số nền đàn hồi lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm vật liệu rỗng, phân bố bất đối xứng (a/h = 10; b/a = 1,5; B = 0,5; e_0 = 0,5; $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) được thể hiện trên Hình 5. Qua đó ta thấy, khi tăng các hệ số nền đàn hồi (tăng K_0, J_0) làm cho tải trọng tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của tấm tăng; hệ số nền Pasternak, J_0 tăng, làm cho tải trọng tới hạn $\bar{N}$ tăng gần như tuyến tuyến tính, nhanh hơn so với hệ số nền Winker, K_0.

6.3. Khảo sát dao động riêng

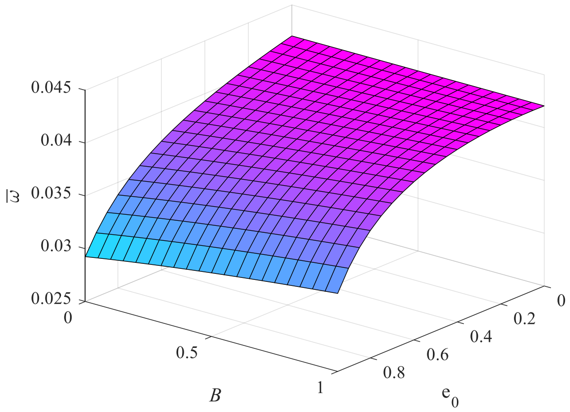
Xét tấm chữ nhật vật liệu rỗng (bọt nhôm), bão hòa nước, đặt trên nền đàn hồi, dao động tự do trong môi trường không cản.

Các đồ thị trên Hình 6–9 tương ứng thể hiện ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, hệ số lỗ rỗng e_0; hệ số Skempton, B; kích thước hình học và các hệ số nền đàn hồi lên tần số dao động cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm rỗng. Các kết quả cho thấy:

- Về ảnh hưởng của phân bố lỗ rỗng và hệ số lỗ rỗng (xem Hình 6): khi tăng hệ số rỗng e_0, phân bố lỗ rỗng đều và bất đối xứng có tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ giảm với quy luật và trị số gần như sau, trong khi đó, phân bố đối xứng lại cho kết quả tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ tăng. Điều này có thể lý giải bằng mối tương quan giữa hiệu ứng khối lượng và hiệu ứng độ cứng uốn của tấm



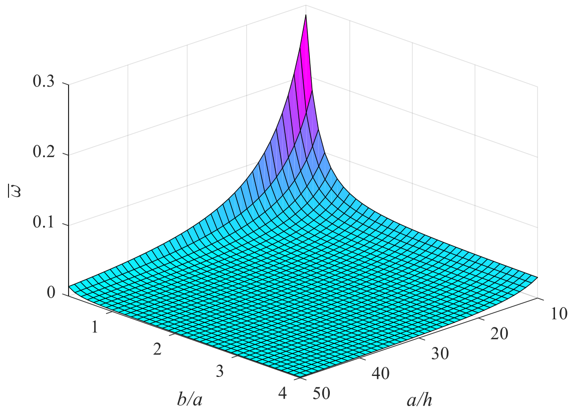
Hình 6. Ảnh hưởng của quy luật phân bố và hệ số lỗ rỗng lên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm rỗng



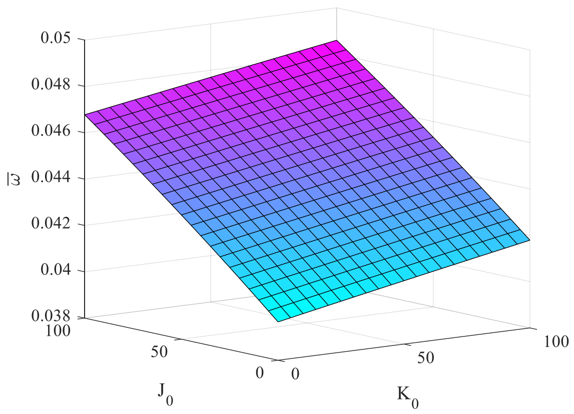
Hình 7. Biến thiên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm rỗng phân bố bất đối xứng theo B và e_0

khi hệ số rỗng tăng đối với từng dạng phân bố lỗ rỗng riêng biệt. Trong từng bài toán cụ thể sự tương quan này phụ thuộc vào hình dạng, kích thước tấm, điều kiện biên cũng như vật liệu, điều này sẽ quyết định tần số dao động riêng tăng hay giảm khi hệ số lỗ rỗng tăng.

- Về ảnh hưởng của hệ số Skempton (xem Hình 7, $a/h = 10; b/a = 1{,}5; K_0 = J_0 = 0$): khi B tăng, với mỗi hệ số rỗng e_0, tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vật liệu rỗng tăng nhẹ với quy luật gần như tuyến tính; ảnh hưởng của hệ số Skempton, B là đáng kể khi e_0 lớn. Ví dụ, với $e_0 = 0{,}95$, khi $B = 0$: $\bar{\omega} = 0{,}0292$; khi $B = 1$: $\bar{\omega} = 0{,}324$ (tăng 10,731%).



Hình 8. Ảnh hưởng của kích thước hình học lên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm rỗng



Hình 9. Ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi lên tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm rỗng

- Về ảnh hưởng của kích thước hình học (xem Hình 8, $K_0 = J_0 = 0; B = 0{,}5; e_0 = 0{,}5$): Có thể thấy rằng, khi tăng các tỷ số kích thước cạnh b/a và tỷ số kích thước tấm a/h, tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm vật liệu rỗng giảm, tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ giảm nhanh trong khoảng b/a và a/h còn nhỏ, sau đó giảm chậm dần.

-Về ảnh hưởng của nền đàn hồi (xem Hình 9, $a/h = 10; b/a = 1{,}5; B = 0{,}5; e_0 = 0{,}5$): khi tăng các hệ số nền đàn hồi (tăng K_0, J_0) đều làm tăng giá trị của tần số cơ bản không thứ nguyên $\bar{\omega}$ của tấm tăng; hệ số nền Pasternak, J_0 tăng, làm cho tải trọng tới hạn $\bar{N}$ tăng nhanh hơn so với hệ số nền Winker, K_0.

7. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình tính toán tải trọng mất ổn định và tần số dao động riêng trong tấm rỗng bão hòa nước đặt trên nền đàn hồi. Nghiệm giải tích thu được từ lời giải Navier áp dụng cho tấm chữ nhật, liên kết khớp trên các cạnh, cùng với chương trình tính tự viết trên nền Matlab được kiểm chứng cho trường hợp riêng là tấm rỗng không chứa chất lỏng cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số đã được thực hiện cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học, hệ số nền đàn hồi và hệ số Skempton đến tải trọng tới hạn và tần số dao động cơ bản của tấm. Các kết quả nhận được cho thấy có thể lựa chọn dạng phân bố lỗ rỗng, điều chỉnh mật độ phân bố lỗ rỗng; các tham số hình học, nền đàn hồi và độ ẩm của tấm, để nhận được các kết quả mong muốn trong công tác tính toán, thiết kế kết cấu tấm làm sử dụng vật liệu rỗng. Một điều lý thú là đối với tấm rỗng, khi các lỗ rỗng bão hòa nước khi góp phần tăng độ cứng tổng thể kết cấu dẫn đến tăng khả năng ổn định và tần số dao động cơ bản của tấm.

Tài liệu tham khảo

[1] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., Eslami, M. R. (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*, 99:83–90.

[2] Biot, M. A. (1955). Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, 26(2):182–185.

[3] Magnucki, K., Szyc, W., Stasiewicz, P. (2004). Stress state and elastic buckling of a thin-walled beam with monosymmetrical open cross-section. *Thin-Walled Structures*, 42(1):25–38.

[4] Long, N. V., Hường, N. T. (2020). Phân tích ổn định kết cấu dầm vật liệu xốp chịu nén dọc trục với các điều kiện biên khác nhau. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 14(2V): 97–106.

[5] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2015). Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*, 133:54–61.

[6] Kitipornchai, S., Chen, D., Yang, J. (2017). Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. *Materials & Design*, 116:656–665.

[7] Magnucki, K., Malinowski, M., Kasprzak, J. (2006). Bending and buckling of a rectangular porous plate. *Steel and Composite Structures*, 6(4):319–333.

[8] Thang, P. T., Nguyen-Thoi, T., Lee, D., Kang, J., Lee, J. (2018). Elastic buckling and free vibration analyses of porous-cellular plates with uniform and non-uniform porosity distributions. *Aerospace Science and Technology*, 79:278–287.

[9] Cong, P. H., Chien, T. M., Khoa, N. D., Duc, N. D. (2018). Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT. *Aerospace Science and Technology*, 77:419–428.

[10] Leclaire, P., Horoshenkov, K., Cummings, A. (2001). Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 247(1):1–18.

[11] Jabbari, M., Hashemitaheri, M., Mojahedin, A., Eslami, M. R. (2013). Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Thin Circular Plate Made of Saturated Porous Materials. *Journal of Thermal Stresses*, 37(2):202–220.

[12] Xiang, Y., Jiang, H., Lu, J. (2017). Analyses of dynamic characteristics of a fluid-filled thin rectangular porous plate with various boundary conditions. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 30(1):87–97.

[13] Rezaei, A., Saidi, A. (2015). Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*, 134:1051–1060.

[14] Arani, A. G., Maraghi, Z. K., Khani, M., Alinaghian, I. (2017). Free Vibration of Embedded Porous Plate Using Third-Order Shear Deformation and Poroelasticity Theories. *Journal of Engineering*, 2017:1–13.

[15] Khouzestani, L. B., Khorshidvand, A. R. (2019). Axisymmetric free vibration and stress analyses of saturated porous annular plates using generalized differential quadrature method. *Journal of Vibration and Control*, 25(21-22):2799–2818.

[16] Lixian, W. (2020). Dynamic response analysis of fluid-saturated porous rectangular plates. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 75(12):1009–1023.

[17] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 108-109:14–22.

[18] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2017). Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions. *Composite Structures*, 182:91–98.

[19] Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.

[20] Detournay, E., Cheng, A. H. D. (1993). Fundamentals of Poroelasticity. *Analysis and Design Methods*, Elsevier, 113–171.

[21] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.

[22] Zenkour, A. M. (2009). The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11-12):869–880.

[23] Huang, Z. Y., Lü, C. F., Chen, W. Q. (2008). Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Composite Structures*, 85(2):95–104.

[24] Rezaei, A., Saidi, A. (2016). Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous–cellular plates. *Composites Part B: Engineering*, 91:361–370.

[25] Detournay, E., Cheng, A. H. D. (1993). Fundamentals of Poroelasticity. *Analysis and Design Methods*, Elsevier, 113–171.

[26] Rad, E. S., Saidi, A. R., Rezaei, A. S., Askari, M. (2020). Shear deformation theories for elastic buckling of fluid-infiltrated porous plates: An analytical approach. *Composite Structures*, 254:112829.

[27] Ebrahimi, F., Habibi, S. (2016). Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate. *Steel and Composite Structures*, 20(1):205–225.

[28] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press.