

PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC XẤP XỈ CỦA SÓNG RAYLEIGH TRONG BÁN KHÔNG GIAN ĐÀN HỒI PHỦ LỚP MỎNG, LỆCH TRỤC BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉCTƠ PHÂN CỰC

Trịnh Thị Thanh Huệ^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 31/07/2021, Sửa xong 03/09/2021, Chấp nhận đăng 10/09/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi, trục hướng, nén được, được phủ một lớp mỏng trục hướng, nén được. Tuy nhiên, vật liệu ở bán không gian và lớp chỉ có một trục chính là trùng nhau - trục vuông góc với lớp còn hai trục còn lại lệch nhau một góc θ . Mục tiêu của bài báo là đưa ra phương trình tán sắc xấp xỉ dạng tường minh của sóng Rayleigh trong môi trường trên. Từ phép biến đổi hệ trục tọa độ ta đưa bài toán ban đầu về bài toán sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi monoclinic $x_3 = 0$ được phủ một lớp mỏng trục hướng đồng trục. Bằng cách áp dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng và phương pháp véctơ phân cực, phương trình tán sắc xấp xỉ được đưa ra. Vì phương trình tán sắc thu được dưới dạng tường minh nên rất tiện dụng trong các ứng dụng thực tế.

Từ khoá: trục hướng, monoclinic; trục chính vật liệu; lớp mỏng; điều kiện biên hiệu dụng; phương pháp véctơ phân cực.

AN APPROXIMATE SECULAR EQUATION OF RAYLEIGH WAVES PROPAGATING IN AN ELASTIC HALF-SPACE COATED BY A THIN UN-COAXIAL LAYER WITH THE POLARIZATION VECTOR METHOD

Abstract

In this paper, the propagation of Rayleigh waves in compressible orthotropic elastic half-space overlaid by a thin orthotropic elastic layer is investigated. However, the half-space and the layer have only one common principal material axis that perpendicular to the layer and the remains are inclined at an angle θ . The main purpose of this paper is to establish an approximate secular equation of the wave. From the transformation of the coordinate system, the original problem is referred to the problem of Rayleigh waves in a monoclinic elastic half-space with the symmetry plane $x_3 = 0$ coated by a thin coaxial orthotropic layer. By applying the effective boundary condition method and the polarization vector method, an approximate secular equation is recieved. Since the obtained secular equation is totally explicit, it is very useful in practical applications.

Keywords: orthotropic, monoclinic; principal material axis; thin layer; effective boundary condition; polarization vector method.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2021-15\(5V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2021-15(5V)-05) © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Ngày nay, cấu trúc gồm một lớp vật liệu mỏng gắn với một lớp vật liệu dày, mô hình hóa như một bán không gian bị phủ một lớp mỏng, đã và đang được sử dụng rộng rãi trong công nghệ hiện

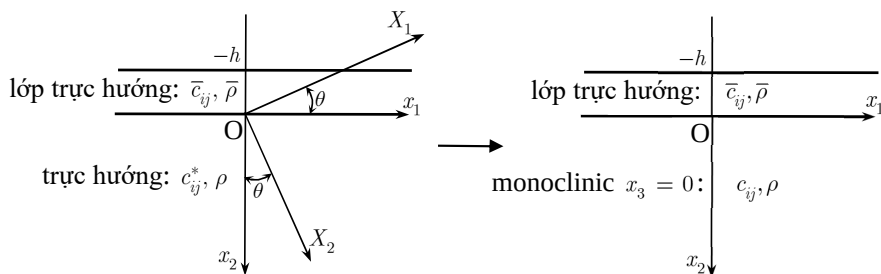
*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: huettt@nuce.edu.vn (Huệ, T. T. T.)

đại. Do vậy, việc đánh giá không phá hủy các tính chất cơ học của chúng, trước và trong quá trình sử dụng là cần thiết và có nhiều ý nghĩa [1]. Theo Every [2] để đánh giá không phá hủy các cấu trúc này, sóng mặt Rayleigh là một công cụ vô cùng thuận tiện. Khi đó, phương trình tán sắc dạng hiện của sóng Rayleigh là cơ sở lý thuyết để xác định các tính chất của cấu trúc từ các số liệu đo được từ thực nghiệm (các giá trị vận tốc sóng). Do vậy, phương trình tán sắc dạng hiện là mục tiêu cơ bản và quan trọng khi nghiên cứu sóng Rayleigh truyền trong các môi trường khác nói chung và các cấu trúc này nói riêng.

Sử dụng giả thiết lớp mỏng, ta thay thế toàn bộ ảnh hưởng của lớp mỏng lên bán không gian bằng một điều kiện biên hiệu dụng, bằng cách coi lớp như bản mỏng [3, 4], hoặc khai triển Taylor ứng suất tại mặt trên của lớp theo độ dày của lớp (được giả thiết là nhỏ) (xem [5–7]). Khi đó, từ bài toán sóng Rayleigh truyền trong bán không gian phủ lớp mỏng thành bài toán sóng Rayleigh truyền trong bán không gian chịu điều kiện biên hiệu dụng tại mặt biên. Trong các nghiên cứu trước đây, bán không gian và lớp mỏng đều có trục chính vật liệu trùng nhau. Có thể kể đến một vài nghiên cứu của các tác giả như Achenbach và Keshava. [3], Tiersten [4], Bovik [5], Steigmann và Ogden [6] với vật liệu đẳng hướng. Hay các nghiên cứu đối với vật liệu có tính dị hướng cao hơn của Vinh và cs. như vật liệu trục hướng [7–9], vật liệu monoclinic $x_3 = 0$ [10, 11].

Tuy nhiên, thực tế không phải lúc nào các cấu trúc này cũng có trục chính vật liệu của bán không gian và lớp trùng nhau. Do đó, mục tiêu của bài báo này là đưa ra phương trình tán sắc xấp xỉ dạng tường minh của sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi trục hướng, nén được phủ một lớp mỏng đàn hồi trục hướng, nén được mà trục chính vật liệu của bán không gian và lớp không trùng nhau. Cụ thể, vật liệu của bán không gian và lớp chỉ có một trục chính vật liệu trùng nhau (trục vuông góc với lớp), hai trục còn lại lệch nhau một góc θ . Bằng cách biến đổi trục chính vật liệu của bán không gian trùng với trục chính vật liệu của lớp, bán không gian đàn hồi trục hướng trở thành bán không gian đàn hồi monoclinic có mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$. Từ đó, bài toán ban đầu được đưa về bài toán truyền sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi monoclinic $x_3 = 0$, nén được phủ một lớp mỏng trục hướng, nén được đồng trục. Áp dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng và phương pháp vectơ phân cực (phức) [12], phương trình tán sắc xấp xỉ dạng tường minh trong bài toán này đã được đưa ra.

2. Đặt bài toán



Hình 1. Mô hình bài toán

Xét bán không gian đàn hồi trục hướng phủ một lớp mỏng (Hình 1). Ở đây, tuy lớp mỏng của là vật liệu đàn hồi trục hướng nhưng trục chính vật liệu của bán không gian và lớp mỏng không trùng nhau. Cụ thể, các trục chính vật liệu của bán không gian là OX_1, OX_2, OX_3 còn các trục chính vật

liệu của lớp là Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Trong đó các trục Ox_1, Ox_2 và Ox_1, Ox_2 lệch nhau một góc θ còn trục $Ox_3 \equiv Ox_3$. Khi đó, ta có phép biến đổi hệ trục tọa độ

$$x_i = \Omega_{ij}X_j, \quad \Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Hằng số vật liệu của bán không gian trong hệ tọa độ cũ $Ox_1x_2x_3$ là c_{ij}^* còn trong hệ tọa độ mới $Ox_1x_2x_3$ là c_{ij} . Khi đó, trong hệ tọa độ mới $Ox_1x_2x_3$, bán không gian đàn hồi trục hướng trở thành bán không gian đàn hồi monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$. Do bài báo chỉ xét bài toán biến dạng phẳng nên ta chỉ cần sử dụng các thành phần hằng số vật liệu của bán không gian trong hệ tọa độ mới như sau (xem Ting [13])

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{11}^* \cos^4 \theta + 2(c_{12}^* + 2c_{66}^*) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{22}^* \sin^4 \theta \\ c_{22} &= c_{22}^* \cos^4 \theta + 2(c_{12}^* + 2c_{66}^*) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{11}^* \sin^4 \theta \\ c_{12} &= c_{12}^* + (c_{11}^* + c_{22}^* - 2c_{12}^* - 4c_{66}^*) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ c_{16} &= -[c_{11}^* \cos^2 \theta - c_{22}^* \sin^2 \theta - (c_{12}^* + 2c_{66}^*)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \cos \theta \sin \theta \\ c_{26} &= [c_{22}^* \cos^2 \theta - c_{11}^* \sin^2 \theta - (c_{12}^* + 2c_{66}^*)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \cos \theta \sin \theta \\ c_{66} &= c_{66}^* + (c_{11}^* + c_{22}^* - 2c_{12}^* - 4c_{66}^*) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2)$$

Như vậy, từ bài toán sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi trục hướng phủ một lớp mỏng đàn hồi trục hướng có trục chính vật liệu lệch nhau, chúng ta đưa về bài toán mới. Đó là bài toán sóng Rayleigh truyền trong bán không gian đàn hồi monoclinic có mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$ phủ một lớp mỏng đàn hồi trục hướng đồng trục chính vật liệu. Chú ý rằng, bài toán mới được xét trong hệ trục tọa độ $Ox_1x_2x_3$.

3. Điều kiện biên hiệu dụng

3.1. Các phương trình cơ bản của lớp

Xét bán không gian đàn hồi $x_2 \geq 0$ được phủ một lớp mỏng đàn hồi $-h \leq x_2 \leq 0$. Giả thiết rằng, lớp và bán không gian là nén được và được gắn chặt với nhau. Chú ý rằng, các đại lượng của lớp mỏng và bán không gian giống nhau sẽ có kí hiệu giống nhau nhưng đối với lớp mỏng sẽ có thêm phần gạch ngang. Khi đó, ta xét bài toán biến dạng phẳng

$$u_i = u_i(x_1, x_2, t), \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, \quad u_3 \equiv \bar{u}_3 \equiv 0 \quad (3)$$

trong đó t là biến thời gian.

Do lớp mỏng được tạo từ vật liệu đàn hồi trục hướng, nén được nên ta có mối liên hệ giữa ứng suất và chuyển dịch có dạng

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11} &= \bar{c}_{11}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{12}\bar{u}_{2,2} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \bar{c}_{12}\bar{u}_{1,1} + \bar{c}_{22}\bar{u}_{2,2} \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{c}_{66}(\bar{u}_{1,2} + \bar{u}_{2,1}) \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó, $\bar{\sigma}_{ij}$ và $\bar{c}_{ij}$ lần lượt là các thành phần ứng suất và hằng số vật liệu của lớp mỏng, kí hiệu $u_{i,k}$ chỉ đạo hàm của u_i theo biến không gian x_k .

Phương trình chuyển động bỏ qua lực khối là

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11,1} + \bar{\sigma}_{12,2} &= \bar{\rho}\ddot{u}_1 \\ \bar{\sigma}_{12,1} + \bar{\sigma}_{22,2} &= \bar{\rho}\ddot{u}_2\end{aligned}\quad (5)$$

trong đó $\bar{\rho}$ là mật độ khối lượng của lớp.

Giải hệ phương trình gồm hai phương trình (4)₂ và (4)₃ đối với hai biến $\bar{u}_{1,2}$ và $\bar{u}_{2,2}$ ta suy ra

$$\begin{aligned}\bar{u}_{1,2} &= \frac{1}{\bar{c}_{66}}\bar{\sigma}_{12} - \bar{u}_{2,1} \\ \bar{u}_{2,2} &= \frac{1}{\bar{c}_{22}}\bar{\sigma}_{22} - \frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}}\bar{u}_{1,1}\end{aligned}\quad (6)$$

Thế công thức (4)₁ vào (5)₁ và có kể đến (6) ta được

$$\bar{\sigma}_{12,2} = \bar{\rho}\ddot{u}_1 - \frac{\bar{c}_{11}\bar{c}_{22} - \bar{c}_{12}^2}{\bar{c}_{22}}\bar{u}_{1,11} - \frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}}\bar{\sigma}_{22,1}\quad (7)$$

Từ phương trình (5)₂ ta có

$$\bar{\sigma}_{22,2} = \bar{\rho}\ddot{u}_2 - \bar{\sigma}_{12,1}\quad (8)$$

Các phương trình (6), (7) và (8) được viết lại dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{,2} \\ \bar{\mathbf{\Sigma}}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \bar{\mathbf{M}}_2 \\ \bar{\mathbf{M}}_3 & \bar{\mathbf{M}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{\Sigma}} \end{bmatrix}\quad (9)$$

trong đó $\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{bmatrix}^T$, $\bar{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{22} \end{bmatrix}^T$, kí hiệu T chỉ việc lấy chuyển vị của một ma trận và các ma trận thành phần $\bar{\mathbf{M}}_k$ được xác định như sau

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{M}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\partial_1 \\ -\frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}}\partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{c}_{66}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{c}_{22}} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{M}}_3 &= \begin{bmatrix} \bar{\rho}\partial_t^2 + \frac{\bar{c}_{12}^2 - \bar{c}_{11}\bar{c}_{22}}{\bar{c}_{22}}\partial_1^2 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}\partial_t^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}}_4 = \bar{\mathbf{M}}_1^T\end{aligned}\quad (10)$$

Chú ý rằng ở đây, ta sử dụng các kí hiệu $\partial_1 = \partial/\partial x_1$, $\partial_1^2 = \partial^2/\partial x_1^2$, $\partial_t^2 = \partial^2/\partial t^2$.

Từ phương trình (9) ta suy ra

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}^{(n)} \\ \bar{\mathbf{\Sigma}}^{(n)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}}^n \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{\Sigma}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \bar{\mathbf{M}}_2 \\ \bar{\mathbf{M}}_3 & \bar{\mathbf{M}}_4 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, x_2 \in [-h, 0]\quad (11)$$

trong đó kí hiệu (n) chỉ việc lấy đạo hàm cấp n theo biến x_2 còn kí hiệu n chỉ việc lấy lũy thừa bậc n .

3.2. Điều kiện biên hiệu dụng bậc hai

Giả sử độ dày h của lớp là nhỏ (lớp mỏng). Lưu ý, trong bài báo này, tác giả sử dụng điều kiện biên hiệu dụng bậc hai đối với độ dày của lớp để dẫn ra phương trình tán sắc xấp xỉ bậc hai của sóng Rayleigh theo độ dày của lớp. Khi đó, khai triển $\bar{\Sigma}(-h)$ thành chuỗi Taylor tại lân cận $x_2 = 0$ tới bậc hai của $(-h)$, ta có

$$\bar{\Sigma}(-h) = \bar{\Sigma}(0) - h\bar{\Sigma}^{(1)}(0) + \frac{h^2}{2}\bar{\Sigma}^{(2)}(0) \quad (12)$$

Giả thiết rằng, mặt biên $x_2 = -h$ tự do đối với ứng suất, tức là $\bar{\Sigma}(-h) = 0$. Khi đó, thay phương trình (11) tại $x_2 = 0$ vào phương trình (12) ta được

$$\left[\mathbf{I} - h\bar{\mathbf{M}}_4 + \frac{h^2}{2}(\bar{\mathbf{M}}_3\bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_4^2) \right] \bar{\Sigma}(0) + \left[-h\bar{\mathbf{M}}_3 + \frac{h^2}{2}(\bar{\mathbf{M}}_3\bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_4\bar{\mathbf{M}}_3) \right] \bar{\mathbf{U}}(0) = 0 \quad (13)$$

Vì lớp mỏng và bán không gian là gắn chặt tại mặt biên $x_2 = 0$ nên ta có $\mathbf{U}(0) = \bar{\mathbf{U}}(0)$ và $\Sigma(0) = \bar{\Sigma}(0)$. Do đó, từ phương trình (13) ta suy ra

$$\left[\mathbf{I} - h\bar{\mathbf{M}}_4 + \frac{h^2}{2}(\bar{\mathbf{M}}_3\bar{\mathbf{M}}_2 + \bar{\mathbf{M}}_4^2) \right] \Sigma(0) + \left[-h\bar{\mathbf{M}}_3 + \frac{h^2}{2}(\bar{\mathbf{M}}_3\bar{\mathbf{M}}_1 + \bar{\mathbf{M}}_4\bar{\mathbf{M}}_3) \right] \mathbf{U}(0) = 0 \quad (14)$$

Phương trình (14) là phương trình liên hệ giữa vectơ ứng suất và vectơ chuyển dịch tại mặt biên $x_2 = 0$ được gọi là điều kiện biên hiệu dụng bậc hai cho lớp mỏng đàn hồi trục hướng, nén được.

Xét sóng Rayleigh truyền theo hướng x_1 , tắt dần theo hướng x_2 với vận tốc $c(>0)$ và số sóng $k(>0)$. Khi đó, theo [14] ta tìm nghiệm của chuyển dịch và ứng suất dưới dạng

$$u_n = U_n(y) e^{ik(x_1 - ct)}, \sigma_{n2} = ikt_n(y) e^{ik(x_1 - ct)}, n = 1, 2, y = kx_2 \quad (15)$$

Thay dạng nghiệm (15) vào phương trình (14) ta dẫn về

$$\mathbf{t} = [\mathbf{I} - \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{C} \mathbf{u} \text{ tại } y = kx_2 = 0 \quad (16)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \left(s_2 + \frac{\bar{X}}{\bar{c}_{66}}\right) \frac{\varepsilon^2}{2} & -is_1\varepsilon \\ -i\varepsilon & \left(s_1 + \frac{\bar{X}}{\bar{c}_{22}}\right) \frac{\varepsilon^2}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} i(s_3 + \bar{X})\varepsilon & -[\bar{X} + s_3 + s_1\bar{X}] \frac{\varepsilon^2}{2} \\ -[\bar{X} + s_3 + s_1\bar{X}] \frac{\varepsilon^2}{2} & i\bar{X}\varepsilon \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

trong đó $\varepsilon = kh$ là đại lượng độ dày không thứ nguyên của lớp, $\bar{X} = \bar{\rho}c^2$ và

$$s_1 = \frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}}, \quad s_2 = s_1 + \frac{s_3}{\bar{c}_{66}}, \quad s_3 = \frac{\bar{c}_{12}^2 - \bar{c}_{11}\bar{c}_{22}}{\bar{c}_{22}} \quad (18)$$

Lưu ý, các ma trận ở trên đã bỏ đi những số hạng ε^3 hoặc có bậc cao hơn.

Sử dụng công thức $[\mathbf{I} - \mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3 + \dots$ và bỏ đi những số hạng ε^3 hoặc có bậc cao hơn, phương trình (16) trở thành

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{tại } y = kx_2 = 0 \quad (19)$$

trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i(\bar{X} + s_3)\varepsilon & s_4 \frac{\varepsilon^2}{2} \\ -s_4 \frac{\varepsilon^2}{2} & i\bar{X}\varepsilon \end{bmatrix}, \quad s_4 = s_1\bar{X} - (\bar{X} + s_3) \quad (20)$$

Chú ý rằng $\tilde{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ (kí hiệu $\sim$ là kí hiệu lấy liên hợp phức) và ma trận $\mathbf{A}$ là ma trận đã bỏ đi những số hạng ε^3 hoặc có bậc cao hơn. Phương trình (19) là một cách viết khác của điều kiện biên hiệu dụng trong trường hợp này. Như vậy, phương trình (14) hoặc (19) thay thế (một cách xấp xỉ) toàn bộ ảnh hưởng của lớp mỏng đàn hồi trực hướng, nên được lên bán không gian.

4. Phương trình tán sắc xấp xỉ bậc hai của sóng Rayleigh

4.1. Phương trình cơ bản của bán không gian dưới dạng ma trận

Như đã trình bày ở trên, trong hệ tọa độ $Ox_1x_2x_3$, bán không gian đàn hồi trực hướng, nên được trở thành bán không gian đàn hồi monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$, nên được. Khi đó, xét bài toán biến dạng phẳng (3). Theo Ting [15], ta có mối liên hệ giữa ứng suất và chuyển dịch cho bán không gian đàn hồi monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$, nên được như sau

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2} + c_{16}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \sigma_{22} &= c_{12}u_{1,1} + c_{22}u_{2,2} + c_{26}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \sigma_{12} &= c_{16}u_{1,1} + c_{26}u_{2,2} + c_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \quad (21)$$

trong đó σ_{ij} và c_{ij} lần lượt là các thành phần ứng suất và hằng số vật liệu của bán không gian, c_{ij} được xác định trong công thức (2).

Bỏ qua lực khối, phương trình chuyển động có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \rho\ddot{u}_1 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= \rho\ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (22)$$

trong đó ρ là mật độ khối lượng của bán không gian.

Từ phương trình (21)₂ và (21)₃, ta có biểu thức xác định hai đại lượng $u_{1,2}$ và $u_{2,2}$

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= n_{66}\sigma_{12} + n_{26}\sigma_{22} - r_6u_{1,1} - u_{2,1} \\ u_{2,2} &= n_{26}\sigma_{12} + n_{22}\sigma_{22} - r_2u_{1,1} \end{aligned} \quad (23)$$

trong đó

$$\begin{aligned} n_{66} &= \frac{c_{22}}{\Delta}, n_{26} = -\frac{c_{26}}{\Delta}, n_{22} = \frac{c_{66}}{\Delta}, r_6 = -\frac{c_{12}c_{26} - c_{22}c_{16}}{\Delta} \\ r_2 &= \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{\Delta}, \Delta = c_{22}c_{66} - c_{26}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Thay (21)₁ vào phương trình (22)₁ và sử dụng hệ thức (23) ta thu được

$$\sigma_{12,2} = \rho\ddot{u}_1 - \eta u_{1,11} - r_6\sigma_{12,1} - r_2\sigma_{22,1} \quad (25)$$

trong đó

$$\eta = c_{11} - r_6 c_{16} - r_2 c_{12} \quad (26)$$

Từ phương trình (22)₂ ta dẫn về

$$\sigma_{22,2} = \rho \ddot{u}_2 - \sigma_{12,1} \quad (27)$$

Viết các phương trình (23), (25) và (27) dưới dạng ma trận, ta có

$$\zeta_{,2} = \mathbf{M}\zeta \quad (28)$$

trong đó

$$\zeta = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_1^T \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -r_6 \partial_1 & -\partial_1 \\ -r_2 \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} n_{66} & n_{26} \\ n_{26} & n_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \rho \partial_t^2 - \eta \partial_1^2 & 0 \\ 0 & \rho \partial_t^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Phương trình (28) là phương trình dạng ma trận của bài toán biến dạng phẳng cho vật liệu monoclinic với mặt phẳng đối xứng $x_3 = 0$.

4.2. Sóng Rayleigh

Xét sóng Rayleigh truyền theo hướng x_1 , tắt dần theo hướng x_2 với vận tốc $c (> 0)$ và số sóng $k (> 0)$. Khi đó, ta tìm nghiệm của chuyển dịch và ứng suất dưới dạng (15). Thế dạng nghiệm (15) vào phương trình (28) dẫn về

$$\xi' = i\mathbf{N}\xi, \quad 0 \leq y \leq +\infty \quad (31)$$

Lưu ý, dấu ' ở phương trình (31) là đạo hàm theo biến $y = kx_2$ và

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

trong đó, các ma trận thành phần $\mathbf{N}_k$ được xác định theo công thức sau

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} -r_6 & -1 \\ -r_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} n_{66} & n_{26} \\ n_{26} & n_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} X - \eta & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}, \quad X = \rho c^2 \quad (33)$$

Điều kiện để sóng Rayleigh tắt dần ở vô cùng

$$\xi(+\infty) = 0 \quad (34)$$

và điều kiện biên hiệu dụng xấp xỉ bậc hai (19) tại mặt biên $x_2 = 0$.

Bằng phương pháp đổi biến $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{u}$, phương trình (31), điều kiện tắt dần ở vô cùng (34) và điều kiện biên hiệu dụng (19) được viết lại như sau

$$\mathbf{w}' = i\mathbf{Q}\mathbf{w}, \quad 0 \leq y \leq +\infty \quad (35)$$

$$\mathbf{w}(+\infty) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0 \quad (36)$$

trong đó

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \mathbf{A}, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{Q}_3 = \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{N}_1 - \mathbf{A} \mathbf{N}_2 \mathbf{A}, \quad \mathbf{Q}_4 = \mathbf{N}_1^T - \mathbf{A} \mathbf{N}_2 \quad (37)$$

Từ (37) và các hệ thức sau

$$\tilde{\mathbf{N}}_2^T = \mathbf{N}_2, \quad \tilde{\mathbf{N}}_3^T = \mathbf{N}_3, \quad \tilde{\mathbf{N}}_1 = \mathbf{N}_1, \quad \tilde{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A} \quad (38)$$

ta dễ dàng chứng minh được

$$\tilde{\mathbf{Q}}_2^T = \mathbf{Q}_2, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_3^T = \mathbf{Q}_3, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1^T = \mathbf{Q}_4 \quad (39)$$

Thật vậy, ta có

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{N}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_2^T = \tilde{\mathbf{N}}_2^T = \mathbf{N}_2 = \mathbf{Q}_2 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 &= \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{N}_1 - \mathbf{A} \mathbf{N}_2 \mathbf{A} \\ \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_3^T &= \tilde{\mathbf{N}}_3^T + \left(\tilde{\mathbf{N}}_1^T \tilde{\mathbf{A}} \right)^T - \left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{N}}_1 \right)^T - \left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{A}} \right)^T \\ &= \tilde{\mathbf{N}}_3^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{N}}_1 - \tilde{\mathbf{N}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}^T - \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{N}}_2^T \tilde{\mathbf{A}}^T \\ &= \mathbf{N}_3 - \mathbf{A} \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{N}_2 \mathbf{A} = \mathbf{Q}_3 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \mathbf{A} \\ \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}_1^T &= \tilde{\mathbf{N}}_1^T + \left(\tilde{\mathbf{N}}_2 \tilde{\mathbf{A}} \right)^T = \mathbf{N}_1^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{N}}_2^T = \mathbf{N}_1^T - \mathbf{A} \mathbf{N}_2 = \mathbf{Q}_4 \end{aligned} \quad (42)$$

4.3. Phương trình tán sắc

Để tìm phương trình tán sắc của sóng Rayleigh, ta áp dụng phương pháp vectơ phân cực (phức) (xem [12]). Trong phương trình (56) của tài liệu tham khảo [12], ta thay $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ và $\mathbf{Y} = \mathbf{w}$ với $\mathbf{Q}, \mathbf{w}$ được xác định ở công thức (37). Khi đó, ta có

$$\tilde{\mathbf{w}}^T(0) \hat{\mathbf{I}} \mathbf{Q}^n \mathbf{w}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad (43)$$

trong đó

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Kí hiệu

$$\mathbf{Q}^n = \begin{bmatrix} {}^n\mathbf{Q}_1 & {}^n\mathbf{Q}_2 \\ {}^n\mathbf{Q}_3 & {}^n\mathbf{Q}_4 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Khi đó, phương trình (43) được viết lại dưới dạng sau

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(0) & \tilde{\mathbf{v}}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n\mathbf{Q}_1 & {}^n\mathbf{Q}_2 \\ {}^n\mathbf{Q}_3 & {}^n\mathbf{Q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{v}(0) \end{bmatrix} = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad (46)$$

Sử dụng điều kiện thứ hai của phương trình (36): $\mathbf{v}(0) = 0$, phương trình (46) được rút gọn thành dạng sau

$$\tilde{\mathbf{u}}^T(0) {}^n\mathbf{Q}_3 \mathbf{u}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad (47)$$

Ta kí hiệu các thành phần của ma trận ${}^n\mathbf{Q}_3$ là ${}^nQ_{ij}$, ($i, j = 1, 2$). Vì $\mathbf{Q}$ là một ma trận vuông cấp 4 nên theo Remark 1. (ii) trong [12], từ hệ thức (47) ta thu được hệ ba phương trình độc lập tuyến tính với ba giá trị khác nhau của n . Dễ dàng thấy rằng việc chọn $n = -1, 1, 2$ là lựa chọn tốt nhất. Giả sử $U_1(0) \neq 0$, khi đó vectơ $\mathbf{u}(0)$ có thể viết dưới dạng $\mathbf{u}(0) = U_1(0) \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}^T$ với $\alpha = U_2(0)/U_1(0)$ là

một số phức. $\alpha = a + ib$, a, b là số thực. Thay biểu thức của $\mathbf{u}(0)$ vào công thức (47) và có tính đến tính chất ${}^n\mathbf{Q}_3$ là ma trận hermitian (xem Lemma 2 trong [12]), ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^nQ_{11} & {}^nQ_{12} \\ {}^n\tilde{Q}_{12} & {}^nQ_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad n = -1, 1, 2 \quad (48)$$

hoặc được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} -{}^1Q_{11} + {}^1Q_{12}\alpha + {}^1\tilde{Q}_{12}\tilde{\alpha} + {}^1Q_{22}\alpha\tilde{\alpha} = 0 \\ {}^1Q_{11} + {}^1Q_{12}\alpha + {}^1\tilde{Q}_{12}\tilde{\alpha} + {}^1Q_{22}\alpha\tilde{\alpha} = 0 \\ {}^2Q_{11} + {}^2Q_{12}\alpha + {}^2\tilde{Q}_{12}\tilde{\alpha} + {}^2Q_{22}\alpha\tilde{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (49)$$

trong đó các thành phần ${}^nQ_{ij}$ của ma trận ${}^n\mathbf{Q}_3$ ($n = -1, 1, 2$) được xác định từ hai phương trình (37) và (45). Sau khi tính toán, ta thu được các thành phần ${}^nQ_{ij}$ (đã được bỏ đi các số hạng ε^3 và bậc cao hơn) như sau

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(1)} &= X - \eta + \left(r_2 s_4 + n_{66} (s_3 + \bar{X})^2 \right) \varepsilon^2 \\ Q_{22}^{(1)} &= X + \left(-s_4 + n_{22} \bar{X}^2 \right) \varepsilon^2 \\ Q_{12}^{(1)} &= i \left(s_3 + \bar{X} - r_2 \bar{X} \right) \varepsilon - \frac{1}{2} \left(r_6 s_4 - 2n_{26} \bar{X} (s_3 + \bar{X}) \right) \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(2)} &= -2r_6 (X - \eta) - \left[n_{26} s_4 (X - \eta) + r_2 r_6 s_4 + 2(s_3 + \bar{X})^2 (n_{26} + n_{66} r_6) \right] \varepsilon^2 \\ Q_{22}^{(2)} &= \left(s_4 r_6 + n_{26} s_4 X - 2n_{26} r_2 \bar{X}^2 \right) \varepsilon^2 \\ Q_{12}^{(2)} &= -i \left[n_{26} (s_3 X + \eta \bar{X}) + r_6 (s_3 + \bar{X} - r_2 \bar{X}) \right] \varepsilon + \eta - X - r_2 X \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(s_4 n_{66} (X - \eta) + s_4 (r_6^2 - n_{22} X) - 2\bar{X} (n_{22} + n_{66} r_2 + n_{26} r_6) (s_3 + \bar{X}) \right) \right] \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (51)$$

và $Q_{ij}^{(-1)} = \hat{Q}_{ij}^{(-1)} / q$, $q = \det |Q| \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{11}^{(-1)} &= \left[n_{22} (X - \eta) - r_2^2 \right] X \\ &\quad + \left[r_2^2 s_4 - n_{22} s_4 (X - \eta) - n_{26}^2 X (s_3 + \bar{X})^2 + n_{22} (n_{66} X - 1) (s_3^2 + 2s_3 \bar{X} + \bar{X}^2) \right] \varepsilon^2 \\ \hat{Q}_{22}^{(-1)} &= (X - \eta) (n_{66} X - 1) - r_6^2 X + \left[(X - \eta) (n_{22} n_{66} - n_{26}^2) \bar{X}^2 \right. \\ &\quad \left. + (n_{66} r_2 - n_{26} r_6) s_4 X - r_2 s_4 - (n_{66} r_2^2 + n_{22} r_6^2 - 2n_{26} r_2 r_6) \bar{X}^2 \right] \varepsilon^2 \\ \hat{Q}_{12}^{(-1,r)} &= i \left[n_{22} \bar{X} (X - \eta) - r_2^2 \bar{X} + (s_3 + \bar{X}) (n_{26} r_6 X - n_{66} r_2 X + r_2) \right] \varepsilon \\ &\quad + \left[r_2 r_6 - n_{26} (X - \eta) \right] X \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\left(s_4 n_{26} (X - \eta - r_2 X) + s_4 r_6 (n_{22} X - r_2) + 2\bar{X} (n_{22} r_6 - n_{26} r_2) (s_3 + \bar{X}) \right) \right] \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (52)$$

Do ma trận ${}^n\mathbf{Q}_3$ là ma trận hermitian nên ${}^nQ_{11}, {}^nQ_{22}$ ($n = 1, 2$), ${}^{-1}\hat{Q}_{11}, {}^{-1}\hat{Q}_{22}$ là các số thực và ${}^nQ_{12}$, ($n = 1, 2$), ${}^{-1}\hat{Q}_{12}$ là các số phức mà phần thực và phần ảo được biểu diễn tương ứng như sau ${}^{n,r}Q_{12}, {}^{n,i}Q_{12}$, ($n = 1, 2$), ${}^{-1,r}\hat{Q}_{12}, {}^{-1,i}\hat{Q}_{12}$. Thế các biểu thức $\alpha = a + ib$, ${}^nQ_{12} = {}^{n,r}Q_{12} + i{}^{n,i}Q_{12}$, ($n = 1, 2$), ${}^{-1}\hat{Q}_{12} = {}^{-1,r}\hat{Q}_{12} + i{}^{-1,i}\hat{Q}_{12}$ vào (49) ta thu được hệ ba phương trình tuyến tính có dạng sau

$$\begin{bmatrix} {}^{-1,r}\hat{Q}_{12} & {}^{-1,i}\hat{Q}_{12} & {}^{-1}\hat{Q}_{22} \\ {}^{1,r}Q_{12} & {}^{1,i}Q_{12} & {}^1Q_{22} \\ {}^{2,r}Q_{12} & {}^{2,i}Q_{12} & {}^2Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a \\ -2b \\ a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{-1}\hat{Q}_{11} \\ {}^{-1}Q_{11} \\ {}^{-2}Q_{11} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Khi đó, hệ phương trình (53) có nghiệm

$$2a = D_1/D, \quad -2b = D_2/D, \quad a^2 + b^2 = D_3/D \quad (54)$$

trong đó, D là định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình (53), D_k là định thức của các ma trận nhận được từ ma trận hệ số bằng cách thay cột thứ k bằng vectơ cột vế phải của hệ phương trình (53).

Từ (54) ta suy ra

$$D_1^2 + D_2^2 - 4DD_3 = 0 \quad (55)$$

Phương trình (55) là phương trình tán sắc xấp xỉ dạng hiện (dạng tường minh) của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi trục hướng, nén được phủ một lớp mỏng đàn hồi trục hướng, nén được có trục chính vật liệu của bán không gian và lớp mỏng không trùng nhau. Đây là phương trình xấp xỉ bậc hai đối với độ dày không thứ nguyên của lớp $\varepsilon = kh$. Tuy rằng biểu thức của các định thức D, D_k là dài và không được viết tường minh ở đây, nhưng chúng được tính toán một cách dễ dàng bằng việc sử dụng các biểu thức (50)–(52).

5. Kết luận

Trong bài báo này, tác giả đã trình bày bài toán truyền sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi được phủ một lớp mỏng đàn hồi. Ở đây, cả bán không gian và lớp mỏng đều được giả thiết là trục hướng, nén được. Tuy nhiên, trục chính vật liệu của bán không gian và lớp mỏng không trùng nhau. Cụ thể, chúng chỉ có một trục chính trùng nhau - trục vuông góc với lớp còn hai trục còn lại lệch nhau một góc θ . Bằng cách áp dụng phương pháp điều kiện biên hiệu dụng và phương pháp vectơ phân cực (phức), tác giả bài báo đã đưa ra được phương trình tán sắc xấp xỉ bậc hai cho trường hợp này. Vì phương trình tán sắc được đưa ra dưới dạng hiện nên nó có ý nghĩa khoa học và ứng dụng thực tiễn, đặc biệt là công cụ thuận tiện trong đánh giá không phá hủy vật liệu.

Tài liệu tham khảo

- [1] Makarov, S., Chilla, E., Fröhlich, H.-J. (1995). [Determination of elastic constants of thin films from phase velocity dispersion of different surface acoustic wave modes](#). *Journal of Applied Physics*, 78(8): 5028–5034.
- [2] Every, A. G. (2002). [Measurement of the near-surface elastic properties of solids and thin supported films](#). *Measurement Science and Technology*, 13(5):R21–R39.
- [3] Achenbach, J. D., Keshava, S. P. (1967). [Free waves in a plate supported by a semi-infinite continuum](#). *Journal of Applied Mechanics*, 34(2):397–404.
- [4] Tiersten, H. F. (1969). [Elastic surface waves guided by thin films](#). *Journal of Applied Physics*, 40(2): 770–789.
- [5] Bovik, P. (1996). [A comparison between the Tiersten model and O\(H\) boundary conditions for elastic surface waves guided by thin layers](#). *Journal of Applied Mechanics*, 63(1):162–167.
- [6] Steigmann, D. J., Ogden, R. W. (2007). [Surface waves supported by thin-film/substrate interactions](#). *IMA Journal of Applied Mathematics*, 72(6):730–747.
- [7] Vinh, P. C., Linh, N. T. K. (2012). [An approximate secular equation of Rayleigh waves propagating in an orthotropic elastic half-space coated by a thin orthotropic elastic layer](#). *Wave Motion*, 49(7):681–689.
- [8] Vinh, P. C., Linh, N. T. K., Anh, V. T. N. (2014). Rayleigh waves in an incompressible orthotropic half-space coated by a thin elastic layer. *Archives of Mechanics*, 66(3):173–184.
- [9] Destrade, M. (2001). [The explicit secular equation for surface acoustic waves in monoclinic elastic crystals](#). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4):1398–1402.

- [10] Vinh, P. C., Huệ, T. T. T. (2013). Phương trình tán sắc xấp xỉ của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi monoclinic được phủ lớp mỏng đàn hồi trục hướng. *Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ XI*, Thành phố Hồ Chí Minh, 1387–1394.
- [11] Vinh, P. C., Huệ, T. T. T. (2015). Phương trình tán sắc xấp xỉ của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi monoclinic được phủ lớp mỏng đàn hồi monoclinic không nén được. *Hội nghị khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ XII*, Thành phố Đà Nẵng, 1685–1691.
- [12] Vinh, P. C., Huệ, T. T. T. (2014). [Rayleigh waves with impedance boundary conditions in anisotropic solids](#). *Wave Motion*, 51(7):1082–1092.
- [13] Ting, T. C. T. (2000). [Anisotropic elastic constants that are structurally invariant](#). *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 53(4):511–523.
- [14] Destrade, M. (2001). [The explicit secular equation for surface acoustic waves in monoclinic elastic crystals](#). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4):1398–1402.
- [15] Ting, T. C. T. (1996). *Anisotropic elasticity: Theory and applications*. Oxford University Press, New York.