

SỬ DỤNG DẠNG GIẢI TÍCH PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CÓ CẢN CỦA DẦM TIMOSHENKO CHỊU TẢI DI ĐỘNG

Nguyễn Sỹ Nam^{a,*}, Lê Ngọc Phương^a

^aKhoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 28/7/2021, Sửa xong 25/9/2021, Chấp nhận đăng 28/9/2021

Tóm tắt

Lý thuyết dầm Euler – Bernoulli còn được gọi là lý thuyết dầm dài, thường bỏ qua ảnh hưởng của quán tính quay và biến dạng trượt. Khi có kể đến các yếu tố đó ta có thể dùng lý thuyết dầm Timoshenko. Các đặc trưng của dầm như tần số riêng, dao động riêng, hệ số cản, cũng như các đáp ứng động lực học sẽ có những thay đổi nhất định. Trong nghiên cứu này sẽ sử dụng phương pháp giải tích để khảo sát đáp ứng động lực học của dầm Timoshenko chịu tải trọng di động với nghiệm dao động dạng giải tích. Dựa vào dạng nghiệm đó để có những đánh giá, nhận xét về các ảnh hưởng của các yếu tố đến đáp ứng động lực học như ảnh hưởng của các hệ số cản, tải trọng, vận tốc tải trọng đến dao động và ứng suất của dầm.

Từ khoá: dầm Timoshenko; dầm Euler – Bernoulli; tần số riêng; dạng dao động riêng; dao động riêng; dao động cưỡng bức; tải trọng di động.

ANALYSIS OF FORCE VIBRATION WITH THE DRAG COEFFICIENT OF TIMOSHENKO BEAM UNDER MOVING LOAD BY USING ANALYTICAL METHODS

Abstract

Euler–Bernoulli beam theory is known as the long beam theory that excluded the rotatory inertia and shear deformation effects. The Timoshenko beam theory applies for cases that include these factors. The beam characteristics such as nature frequencies, mode shapes, drag coefficient, as well as dynamic responses will have changes. This study will apply analytical methods to investigate the dynamic responses of Timoshenko beams under moving loads that have vibrational solutions analytic forms. Based on these solutions to make assessments, comments on the effects of factors on dynamic response such as effects of drag coefficients, loads and load velocity on vibration and stress of the beam.

Keywords: Timoshenko beam; Euler – Bernoulli beam; nature frequencies; mode shapes; free vibration; force vibration; moving loads.

[https://doi.org/10.31814/stce.huice\(nuce\)2021-15\(5V\)-04](https://doi.org/10.31814/stce.huice(nuce)2021-15(5V)-04) © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Giới thiệu

Các nghiên cứu về dao động của dầm hoặc cầu dưới tác dụng của tải trọng cưỡng bức di động đã được các tác giả trong nước quan tâm khá nhiều [1–14], trong đó các tác giả sử dụng các lý thuyết dầm như Euler – Bernoulli, dầm Timoshenko để đi xác định dao động riêng và dao động cưỡng bức của các mô hình dầm dưới tác dụng của tải trọng di động, tải gió hoặc tải cưỡng bức bằng các phương pháp khác nhau. Trong đó [1, 3] thì xét đến trường hợp hoạt tải khai thác tác dụng lên hệ dầm liên tục và tác dụng lên tấm đẳng hướng [3], một số nghiên cứu về dao động của dầm có vết nứt [4, 12, 14],

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: namns@nuce.edu.vn (Nam, N. S.)

một số nghiên cứu về dầm có vật liệu dị hướng như [9–11, 14]. Trong các nghiên cứu hầu hết tác giả dùng phương pháp số để phân tích các đáp ứng động lực. Trong [9] tác giả có đưa ra phương trình vi phân cấp 2 là chuỗi các bậc của dao động, tiếp đó các tác giả giả định khai triển tải phân bố cường độ bậc có dạng chuỗi tương ứng với chuỗi bậc của dao động và lấy ra nghiệm giải tích bậc bất kỳ của dao động theo bậc tương ứng của hàm cường độ. Tuy các nghiên cứu trong nước khá phong phú như đã nêu trên, nhưng vấn đề về bài toán dầm Timoshenko có kể đến cản thì còn rất ít đề cập, đây cũng là vấn đề cần làm phong phú hơn bằng các khảo sát cụ thể mà nghiên cứu này hướng tới.

Với các nghiên cứu của tác giả trên thế giới, vấn đề này đã được nghiên cứu từ lâu, các nghiên cứu khá đầy đủ và phong phú [15–22]. Các nghiên cứu này đa số sử dụng các phương pháp số để đánh giá các đáp ứng động lực học và đều chưa xét đến ảnh hưởng của hệ số cản trong cũng như cản ngoài đến nghiệm của dao động. Trong nghiên cứu [15], tác giả đã khảo sát đáp ứng động lực học của dầm Timoshenko chịu tải trọng di động bằng phương pháp số, trong đó chưa kể đến ảnh hưởng của cản. Còn trong [16], các tác giả đã dựa trên nghiên cứu đó để xét tải di động có gia tốc. Các nghiên cứu [17, 18] tác giả đã sử dụng dạng dao động riêng để xác định tần số riêng của các dầm có liên kết khác nhau, sử dụng dạng nghiệm hàm Green để nghiên cứu đáp ứng động lực học, hàm Green cũng được sử dụng trong [21, 22] để xác định đáp ứng của dầm có và không có vết nứt, có giảm chấn. Việc sử dụng sử dụng dạng dao động riêng đã được sử dụng để phân tích đáp ứng động lực học trong [14, 23].

Trong nghiên cứu này, các tác giả đã tập trung vào phân tích dao động cường độ bậc có các thành phần cản trong và cản ngoài của dầm Timoshenko. Để làm được điều đó, tác giả thực hiện biến đổi đưa phương trình dao động từ dạng phương trình đạo hàm riêng về dạng phương trình vi phân thường, đây là các phương trình vi phân mô tả dao động tuyến tính cường độ bậc có cản. Nghiệm giải tích được đưa ra có dạng tường minh. Từ đó đánh giá ảnh hưởng của một số yếu tố đến đáp ứng động lực.

2. Phương trình đáp ứng động lực học

2.1. Phương trình đáp ứng động lực học của dầm Timoshenko

Xét dầm chịu tải trọng phân bố $p(x, t)$ theo phương đứng. Khi đó, độ võng w , góc xoay mặt cắt ngang φ , mômen uốn M và lực cắt Q là các hàm của tọa độ x và thời gian t :

$$w(x, t), \varphi(x, t), M(x, t), Q(x, t) \quad (1)$$

Phương trình dao động của dầm theo lý thuyết dầm Timoshenko có dạng [6, 7, 14, 17]:

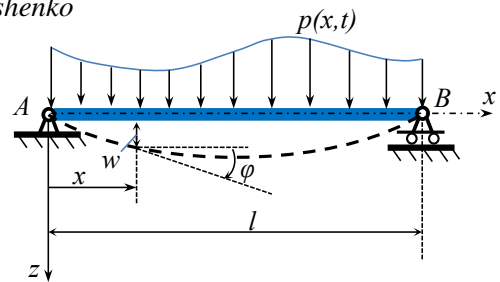
$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = p(x, t) \quad (2)$$

$$\rho I(x) \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - Q(x, t) = 0 \quad (3)$$

với $\beta = \text{const}$ là hệ số cản ngoài, ρ là khối lượng riêng của dầm, A là diện tích mặt cắt ngang, $\mu = \rho A$ là phân bố khối lượng trên đơn vị dài của dầm.

Ta có góc xoay của mặt cắt ngang:

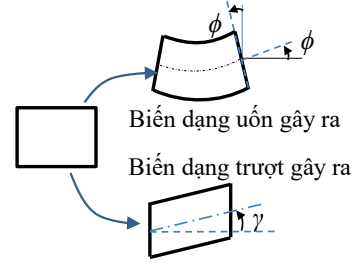
$$\tan \varphi = \frac{\partial w}{\partial x} \approx \varphi = \phi + \gamma_{xz} \Rightarrow \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \quad (4)$$



Hình 1. Dầm chịu tải trọng $q(x, t)$

Đối với dầm Timoshenko, góc xoay φ của mặt cắt ngang kể trên bằng tổng góc xoay ϕ do biến dạng uốn gây ra và góc xoay γ_{xz} do biến dạng trượt gây ra (Hình 2).

Khi kể đến cản trong của các lớp vật liệu, đây là lực cản sinh ra do sự ma sát giữa các lớp tinh thể của vật liệu khi chúng trượt tương đối trên nhau, thực nghiệm cho thấy thành phần ma sát cản này của vật liệu tỉ lệ với vận tốc biến dạng, do đó quan hệ ứng suất-biến dạng có dạng:



Hình 2. Các thành phần góc xoay

$$\sigma_{xx} = E \left(\varepsilon_{xx}(x, z, t) + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{xx}(x, z, t)}{\partial t} \right), \quad \sigma_{xz} = G \left(\gamma_{xz}(x, t) + \alpha \frac{\partial \gamma_{xz}(x, t)}{\partial t} \right) \quad (5)$$

trong đó α là hệ số cản trong của vật liệu. Ta thấy rằng với vật liệu đẳng hướng thì hệ số này là không đổi theo các phương, với vật liệu dị hướng thì đây là vấn đề cần xem xét kỹ lưỡng hơn.

Như vậy khi có cản phương trình dao động có dạng [6]:

$$\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \right) = p(x, t) \quad (6)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - EI \left(\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \phi^3(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \right) - \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi + \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right) = 0 \quad (7)$$

trong đó E là mô đun đàn hồi, I là mô men quán tính mặt cắt ngang, G là mô đun đàn hồi trượt, κ là hệ số hiệu chỉnh cắt, β là hệ số cản ngoài của kết cấu.

Như vậy ta thu được hai phương trình đạo hàm riêng mô tả dao động cưỡng bức có cản của dầm Timoshenko thường với hai ẩn là $w(x, t)$ và $\phi(x, t)$.

3. Dao động tự do của dầm và phương trình xác định dạng dao động riêng

Để đơn giản, khi xác định tần số riêng của dầm ta thường sử dụng giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của cản, khi đó phương trình dao động tự do của dầm với các hệ số cản được bỏ qua ($\alpha = \beta = 0$), từ phương trình (6) và (7) có dạng:

$$\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (8)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (9)$$

3.1. Hàm dạng riêng tổng quát của dao động

Theo phương pháp phân li biến số, nghiệm của phương trình được biểu diễn dưới dạng tích của một hàm phụ thuộc vào không gian x và một hàm phụ thuộc vào thời gian t có dạng [6, 7, 14, 17, 19, 20]:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (10)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x)T(t) \quad (11)$$

trong đó $W(x)$, $\Phi(x)$ là các dạng dao động riêng của dầm theo tọa độ x ; $T(t)$ là hàm biên độ dao động theo thời gian t .

Sử dụng dạng nghiệm (10), (11) thay vào các phương trình (8) và (9) rút ra được các hàm dạng riêng của dao động [6, 19]:

- Trường hợp $\omega < \omega_c$. Ta có hàm dạng riêng của dao động uốn và góc xoay:

$$W(x) = a_1 \sinh \beta x + a_2 \cosh \beta x + a_3 \sin \xi x + a_4 \cos \xi x \quad (12)$$

$$\Phi(x) = a_2 h_\beta \sinh \beta x + a_1 h_\beta \cosh \beta x - a_4 f_\xi \sin \xi x + a_3 f_\xi \cos \xi x \quad (13)$$

trong đó:

$$h_\beta = \left(\beta + \frac{\omega^2 \rho}{\kappa G \beta} \right); \quad f_\xi = \left(\xi - \frac{\omega^2 \rho}{\kappa G \xi} \right) \quad (14)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\left(\frac{1}{\kappa G} + \frac{1}{E} \right) \rho \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa G} + \frac{1}{E} \right)^2 \rho^2 \omega^4 - 4 \rho \omega^2 \left(\frac{\omega^2 \rho}{E \kappa G} - \frac{A}{EI} \right)}} \quad (15)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa G} + \frac{1}{E} \right) \rho \omega^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa G} + \frac{1}{E} \right)^2 \rho^2 \omega^4 - 4 \rho \omega^2 \left(\frac{\omega^2 \rho}{E \kappa G} - \frac{A}{EI} \right)}} > 0 \quad (16)$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\kappa G A}{\rho I}} \quad (17)$$

ω_c gọi là tần số cắt (cutoff frequency), đây là giá trị toán học, thực tế kỹ thuật rất khó hoặc không thể có tần số riêng nào của dầm đúng bằng giá trị này. Do đó các tính toán sau này sẽ không xét đến trường hợp tần số dao động riêng bằng tần số này.

Như vậy nhờ mối quan hệ giữa các phương trình dao động mà hàm dạng riêng của chuyển vị uốn và hàm dạng riêng góc xoay có liên hệ với nhau.

- Trường hợp $\omega > \omega_c$. Ta có hàm dạng riêng của dao động uốn và góc xoay:

$$W(x) = b_1 \sin \eta x + b_2 \cos \eta x + b_3 \sin \xi x + b_4 \cos \xi x \quad (18)$$

$$\Phi(x) = -b_2 f_\eta \sin \eta x + b_1 f_\eta \cos \eta x - b_4 f_\xi \sin \xi x + b_3 f_\xi \cos \xi x \quad (19)$$

trong đó

$$f_\eta = \left(\eta - \frac{\omega^2 \rho}{\kappa G \eta} \right) \quad (20)$$

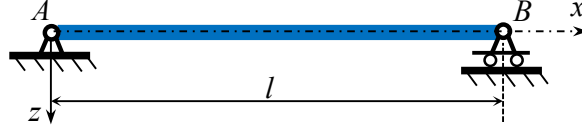
Với các điều kiện biên khác nhau, các dầm sẽ có dạng dao động riêng cụ thể khác nhau và nhờ các dạng riêng ta có thể xác định tần số dao động riêng tương ứng.

3.2. Xác định các tần số dao động riêng và dạng dao động riêng tương ứng

Để tính toán dao động cưỡng bức của dầm Timoshenko, cần phải biết tần số dao động riêng của nó, để xác định tần số dao động riêng này bài báo này tham khảo một số tài liệu [5–7, 19].

Điều kiện biên của dầm hai đầu gối tựa như Hình 3. Tại $x = 0$ và $x = l$ đều có độ võng bằng 0, mômen bằng 0, thay (10) và (11) vào các điều kiện biên trên ta được:

$$W(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad W(l) = 0, \quad \Phi'(l) = 0 \quad (21)$$



Hình 3. Dầm một đầu ngàm hai đầu gối tựa

- Xét trường hợp $\omega < \omega_c$:

+ Tần số riêng: Thay các phương trình (12), (13) vào (21) ta thu được phương trình đặc trưng xác định tần số riêng:

$$(\xi f_\xi + \beta h_\beta) \sin \xi l \sinh \beta l = 0 \quad (22)$$

Sử dụng phương pháp số giải phương trình (22) với ω_j là giá trị cần xác định ta sẽ tìm được các tần số riêng:

$$\omega_j \text{ với } j = 1, 2, \dots, N_L \text{ sao cho } \omega_j < \omega_c$$

Ngoài ra, từ công thức (14) đến (17) và chú ý đến $\omega < \omega_c$ ta suy ra được:

$$\xi f_\xi + \beta h_\beta > 0 \quad (23)$$

và do $\beta > 0$ nên $\sinh \beta l > 0$. Do đó phương trình đặc trưng (22) cũng suy ra:

$$\sin \xi l = 0 \Rightarrow \xi_j = \frac{j\pi}{l}, j = 1, 2, \dots \quad (24)$$

+ Dạng dao động riêng: Ứng với tần số riêng trên thu được các dạng dao động riêng thứ j ứng với tần số riêng thứ j :

$$W_j(x) = a_3 \sin \frac{j\pi}{l} x \quad (25)$$

$$\Phi_j(x) = a_3 f_\xi^{(j)} \cos \frac{j\pi}{l} x \quad (26)$$

trong đó, theo công thức (14) và (24) thì

$$f_\xi^{(j)} = \left(\frac{j\pi}{l} - \frac{\omega_j^2 \rho l}{\kappa G j \pi} \right) \quad (27)$$

- Xét trường hợp $\omega > \omega_c$:

+ Tần số riêng: phương trình đặc trưng xác định tần số riêng

$$(\xi f_\xi - \eta f_\eta) \sin \eta l \sin \xi l = 0 \quad (28)$$

Sử dụng phương pháp số giải phương trình đặc trưng với ω_i là giá trị cần xác định, ta sẽ tìm được các tần số riêng ω_i sao cho $\omega_i > \omega_c$.

+ Dạng dao động riêng: Tương tự ta thu được dạng dao động riêng:

$$W_i(x) = b_3 \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad \Phi_i(x) = b_3 f_\xi^{(i)} \cos \frac{i\pi}{l} x \quad (29)$$

Như vậy hàm dạng riêng của dao động uốn và dao động góc xoay không độc lập mà có liên hệ với nhau. Ứng với mỗi bậc dao động sẽ có một tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng. Trong

Bảng 1. Thông số của dầm thép

Kí hiệu	Giá trị	Kí hiệu	Giá trị
l	7,62 m	G	$8,18 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
ρ	7860 kg/m^3	κ	$5/6$
A	$5,9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	α	10^{-4} s
E	$2,14 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	β	$0,01 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-1}$
I	$4,58 \times 10^{-5} \text{ Nm}^2$	h	0,09 m (chiều cao dầm)

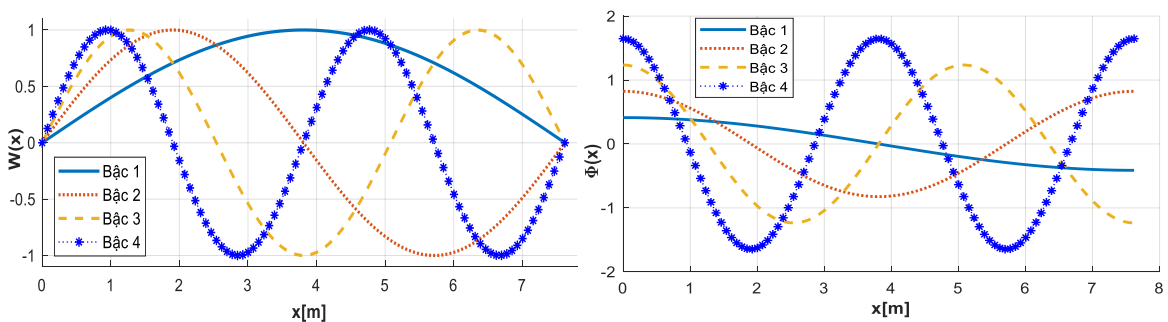
hai trường hợp là tần số riêng dưới tần số cắt và tần số riêng trên tần số cắt thì hàm dạng dao động là giống nhau.

- Thí dụ tính toán: Để tính toán ta sử dụng các thông số như Bảng 1 [19].

Từ thông số Bảng 1 ta có tần số cắt $\omega_C = 33424,73 \text{ rad/s}$ (5319,7 Hz). Trên Bảng 2 là kết quả tính toán tần số riêng của dầm Timoshenko, theo đó số tần số dưới tần số cắt là 31 bậc. Kết quả tính toán cũng được so sánh với dầm Euler – Bernoulli [5] cho thấy sự sai lệch tần số giữa hai lý thuyết dầm do ảnh hưởng của quán tính và biến dạng cắt gây ra trong lý thuyết dầm Timoshenko, sự sai lệch này tăng nhanh khi bậc dao động tăng lên, kết quả là tương tự với các nghiên cứu trước [17, 19, 20]. Trên Hình 4 là các dạng dao động riêng ứng với các bậc dao động từ 1 đến 4, ta thấy các dạng riêng của dao động có hình dạng là phù hợp với điều kiện biên của dầm.

Bảng 2. Tần số riêng (Hz) của dầm Timoshenko hai đầu gối tựa

Bậc	Dầm Timoshenko	Dầm Euler–Bernoulli	Sai lệch (%)	Bậc	Dầm Timoshenko	Dầm Euler–Bernoulli	Sai lệch (%)
1	12,403	12,436	0,26	8	689,471	795,961	13,37
2	49,214	49,747	1,07	9	846,246	1007,389	15,99
3	109,300	111,932	2,35	10	1012,106	1243,690	18,62
4	190,940	198,990	4,04	15	1932,414	2798,303	30,94
5	292,035	310,922	6,07	31	5193,707	-	-
6	410,315	447,728	8,35	32	5399,756	-	-
7	543,510	609,408	10,81	50	9071,964	-	-



Hình 4. Các dạng dao động riêng của độ võng $W(x)$ và góc xoay $\Phi(x)$ của dầm

4. Dao động cưỡng bức của dầm chịu tải trọng di động

Xét dầm chịu tải trọng di động như Hình 5.

4.1. Dao động cưỡng bức

Trong lý thuyết dầm Timoshenko, ta thiết lập được 2 phương trình vi phân dao động là các phương trình đạo hàm riêng (6), (7) ứng với hai ẩn số cần xác định là độ võng $w(x, t)$ và góc xoay $\phi(x, t)$.

Do hàm dạng riêng có dạng giống nhau trong cả hai trường hợp tần số riêng trên và dưới tần số cắt nên công thức nghiệm viết lại:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) q_k(t); \quad \phi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) q_k(t) \quad (30)$$

trong đó

$$W_k(x) = C_k \sin \frac{\pi k}{l} x; \quad \Phi_k(x) = C_k f_{\xi}^{(k)} \cos \frac{\pi k}{l} x; \quad f_{\xi}^{(k)} = \frac{k\pi}{l} - \frac{\omega_k^2 \rho l}{\kappa G k \pi} \quad (31)$$

ta chọn $C_k = 1$ (hoặc bằng -1).

Thế biểu thức (30), (31) vào phương trình dao động uốn (6), biến đổi ta được:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_k(t) + \left(\frac{\beta}{\mu} + \alpha \omega_k^2 \right) \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) \right] \sin \frac{\pi k}{l} x = \frac{1}{\mu} p(x, t) \quad (32)$$

Đây là phương trình vi phân thường cấp 2, nhưng ở dạng chuỗi với các ẩn số là $q_k(t)$. Phương trình này là chưa thể giải trực tiếp được (bằng phương pháp số cũng như phương pháp giải tích) vì số ẩn nhiều hơn và số phương trình. Nó chỉ có thể giải được khi ta chỉ sử dụng dạng dao động đầu tiên ứng với $k = 1$. Một số nghiên cứu sử dụng phương pháp số thường không diễn đạt rõ việc giải phương trình này.

Để có số phương trình bằng số ẩn, ta nhân hai vế phương trình trên với $\sin \frac{r\pi x}{l}$ rồi lấy tích phân cả hai vế theo x từ $0 \rightarrow l$, chú ý đến phép tính tích phân sau:

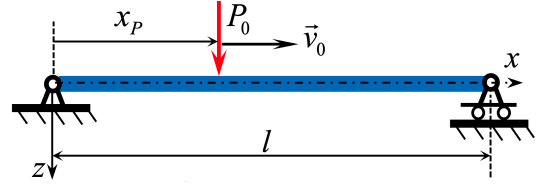
$$\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{r\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{khi } k = r \\ 0 & \text{khi } k \neq r \end{cases} \quad (33)$$

Ta được phương trình

$$\ddot{q}_r(t) + \left(\frac{\beta}{\mu} + \alpha \omega_r^2 \right) \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{2}{\mu l} \int_0^l p(x, t) \sin \frac{r\pi x}{l} dx \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (34)$$

Chọn tải trọng di động là lực P_0 chuyển động với vận tốc $v_0 = \text{const}$, tải trọng được giả sử đặt trên miền phân tố dx . Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực, khi đó hàm phân bố tải trọng có dạng:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= L(x_P) P_0 \delta(x - x_P) \\ &= L(x_P) P_0 \delta(x - v_0 t) \end{aligned} \quad (35)$$



Hình 5. Dầm chịu tải trọng di động

trong đó $L(x_p)$ là hàm tín hiệu, nó sẽ bằng 1 khi tải vẫn trên dầm và bằng 0 khi tải di chuyển qua dầm; $\delta(x - x_p)$ là hàm Delta Dirac, nó cho giá trị bằng 1 tại vị trí có tải đi qua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_p) dx = 1; \quad L(x_p) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 \leq x_p \leq l \\ 0 & \text{khi } x_p > l \end{cases} \quad (36)$$

Ta có tính chất của hàm Delta Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_p) dx = f(x_p) \quad (37)$$

Suy ra ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x_p) f(x) \delta(x - x_p) dx = H(x_p) \int_0^l f(x) \delta(x - x_p) dx = H(x_p) f(x_p) \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (38)$$

Phương trình (38) viết lại dạng

$$\ddot{q}_r + 2\delta_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = h_1 \sin(\Omega_r t) + h_2 \cos(\Omega_r t), \quad \text{với } r = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

trong đó:

$$2\delta_r = \left(\frac{\beta}{\mu} + \alpha \omega_r^2 \right); \quad h_1 = \frac{2}{\mu l} L(x_p) P_0; \quad h_2 = 0; \quad \Omega_r = \frac{r\pi v_0}{l} \quad (40)$$

Trong phương trình (39) thì q_r là ẩn với r là các bậc dao động của dầm; ω_r , δ_r và Ω_r lần lượt là tần số dao động riêng, là hệ số cản và “tần số” cưỡng bức đều bậc r của dầm.

Nghiệm của phương trình (39) bao gồm nghiệm riêng và nghiệm thuần nhất [5, 23, 24]:

+ Nghiệm riêng của phương trình (nghiệm cưỡng bức bình ổn) có dạng

$$q_r^* = M_r \sin(\Omega_r t) + N_r \cos(\Omega_r t) \quad (41)$$

trong đó M, N là các hằng số cần xác định. Thế phương trình (41) và các đạo hàm của nó vào phương trình (39), sau đó đồng nhất hai vế ta thu được:

$$M_r = \frac{(\omega_r^2 - \Omega_r^2) h_1 + 2\delta_r \Omega_r h_2}{(\omega_r^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\delta_r^2 \Omega_r^2} = \frac{(\omega_r^2 - \Omega_r^2) h_1}{(\omega_r^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\delta_r^2 \Omega_r^2} \quad (42)$$

$$N_r = \frac{-2\delta_r \Omega_r h_1 + (\omega_r^2 - \Omega_r^2) h_2}{(\omega_r^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\delta_r^2 \Omega_r^2} = \frac{-2\delta_r \Omega_r h_1}{(\omega_r^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\delta_r^2 \Omega_r^2} \quad (43)$$

+ Nghiệm thuần nhất của phương trình (phương trình có vế phải bằng 0)

$$q_r^m = e^{-\delta_r t} [C_1 \cos \omega_r t + C_2 \sin \omega_r t] \quad (44)$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số, xác định từ điều kiện đầu.

Nghiệm tổng quát của phương trình có vẻ phải là:

$$q_r = M_r \sin \Omega_r t + N_r \cos \Omega_r t + e^{-\delta_r t} [C_1 \cos \omega_r t + C_2 \sin \omega_r t] \quad (45)$$

Để xác định hệ số C_1, C_2 ta sử dụng điều kiện đầu:

Điều kiện đầu: Chọn điều kiện đầu lúc tải trọng P_0 bắt đầu đi vào dầm, khi đó chuyển vị và vận tốc chuyển vị bằng 0.

$$t_0 = 0, w(0) = 0, \dot{w}(0) = 0 \Rightarrow t_0 = 0, q_r(0) = 0, \dot{q}_r(0) = 0 \quad (46)$$

Thế biểu thức nghiệm (45) vào điều kiện đầu ta tìm được:

$$C_1 = -N_r; \quad C_2 = \frac{-\delta_r N_r - M_r \Omega_r}{\omega_r}$$

Vậy nghiệm giải tích của biên độ dao động là:

$$q_r = M_r \sin \Omega_r t + N_r \cos \Omega_r t - e^{-\delta_r t} \left(N_r \cos \omega_r t + \frac{N_r \delta_r + M_r \Omega_r}{\omega_r} \sin \omega_r t \right), (r = 1, 2, \dots) \quad (47)$$

Thế (47) vào công thức (30) ta có biểu thức giải tích nghiệm của phương trình

$$w(x, t) = q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + q_r \sin \frac{r\pi x}{l} + \dots \quad (48)$$

hay

$$w(x, t) = \left(M_1 \sin \Omega_1 t + N_1 \cos \Omega_1 t - e^{-\delta_1 t} \left(N_1 \cos \omega_1 t + \frac{N_1 \delta_1 + M_1 \Omega_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right) \sin \frac{\pi x}{l} \\ + \left(M_2 \sin \Omega_2 t + N_2 \cos \Omega_2 t - e^{-\delta_2 t} \left(N_2 \cos \omega_2 t + \frac{N_2 \delta_2 + M_2 \Omega_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \right) \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \quad (49)$$

Từ các nghiệm dao động trong phương trình (47) và (49) cho thấy: hàm biên độ dao động q_r có hai tần số là tần số dao riêng ω_r bậc r và tần số “cưỡng bức” Ω_r bậc r ; còn dao động uốn $w(x, t)$ có hai dãy tần số là dãy tần số riêng (dãy tần số cao) và dãy tần số cưỡng bức (dãy tần số thấp); các phương trình trên cũng cho thấy chỉ các dao động ở tần số cao mới phụ thuộc trực tiếp vào hệ số cản δ_r và khi hệ số cản tăng lên thì các dao động này sẽ bị dập tắt bớt đi, từ công thức xác định hệ số cản (40) ta thấy nó tỉ lệ với bình phương tần số riêng ω_r , do đó khi bậc dao động tăng lên (tần số riêng bậc r xấp xỉ bằng r^2 tần số bậc 1) thì hệ số cản tăng rất nhanh (xấp xỉ bằng r^4 lần tần số bậc 1), do đó thành phần các dao động ứng với tần số riêng bậc cao sẽ bị dập tắt nhanh chóng.

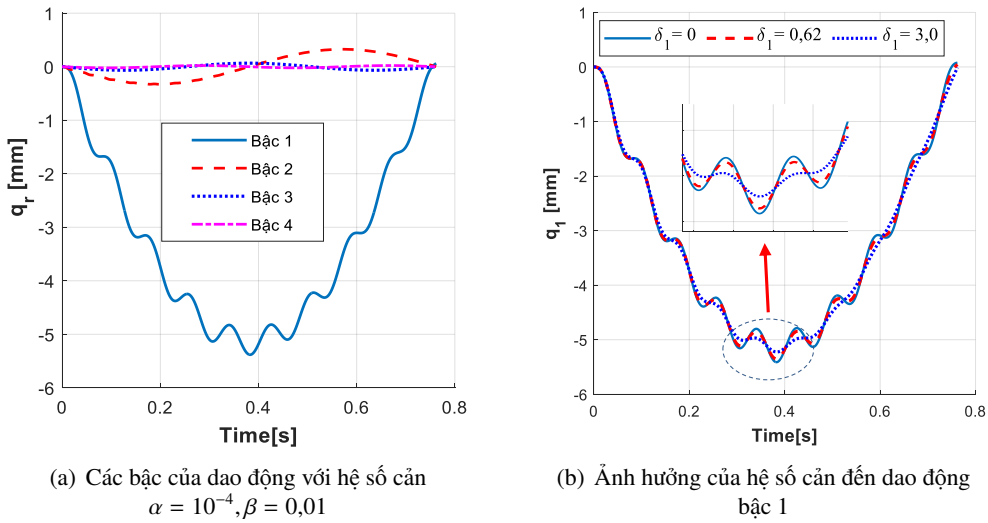
Để mô phỏng số, ta sử dụng thông số dầm như Bảng 1 với tải trọng di chuyển $P_0 = 55$ kg, tốc độ di chuyển $v_0 = 10$ m/s. Thời gian di chuyển qua dầm là

$$T = \frac{l}{v_0} = 0,762 \text{ (s)} \quad (50)$$

Trên Hình 6(a) là đồ thị của hàm biên độ dao động ứng với các bậc dao động, cho ta khẳng định lại rằng biên độ dao động tập trung chủ yếu ở tần số bậc 1, khi bậc tăng lên nó giảm rất nhanh và gần như không đáng kể. Trên hình cũng cho thấy ở dao động bậc 1 thì thành phần dao động ứng với tần

số cao thể hiện rõ ràng (các đường răng cưa), ở các dao động từ bậc 2 trở lên thành phần dao động có tần số cao là không đáng kể.

Như vậy, thành phần dao động có tần số cao chịu ảnh hưởng của hệ số cản, hơn nữa khi bậc dao động tăng lên thì thành phần dao động tần số cao sẽ bị dập tắt. Để đánh giá ảnh hưởng của hệ số cản đến dao động này ta xét các trường hợp của cản ảnh hưởng đến dao động bậc 1 trong các trường hợp như sau: trường hợp 1 là bỏ qua ảnh hưởng của cản khi đó $\alpha = \beta = 0$, với tần số bậc 1 như Bảng 2, ta xác định được hệ số cản theo (40) $\delta_1 = 0$; trường hợp 2 xét hệ số cản trong và cản ngoài như Bảng 1 là $\alpha = 10^{-4} \text{s}, \beta = 0,01 \text{ kgm}^{-1} \text{s}^{-1}$, với tần số bậc 1 như Bảng 2, ta xác định được hệ số cản $\delta_1 = 0,62$; trường hợp 3 giả sử tăng hệ số cản trong và cản ngoài tương ứng là $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{s}, \beta = 0,02 \text{ kgm}^{-1} \text{s}^{-1}$, tương tự xác định được hệ số cản $\delta_1 = 3,0$. Trong Hình 6(b) cho thấy ảnh hưởng của hệ số cản đến biên độ dao động bậc 1, ta thấy rằng dao động tần số cao giảm đáng kể từ trường hợp 1 đến trường hợp 3.

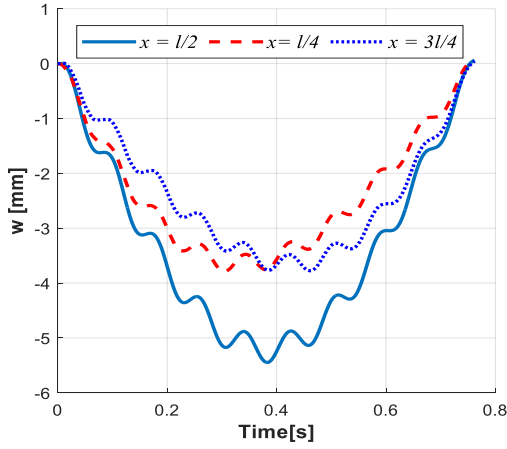


Hình 6. Hàm biên độ của dao động uốn

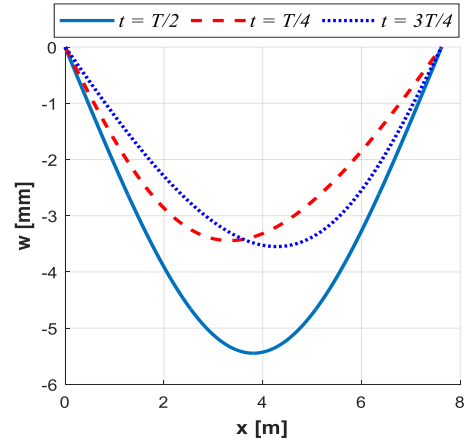
Trên Hình 7(a) là dao động uốn (theo thời gian t) của dầm tại các vị trí $x = \frac{l}{4}, x = \frac{l}{2}$ và $x = \frac{3l}{4}$ khi tải di chuyển, trong đó tính toán được lấy đến dao động bậc 3, trên hình cho thấy biên độ dao động lớn nhất tại vị trí giữa dầm. Còn trên Hình 7(b) là độ võng của toàn dầm (theo x) tại các thời điểm $t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}$ và $t = \frac{3T}{4}$ ứng với thời điểm tải trọng di chuyển đến các vị trí $x = \frac{l}{4}, x = \frac{l}{2}$ và $x = \frac{3l}{4}$. Ta thấy rằng độ võng của dầm là lớn nhất tại vị trí giữa dầm và tại thời điểm tải trọng di chuyển đến vị trí đó.

Trên Hình 8 là dao động uốn tại vị trí giữa dầm, khi vận tốc của tải trọng không đổi là $v_0 = 10 \text{ m/s}$ còn độ lớn của tải trọng thay đổi lần lượt là $P_0 = 40 \text{ kg}, P_0 = 55 \text{ kg}$ và $P_0 = 70 \text{ kg}$. Trong trường hợp này chuyển vị tăng lên khi tải trọng tăng tương ứng.

Trong Hình 9 là chuyển vị của toàn dầm tại thời điểm $t = \frac{T}{2}$ (ứng với thời điểm tải ở giữa dầm) khi vận tốc của tải trọng khác nhau còn độ lớn không đổi $P_0 = 55 \text{ kg}$. Ta thấy rằng khi vận tốc thay đổi thì độ võng thay đổi không nhiều độ lớn, như trên Hình 9 độ võng lớn nhất ứng với các vận tốc khác nhau lần lượt là 5,16 mm ở $v_0 = 5 \text{ m/s}$, 5,45 mm ở $v_0 = 10 \text{ m/s}$ và 4,92 mm ở $v_0 = 15 \text{ m/s}$. Đặc



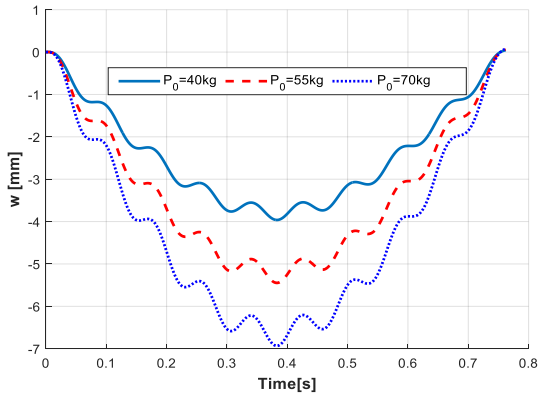
(a) Dao động tại các vị trí



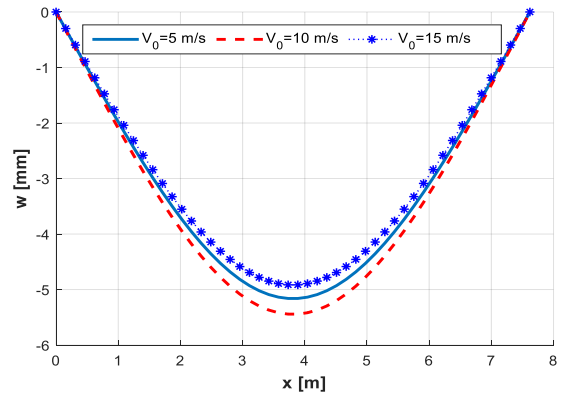
(b) Độ võng của dầm tại các thời điểm

Hình 7. Dao động uốn của dầm chịu tải di động

biệt là độ võng này sẽ có độ võng lớn nhất tại một vận tốc giới hạn v_{gh} nào đó, với vận tốc nhỏ hơn hoặc lớn hơn giá trị giới hạn đó thì đều cho độ võng khác nhau. Trong bài báo này không khảo sát giá trị chính xác v_{gh} này, tuy nhiên bằng cách thay đổi vận tốc khi vẽ đồ thị cũng có thể xác định gần đúng của nó trong ví dụ này là $v_{gh} \approx 10$ m/s.



Hình 8. Dao động uốn tại vị trí giữa dầm khi tải thay đổi



Hình 9. Chuyển vị của dầm tại thời điểm $t = T/2$ khi vận tốc thay đổi

4.2. Ứng suất động của dầm

Từ công thức (30), (31) ta có biểu thức góc xoay và biến dạng dài tỉ đối

$$\phi(x, t) = \sum f_{\xi}^{(k)} q_k(t) \cos \frac{\pi k}{l} x \quad (51)$$

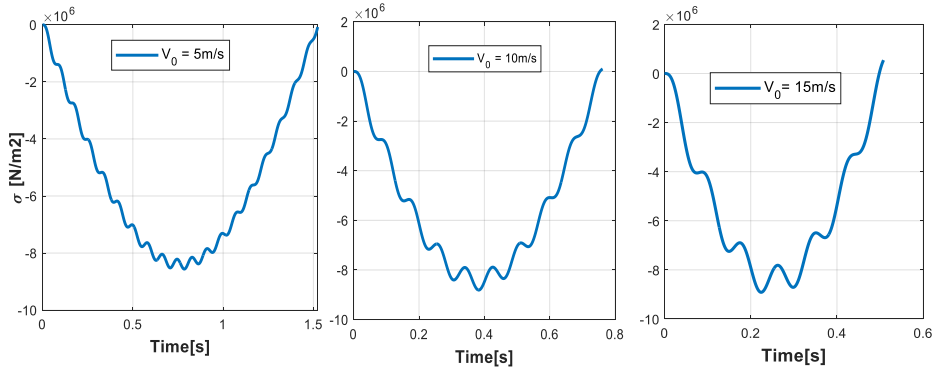
$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} = z \sum \frac{\pi k}{l} f_{\xi}^{(k)} q_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (52)$$

Do đó theo định luật Hook, ứng suất pháp lớn nhất trên biên theo công thức (5) là

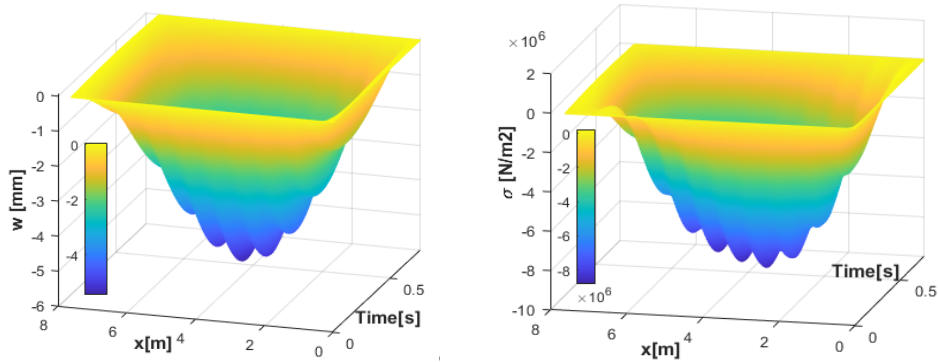
$$\sigma_{xx} = Ez_{\max} \sum \frac{\pi k}{l} f_{\xi}^{(k)} q_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \alpha Ez_{\max} \sum_{k=1}^n \frac{\pi k}{l} f_{\xi}^{(k)} \dot{q}_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (53)$$

Từ phương trình (53) cho thấy ứng suất là các hàm tuần hoàn, không chỉ phụ thuộc vào hàm biên độ dao động uốn q_r mà còn phụ thuộc vào cả vận tốc biến dạng của nó $\dot{q}_r$, đây là sự khác biệt giữa ứng suất tĩnh và ứng suất động.

Trên Hình 10 là ứng suất động ở giữa dầm tại biên dưới ($z_{\max} = h/2$) theo tốc độ di chuyển của tải trọng. Khi tốc độ di chuyển tăng, giá trị lớn nhất của ứng suất tăng lên không nhiều ($\sigma = 8,55 \text{ N/m}^2$ khi $v_0 = 5 \text{ m/s}$, $\sigma = 8,80 \text{ N/m}^2$ khi $v_0 = 10 \text{ m/s}$ và $\sigma = 8,91 \text{ N/m}^2$ khi $v_0 = 15 \text{ m/s}$), nhưng khoảng dao động (biên độ dao động) lại tăng đáng kể lần lượt là $0,46 \text{ N/m}^2$, $0,91 \text{ N/m}^2$ và $1,4 \text{ N/m}^2$, đây sẽ là nguyên nhân làm giảm đáng kể giới hạn mỏi của vật liệu. Trên Hình 11 là đồ thị dao động uốn và ứng suất theo thời gian và không gian, giá trị ứng suất này thay đổi theo cả vị trí và thời gian.



Hình 10. Ứng suất động của dầm tại vị trí biên $x = 0,5l$, $z = 0,5h$



Hình 11. Độ võng và ứng suất theo không gian x và thời gian t

5. Kết luận

Trong khuôn khổ bài báo, nghiên cứu đã đưa ra lời giải giải tích cho đáp ứng động lực học của dầm hai đầu gối tựa chịu tải trọng di động và có căn dựa trên các khai triển theo các dạng dao động riêng, từ đó tác giả đã thực hiện các khảo sát số. Kết quả khảo sát số cho thấy:

- Dao động uốn $w(x, t)$ có hai dãy tần số là dãy tần số riêng (dãy tần số cao) và dãy tần số cưỡng bức (dãy tần số thấp); chỉ các dao động ở dãy tần số cao mới phụ thuộc trực tiếp vào hệ số cản δ_r và khi hệ số cản tăng lên thì các dao động này sẽ bị dập tắt nhanh chóng;

- Ứng suất là các hàm tuần hoàn, không chỉ phụ thuộc vào biến dạng mà còn phụ thuộc vào cả vận tốc biến dạng; khi tốc độ di chuyển của tải trọng tăng lên thì giá trị lớn nhất của ứng suất tăng lên không nhiều, biên độ dao động của nó lại tăng đáng kể.

Ngoài các đánh giá về đáp ứng động lực ở trên, lời giải giải tích này cũng có thể áp dụng vào các nghiên cứu làm phong phú hơn vấn đề này: các loại tải trọng khác tác dụng lên dầm, nhiều tải trọng di động trên dầm, đánh giá ổn định động lực, đánh giá về cộng hưởng, điều khiển giảm dao động cho dầm.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Trường Đại học Xây dựng Hà Nội cho đề tài trọng điểm cấp Trường, mã số 40-2021/KH XD-TĐ.

Tài liệu tham khảo

- [1] Thọ, Đ. X. (1996). *Tính toán dao động uốn của dầm liên tục chịu tác dụng của vật thể di động*. Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.
- [2] Hà, H. (1999). *Nghiên cứu dao động uốn của kết cấu nhịp cầu dây văng trên đường ô tô chịu tác dụng của hoạt tải khai thác*. Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học giao thông vận tải, Hà Nội.
- [3] Phương, N. M. (2009). *Tính toán dao động uốn của dầm liên tục và tấm trực hướng chịu tác dụng của nhiều vật thể trung gian*. Luận văn Tiến sĩ, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.
- [4] Hương, N. T. V. (2016). *Dao động uốn của dầm có ứng suất trước dưới tác dụng của vật thể di động*. Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.
- [5] Khang, N. V. (2005). *Dao động kỹ thuật*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [6] Hùng, N. X. (2002). *Tính toán chính xác kết cấu trên máy vi tính. Chương trình ADS 2001*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
- [7] Liên, T. V., Khiêm, N. T. (2017). *Phương pháp độ cứng trong phân tích và chẩn đoán kết cấu*. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội.
- [8] Nam, N. S., Chấn, L. N., Anh, P. H. (2020). [Phân tích tần số riêng và dạng dao động riêng của dầm bê tông ứng suất trước với các điều kiện biên khác nhau](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KH CN XD) - ĐHXDHN*, 14(5V):197–210.
- [9] Long, N. V., Tú, T. M., Quốc, T. H. (2021). [Phân tích đặc trưng dao động của dầm FGM theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli bằng tiếp cận giải tích](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KH CN XD) - ĐHXDHN*, 15(3V):1–15.
- [10] Hà, L. T. (2020). Dao động của dầm cơ tính biến thiên hai chiều có lỗ rỗng vi mô chịu lực di động. *Kết cấu - Công nghệ xây dựng. Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 2.
- [11] Trung, N. V., Nghĩa, N. T., Hung, N. H. (2009). Evaluation of steel-concrete composite structure in Binh bridge based on load test and monitoring results. *Proceedings of Vibration of Cable-Stayed Bridges*, Bachkhoa Publishing House.
- [12] Nguyen, K. V., Tran, H. T. (2010). [Multi-cracks detection of a beam-like structure based on the on-vehicle vibration signal and wavelet analysis](#). *Journal of Sound and Vibration*, 329(21):4455–4465.
- [13] Hung, N. X. (1999). *Dynamics of structures and its application in structural identification*. Institute of Applied Mechanics, National Center for Natural Science and Technology.
- [14] Khiêm, N. T., Hải, T. T. (2020). *Dao động trong kỹ thuật*. Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội.
- [15] Mackertich, S. (1992). [Response of a beam to a moving mass](#). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(3):1766–1769.

- [16] Lee, H. P. (1996). [Transverse vibration of a Timoshenko beam acted on by an accelerating mass](#). *Applied Acoustics*, 47(4):319–330.
- [17] Majkut, L. (2009). Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1):193–210.
- [18] Ghannadial, A., Mofid, M. (2013). [Dynamic Green Function for Response of Timoshenko Beam with Arbitrary Boundary Conditions](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 42(1):97–110.
- [19] Roshandel, D., Mofid, M., Ghannadial, A. (2015). Modal analysis of the dynamic response of Timoshenko beam under moving mass. *Scientia Iranica*, 22(2):331–344.
- [20] Kim, T., Park, I., Lee, U. (2017). [Forced Vibration of a Timoshenko Beam Subjected to Stationary and Moving Loads Using the Modal Analysis Method](#). *Shock and Vibration*, 2017:1–26.
- [21] Li, X. Y., Zhao, X., Li, Y. H. (2014). [Green's functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect](#). *Journal of Sound and Vibration*, 333(6):1781–1795.
- [22] Chen, B., Zhao, X., Li, Y. H., Guo, Y. (2019). [Forced vibration analysis of multi-cracked Timoshenko beam with the inclusion of damping by virtue of Green's functions](#). *Applied Acoustics*, 155:477–491.
- [23] Shabana, A. A. (2019). *Theory of Vibration*. Springer International Publishing.
- [24] Khang, N. V. (2012). *Cơ học kỹ thuật*. Nhà xuất bản Giáo Dục, Hà Nội.