Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, ĐHXDHN, 2022, 16 (1V): 79–91

PHÁT TRIỂN PHƯƠNG PHÁP CHEBYSHEV-RITZ PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO DẦM CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Nguyễn Thiện Nhân[a], Nguyễn Ngọc Dương[b,*], Nguyễn Trung Kiên[b]

[a] *Khoa Kỹ thuật – Công nghệ, Trường Đại học Kiên Giang, số 320A, Quốc lộ 61, Thị trấn Minh Lương, huyện Châu Thành, tỉnh Kiên Giang, Việt Nam*
[b] *Khoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh, 01 đường Võ Văn Ngân, quận Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

Nhận ngày 22/06/2021, Sửa xong 27/07/2021, Chấp nhận đăng 16/08/2021

Tóm tắt

Bài báo này đề xuất hàm xấp xỉ Ritz mới bằng cách cải tiến đa thức "Chebyshev loại I" để phân tích dao động tự do của dầm có vật liệu cơ tính biến thiên (FGM). Trường chuyển vị dầm dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến và thỏa điều kiện biên tự do ứng suất cắt. Mô hình phân bố vật liệu dầm dựa vào quy luật hàm số mũ. Phương trình Lagrange được sử dụng để thiết lập phương trình chủ đạo của bài toán. Các hàm xấp xỉ mới được đánh giá sự hiệu quả thông qua các các tiêu chí tốc độ hội tụ và chi phí tính toán. Các ví dụ số được thực hiện để khảo sát sự ảnh hưởng của mật độ phân bố vật liệu, tỉ lệ chiều dài/chiều cao và điều kiện biên đến tần số dao động riêng của dầm.

Từ khoá: dầm FGM; phương pháp Ritz; phân tích dao động tự do; đa thức Chebyshev.

DEVELOPMENT OF CHEBYSHEV-RITZ METHOD FOR FREE VIBRATION BEHAVIOR OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL BEAMS

Abstract

This paper proposes novel Ritz's approximation functions by improving "Chebyshev Type I" for free vibration analysis of functionally graded material beams. The displacement field is based on a two-variable higher-order beam theory which satisfies the traction-free boundary conditions. The materials are supposed to vary continuously in the depth according to the power-law. Governing equations of motion are derived from Lagrange's principle. The accuracy and efficiency of present approximation functions are evaluated through the criteria of convergence rate and computational costs. Numerical examples are performed to investigate the effects of the material distribution, length-to-height's ratio, and boundary conditions to natural frequencies of the FGM beams.

Keywords: FGM beams; Ritz method; free vibration analysis; Chebyshev polynomial.

https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2022-16(1V)-07

1. Giới thiệu

Vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) là một loại vật liệu tiên tiến, có đặc trưng cơ học thay đổi liên tục theo các hướng khác nhau. Nhờ vậy, FGM sử dụng phù hợp trong các điều kiện tương tác đa trường và không xảy ra hiện tượng tách lớp khi chịu tải trọng như các vật liệu composite truyền thống. Nhờ những đặc tính ưu việt này nên FGM được áp dụng phổ biến trong các ngành công nghiệp như: tàu thủy, ô tô, xây dựng, hàng không, ... Để ứng dụng FGM vào thực tế, bên cạnh các nghiên cứu

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* duongnn@hcmute.edu.vn (Dương, N. N.)

thực nghiệm, nhiều nghiên cứu mô phỏng cũng được thực hiện để đánh giá quy luật ứng xử của vật liệu. Nhiều lý thuyết và phương pháp được phát triển để phân tích ứng xử của kết cấu FGM, trong đó, dầm FGM thu hút sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà khoa học [1].

Lý thuyết dầm có thể chia thành ba nhóm chính: lý thuyết cổ điển (LTCĐ) [2–4], lý thuyết bậc nhất (LTBN) [5] và lý thuyết bậc cao (LTBC) [6–11]. LTCĐ bỏ qua biến dạng cắt, vì vậy, chỉ áp dụng phù hợp cho các dầm mỏng. LTBN kể đến biến dạng cắt, tuy nhiên, lý thuyết này cần hệ số biến dạng cắt để điều chỉnh sự phân bố không hợp lý của ứng suất cắt tại biên trên và dưới của dầm. Để khắc phục nhược điểm này, LTBC được các nhà khoa học đề xuất. Bằng cách phát triển các hàm biến dạng cắt bậc cao, trường chuyển vị của LTBC đáp ứng các điều kiện biên ứng suất của bài toán, vì vậy, lý thuyết này không cần hệ số điều chỉnh cắt. Có thể nói, LTBC tiện dụng và phân tích ứng xử của dầm chính xác hơn LTCĐ và LTBN. Trong nghiên cứu này, LTBC hai biến [11] được áp dụng để phân tích dao động tự do của dầm.

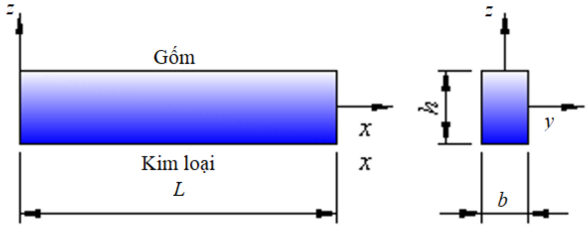
Về phương pháp giải, các phương pháp số được sử dụng khá phổ biến để phân tích dầm FGM, đặc biệt là phần tử hữu hạn [12–14]. Bên cạnh đó, các phương pháp giải tích cũng được các nhà khoa học quan tâm vì độ chính xác của lời giải. Lời giải Navier là đơn giản nhất, tuy nhiên, lời giải này chỉ áp dụng phân tích dầm có điều kiện biên tựa đơn [10, 15]. Lời giải Levy cũng được đề xuất trong các nghiên cứu của Khdeir và Reddy [16], Trịnh và cs. [17] để phân tích dao động riêng dầm composite và FGM. Lời giải Ritz được nhiều nhà khoa học quan tâm vì tính tổng quát và giải quyết được các bài toán có điều kiện biên bất kỳ. Tính hiệu quả của phương pháp Ritz phụ thuộc vào các hàm xấp xỉ được chọn trước. Trong thời gian gần đây, nhiều nghiên cứu được thực hiện để phát triển các hàm xấp xỉ. Nguyễn và cs. [7], Simsek [18] đã đề xuất các hàm đa thức để phân tích dao động và ổn định dầm FGM. Các hàm đa thức thuần túy thường không thỏa các điều kiện biên động học của bài toán nên phương pháp nhân tử Lagrange hoặc hàm phạt được sử dụng để khử điều kiện biên. Hướng tiếp cận này làm tăng chi phí tính toán của lời giải vì tăng kích thước của các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng. Để khắc phục nhược điểm này, Pradhan và Chakraverty [19], Aydogdu [20, 21] đã đề xuất các hàm đa thức trực giao để phân tích dao động riêng của dầm. Tuy vậy, các hàm trực giao hiếm khi được sử dụng để phân tích tĩnh bài toán dầm. Gần đây, Nguyễn và cs. [11, 22, 23], Mantari và Canales [24], Khalili và cs. [25] đã đề xuất các hàm dạng hỗn hợp giữa hàm đa thức và lượng giác hoặc mũ để phân tích ứng xử của dầm. Ebrahimi và cs. [26] đề xuất các hàm "Chebyshev loại I" kết hợp đa thức khử điều kiện biên để phân tích tĩnh và dao động các dầm FGM có kích thước vi mô. Có thể thấy rằng, phương pháp Ritz khá hiệu quả trong việc phân tích ứng xử dầm FGM. Mặc dù vậy, tác giả nhận thấy chưa có nhiều nghiên cứu đánh giá và so sánh các hàm dạng xấp xỉ của lời giải Ritz. Vì vậy, vấn đề này cần có những nghiên cứu sâu hơn.

Mục tiêu của bài báo này là (1) đề xuất một hàm xấp xỉ mới dựa trên việc cải tiến đa thức "Chebyshev loại I" và (2) đánh giá sự hiệu quả các hàm xấp xỉ này thông qua việc phân tích dao động tự do của dầm FGM. Mô hình dầm được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến. Phương trình chủ đạo được thành lập từ nguyên lý Lagrange. Tần số riêng của dầm FGM được so sánh với các kết quả nghiên cứu đã công bố để đánh giá sự hiệu quả của lời giải. Ảnh hưởng của sự phân bố mật độ vật liệu, tỷ lệ chiều dài/chiều cao, điều kiện biên đến tần số dao động riêng của dầm FGM được khảo sát và phân tích chi tiết.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Quan hệ ứng suất và biến dạng

Xét dầm FGM có tiết diện $(b \times h)$, chiều dài L, thể tích V, được tạo thành từ kim loại và gốm như Hình 1. Sự phân bố của các thành phần kim loại và gốm theo quy luật [10]:



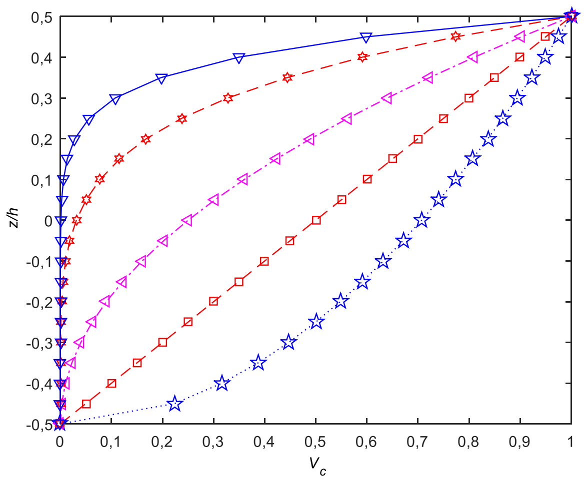
Hình 1. Sơ đồ hình học của dầm FGM

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)\,V_c \tag{1a}$$

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \tag{1b}$$

$$V_m + V_c = 1 \tag{1c}$$

trong đó P_c, P_m đại diện cho module đàn hồi E, hệ số Poisson ν và khối lượng riêng ρ của gốm, kim loại; V_c, V_m lần lượt là tỉ lệ thể tích của thành phần gốm và kim loại trong vật liệu FGM; p là số tự nhiên: khi $p = 0 \rightarrow P(z) = P_c$, dầm hoàn toàn bằng gốm; khi $p = \infty \rightarrow P(z) = P_m$, dầm hoàn toàn bằng kim loại. Sự phân bố V_c theo chiều cao dầm tương ứng với các giá trị p khác nhau được thể hiện ở Hình 2.



Hình 2. Sự phân bố tỉ lệ thể tích V_c dọc chiều cao tiết diện dầm

Phương trình ứng xử của dầm FGM được xác định bởi biểu thức sau [10]:

$$\sigma_x = Q_{11}\varepsilon_x; \quad \sigma_{xz} = Q_{55}\gamma_{xz} \tag{2}$$

trong đó:

$$Q_{11}(z) = E(z); \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} \tag{3}$$

2.2. Trường chuyển vị

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến [11]:

$$u(x,z,t) = \left(\frac{A_2}{A_1} - z\right) w_{b,x}(x,t) + \left(g(z) - \frac{A_3}{A_1}\right) w_{s,x}(x,t) \tag{4a}$$

$$w(x,z,t) = w_b(x,t) + w_s(x,t) \tag{4b}$$

trong đó: $g(z) = \frac{z}{4} - \left(\frac{5z^3}{3h^2}\right)$ là hàm biến dạng cắt bậc cao; $w_b(x)$ và $w_s(x)$ lần lượt là chuyển vị ngang tại điểm trên trục trung hòa do thành phần biến dạng uốn và cắt gây ra; Các hệ số A_1, A_2 và A_3 được xác định theo biểu thức:

$$(A_1; A_2; A_3) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z)(1; z; g) b dz \tag{5}$$

Trường biến dạng của dầm có dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{A_2}{A_1} - z\right) w_{b,xx} + \left(g - \frac{A_3}{A_1}\right) w_{s,xx} \tag{6}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = (1 + g_{,z}) w_{s,x} \tag{7}$$

2.3. Các biểu thức năng lượng

Năng lượng biến dạng của hệ:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_x + \sigma_{xz}\gamma_{xz})\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \left(B_1 w_{b,xx}^2 + 2B_2 w_{b,xx} w_{s,xx} + B_3 w_{s,xx}^2 + D w_{s,x}^2\right) dx \tag{8}$$

trong đó:

$$(B_1; B_2; B_3) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) \left[\left(\frac{A_2}{A_1} - z\right)^2; \left(\frac{A_2}{A_1} - z\right)\left(g - \frac{A_3}{A_1}\right); \left(g - \frac{A_3}{A_1}\right)^2\right] b dz \tag{9}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} Q_{55}(z)(1 + g_{,z})^2 b dz \tag{10}$$

Động năng của hệ:

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left(J_1 \dot{w}_{b,x}^2 + 2J_2 \dot{w}_{b,x}\dot{w}_{s,x} + J_3 \dot{w}_{s,x}^2 + J_4 \dot{w}_b^2 + 2J_4 \dot{w}_b \dot{w}_s + J_4 \dot{w}_s^2\right) dx \tag{11}$$

trong đó:

$$(J_1; J_2; J_3; J_4) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(\left(\frac{A_2}{A_1} - z\right)^2; \left(\frac{A_2}{A_1} - z\right)\left(g - \frac{A_3}{A_1}\right); \left(g - \frac{A_3}{A_1}\right)^2; 1\right) b dz \tag{12}$$

Tổng năng lượng của hệ:

$$\begin{aligned}\Pi = U - K = \frac{1}{2}\int_0^L \left(B_1 w_{b,xx}^2 + 2B_2 w_{b,xx} w_{s,xx} + B_3 w_{s,xx}^2 + D w_{s,x}^2\right) dx \\ - \frac{1}{2}\int_0^L \left(J_1 \dot{w}_{b,x}^2 + 2J_2 \dot{w}_{b,x}\dot{w}_{s,x} + J_3 \dot{w}_{s,x}^2 + J_4 \dot{w}_b^2 + 2J_4 \dot{w}_b \dot{w}_s + J_4 \dot{w}_s^2\right) dx\end{aligned} \tag{13}$$

2.4. Phương pháp Chebyshev-Ritz

Theo các nghiên cứu [23, 24], trường chuyển vị được xấp xỉ theo phương pháp Ritz như sau:

$$w_b(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j^*(x) w_{bj} e^{i\omega t} \tag{14a}$$

$$w_s(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \phi_j^*(x) w_{sj} e^{i\omega t} \tag{14b}$$

trong đó: i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$; w_{bj}, w_{sj} là các thông số cần xác định; ω là tần số dao động riêng của dầm; $\phi_j^*(x)$ là hàm xấp xỉ được chọn trước và thỏa mãn điều kiện biên của dầm tựa đơn-tựa đơn (SS), ngàm-tựa đơn (CF) và ngàm-ngàm (CC) cho ở Bảng 1.

Bảng 1. Các điều kiện biên (ĐKB) động học của dầm

ĐKB	$x = 0$	$x = L$
SS	$w_s = w_b = 0$	$w_s = w_b = 0$
CF	$w_s = w_b = 0$ $w_{s,x} = w_{b,x} = 0$	-
CC	$w_s = w_b = 0$ $w_{s,x} = w_{b,x} = 0$	$w_s = w_b = 0$ $w_{s,x} = w_{b,x} = 0$

Trong nghiên cứu này, các hàm xấp xỉ $\phi_j^*(x)$ được phát triển từ đa thức "Chebyshev loại I" như sau:

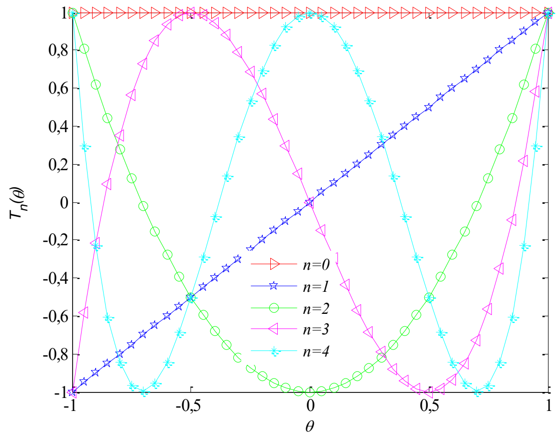
$$\begin{cases} T_0(\theta) = 1, T_1(\theta) = \theta \\ T_{n+1}(\theta) = 2\theta T_n(\theta) - T_{n-1}(\theta) \end{cases} \tag{15}$$

trong đó: $T_n(\theta) \in [-1; 1], \theta \in [-1; 1], n \in N$ và đồ thị của 5 hàm "Chebyshev loại I" đầu tiên được thể hiện ở Hình 3.

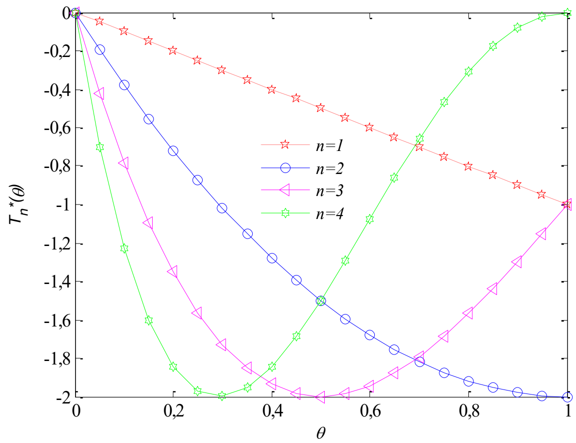
Có thể thấy rằng, các đa thức "Chebyshev loại I" không thỏa mãn các điều kiện biên của bài toán. Vì vậy, tác giả đề xuất hàm "Chebyshev cải tiến" được định nghĩa:

$$T_n^*(\theta) = T_n(1-\theta) - 1; \quad \theta \in [0; 1] \tag{16}$$

Dựa vào đồ thị Hình 4 có thể thấy rằng đa thức $T_n^*(\theta)$ luôn có nghiệm $\theta = 0; \forall n \geq 1$. Từ đó, các hàm xấp xỉ $\phi_j^*(x)$ với các điều kiện biên SS, CF và CC được đề xuất trong Bảng 2. Có thể nhận thấy rằng các hàm xấp xỉ ở Bảng 2 thỏa các điều kiện biên động học của dầm SS, CF và CC được cho trong Bảng 1.



Hình 3. Đồ thị đa thức Chebyshev ứng với bậc n và $\theta \in [-1; 1]$



Hình 4. Đồ thị đa thức Chebyshev cải tiến ứng với bậc n và $\theta \in [0; 1]$

Bảng 2. Hàm xấp xỉ ứng với các điều kiện biên khác nhau

Điều kiện biên	$\phi_j^*(x)$
SS	$T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)T_j^*\left(\frac{x}{L}-1\right)$
CF	$\left[T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2$
CC	$\left[T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2\left[T_j^*\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]^2$

Thay phương trình (14a) và (14b) vào phương trình (13) và sử dụng nguyên lý Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{p}_j} = 0 \tag{17}$$

trong đó: p_j tương ứng với các biến số w_{sj}, w_{bj}. Phương trình chủ đạo của bài toán dao động tự do dầm FGM được rút ra từ phương trình (17) có dạng như sau:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ {}^T\mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}_t^{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{M}^{12} \\ {}^T\mathbf{M}^{12} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_{bj} \\ \mathbf{w}_{sj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{18}$$

trong đó: $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ lần lượt là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của dầm, với các hệ số như sau:

$$K_{ij}^{11} = B_1 I_{ij}^1; \quad K_{ij}^{12} = B_2 I_{ij}^2; \quad K_{ij}^{22} = B_3 I_{ij}^1 + D I_{ij}^2 \tag{19}$$

$$M_{ij}^{11} = J_1 I_{ij}^2 + J_4 I_{ij}^3; \quad M_{ij}^{12} = J_2 I_{ij}^2 + J_4 I_{ij}^3; \quad M_{ij}^{22} = J_3 I_{ij}^2 + J_4 I_{ij}^3 \tag{20}$$

$$I_{ij}^1 = \int_0^L \phi_{i,xx}^* \phi_{j,xx}^* dx; \quad I_{ij}^2 = \int_0^L \phi_{i,x}^* \phi_{j,x}^* dx; \quad I_{ij}^3 = \int_0^L \phi_i^* \phi_j^* dx \tag{21}$$

Để giải phương trình (18), phần mềm Matlab R2014a (8.3.0.532), 64bit được sử dụng để lập trình tính toán các ma trận **K**, **M** và chạy trên máy tính có cấu hình Intel® Core™ 2 Duo, CPU T7300 @2.00 GHz, Ram 2.00 GHz.

3. Kết quả số

Trong phần này, các ví dụ số được thực hiện để đánh giá độ chính xác và sự hiệu quả của lời giải. Để thuận tiện cho việc khảo sát và so sánh với các kết quả đã công bố, tần số dao động riêng không thứ nguyên được định nghĩa: $\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$. Các đặc trưng cơ học của vật liệu: gốm $E_c = 380$ GPa, $\nu_c = 0{,}3$ và $\rho_c = 3960$ kg/m^3 và kim loại $E_m = 70$ GPa, $\nu_m = 0{,}3$ và $\rho_m = 2702$ kg/m^3.

3.1. Đánh giá sự hiệu quả của lời giải

Để đánh giá sự hiệu quả của một lời giải, các tiêu chí như độ chính xác, tốc độ hội tụ, chi phí tính toán, sự ổn định số, ... sẽ được xem xét [27]. Trong nghiên cứu này, tác giả sẽ đánh giá hàm xấp xỉ qua hai yếu tố cơ bản là tốc độ hội tụ và chi phí tính toán.

Tốc độ hội tụ của lời giải theo số bước lặp j được định nghĩa như sau:

$$\Delta\omega_j = \frac{\left|\omega_j - \omega_{j-1}\right|}{\omega_{j-1}} \tag{22}$$

trong đó: ω_{j-1} và ω_j lần lượt là kết quả tần số riêng ở bước thứ $j-1$ và j. Kết quả được xem là hội tụ khi $\Delta\omega_j \to 0$. Trong nghiên cứu này, chọn $\Delta\omega_j \leq \left[\Delta\omega_j\right] = 10^{-5}$. Với định nghĩa này, một hàm xấp xỉ được xem là hội tụ tốt hơn một hàm số khác khi đạt $\left[\Delta\omega_j\right]$ ứng với số bước lặp j bé hơn.

Thời gian tính toán được định nghĩa là tổng thời gian tính các ma trận **K**, **M** và tần số dao động riêng của dầm, được thể hiện qua công thức sau:

$$S = \sum_{j=1}^{N} S_j \tag{23}$$

trong đó: S_j là thời gian thực hiện tính toán tại bước thứ $j; S$ là tổng thời gian từ khi bắt đầu đến bước j.

Trong nghiên cứu này, hàm xấp xỉ đề xuất "Chebyshev cải tiến" (CBS) được so sánh với các hàm "Chebyshev loại I" (CBSI) [26], hàm số mũ cơ số Napier (HBR) [11] và hàm xấp xỉ dạng đa thức (POL) [21] (Bảng 3).

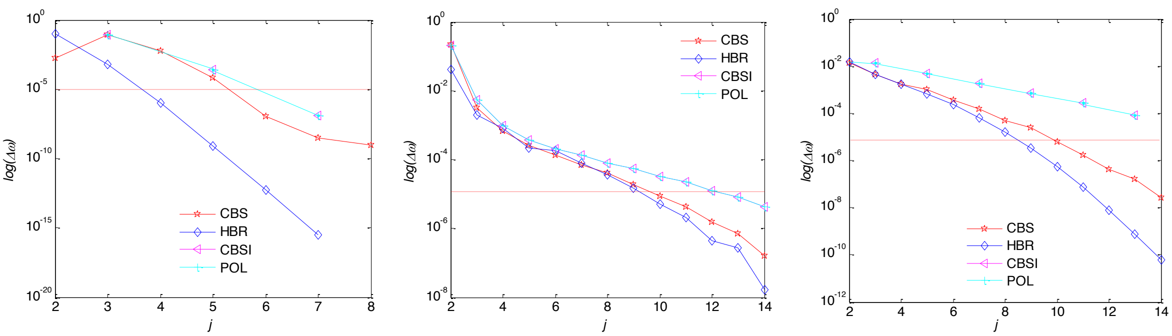
Bảng 3. Các hàm xấp xỉ khác nhau

Ký hiệu	Nghiên cứu	Điều kiện biên (ĐKB) của dầm		
		SS	CF	CC
CBS	Bài báo	$T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)T_j^*\left(\frac{x}{L}-1\right)$	$\left[T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2$	$\left[T_j^*\left(\frac{x}{L}\right)\right]^2\left[T_j^*\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]^2$
HBR	Nghiên cứu [11]	$\left(e^{-\frac{jx}{L}}-1\right)\left(e^{\frac{jx}{L}}-e^j\right)$	$\left(e^{-\frac{jx}{L}}-1\right)^2$	$\left(e^{-\frac{jx}{L}}-1\right)^2\left(e^{\frac{jx}{L}}-e^j\right)^2$
CBSI	Nghiên cứu [26]	$T(x)\left(1-\frac{2x}{L}\right)\left(1+\frac{2x}{L}\right)$	$T(x)\left(1-\frac{2x}{L}\right)^2$	$T(x)\left(1-\frac{2x}{L}\right)^2\left(1+\frac{2x}{L}\right)^2$
POL	Nghiên cứu [21]	$\left(\frac{x}{L}\right)^n\left(1-\frac{x}{L}\right)$	$\left(\frac{x}{L}\right)^{n+1}$	$\left(\frac{x}{L}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2$

Tần số dao động riêng của dầm FGM ($p = 1; L/h = 5$)với các hàm xấp xỉ và điều kiện biên khác nhau được cho ở Bảng 4, và đồ thị thể hiện mối tương quan giữa chỉ số j và $\Delta\omega$ thể hiện ở Hình 5. Có thể thấy rằng, hàm HBR có tốc độ hội tụ tốt nhất ở cả ba điều kiện biên SS, CF và CC. Hàm CBS hội tụ khi $j = 5$ với dầm SS, $j = 10$ với dầm CF và CC. Hàm CBSI và POL hội tụ khi $j = 6$ với dầm SS, $j = 12$ với dầm CF và chưa hội tụ khi $j = 14$ với dầm CC.

Bảng 4. Kết quả khảo sát tần số dầm FGM

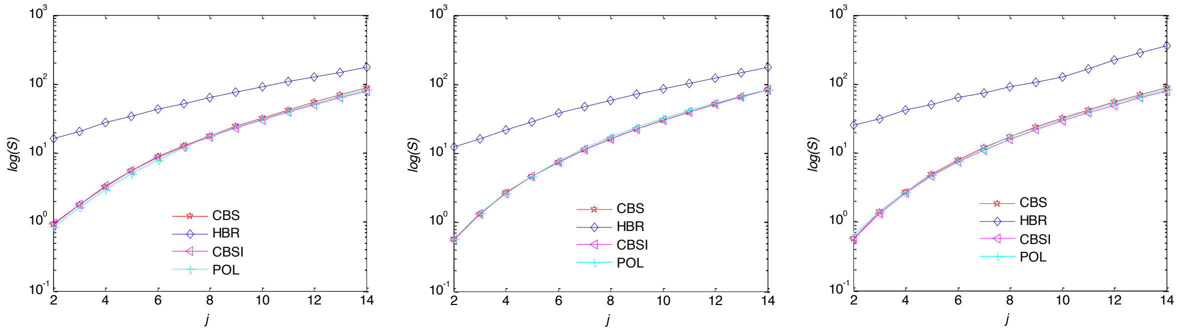
ĐKB	Nghiên cứu	Chỉ số j					
		2	4	6	8	10	12
SS	CBS	4,3851	3,9908	3,9905	3,9905	3,9905	3,9905
	HBR	3,9930	3,9905	3,9905	3,9905	3,9905	3,9905
	CBSI	4,3930	3,9916	3,9905	3,9905	3,9905	3,9905
	POL	4,3930	3,9916	3,9905	3,9905	3,9905	3,9905
CF	CBS	1,4697	1,4641	1,4635	1,4633	1,4633	1,4633
	HBR	1,4682	1,4641	1,4635	1,4633	1,4633	1,4633
	CBSI	1,4741	1,4647	1,4638	1,4635	1,4634	1,4633
	POL	1,4741	1,4647	1,4638	1,4635	1,4634	1,4633
CC	CBS	8,0115	7,9609	7,9500	7,9484	7,9481	7,9481
	HBR	8,0065	7,9559	7,9488	7,9481	7,9481	7,9481
	CBSI	8,1219	8,0095	7,9720	7,9571	7,9512	7,9490
	POL	8,1219	8,0095	7,9720	7,9571	7,9512	7,9490



(a) Dầm SS (b) Dầm CF (c) Dầm CC

Hình 5. Tốc độ hội tụ của hàm xấp xỉ

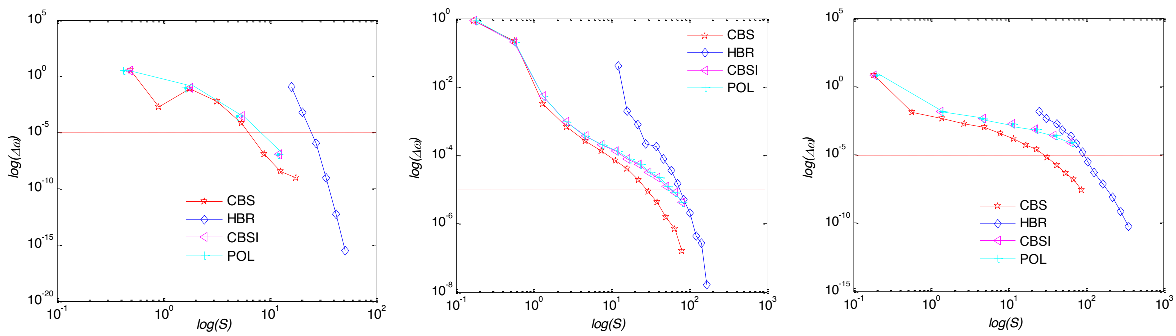
Thời gian tính toán S theo chỉ số j của các hàm số được biểu diễn trong Hình 6 cho các dầm có điều kiện biên SS, CF và CC. Có thể nhận thấy, các hàm CBS, CBSI và POL có thời gian tính toán xấp xỉ nhau và hàm HBR có thời gian tính toán lớn nhất ở cả ba điều kiện biên. Điều này được giải thích, các hàm CBS, CBSI và POL đều có dạng đa thức vì vậy thời gian tính các tích phân trong các ma trận của bài toán là như nhau, trong khi đó, HBR có dạng hàm mũ nên việc tính các tích phân sẽ mất nhiều thời gian hơn hàm đa thức.



(a) Dầm SS (b) Dầm CF (c) Dầm CC

Hình 6. Thời gian tính toán của hàm xấp xỉ

Để thấy rõ hơn hiệu quả của các hàm xấp xỉ, mối quan hệ giữa tốc độ hội tụ và thời gian tính toán được thể hiện ở Hình 7. Có thể thấy rằng, với độ chính xác $\Delta\omega_j \leq \left[\Delta\omega_j\right] = 10^{-5}$, hàm HBR có thời gian tính toán lớn nhất ở tất cả các điều kiện biên. Các hàm CBSI, POL có thời gian tính toán xấp xỉ nhau và hàm CBS có thời gian tính toán nhỏ nhất.



(a) Dầm SS (b) Dầm CF (c) Dầm CC

Hình 7. Mối quan hệ giữa thời gian và tốc độ hội tụ của các hàm xấp xỉ

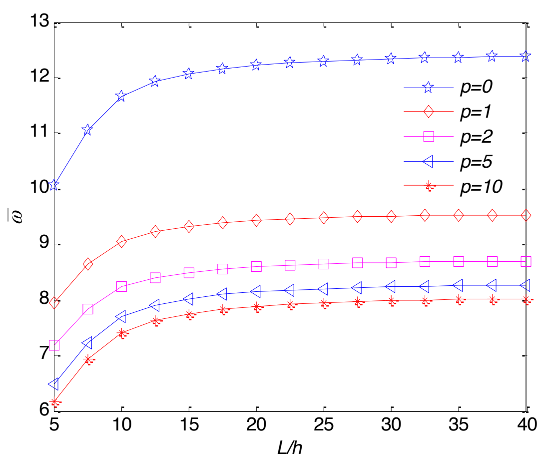
Từ các Hình 5, 6 và 7, có thể tổng kết rằng: (1) Hàm mũ (HBR) có tốc độ hội tụ nhanh nhưng tốn nhiều chi phí tính toán nhất; (2) Các hàm "Chebyshev loại I" (CBSI), đa thức trực giao (POL) và "Chebyshev cải tiến" (CBS) có thời gian tính toán qua các bước lặp là xấp xỉ nhau nhưng tốc độ hội tụ của hàm CBS nhanh hơn các hàm CBSI và POL. Vì vậy, có thể kết luận rằng, hàm CBS đề xuất trong nghiên cứu này có chi phí tính toán thấp hơn các hàm HBR, CBSI và POL.

3.2. Tần số dao động tự do dầm FGM

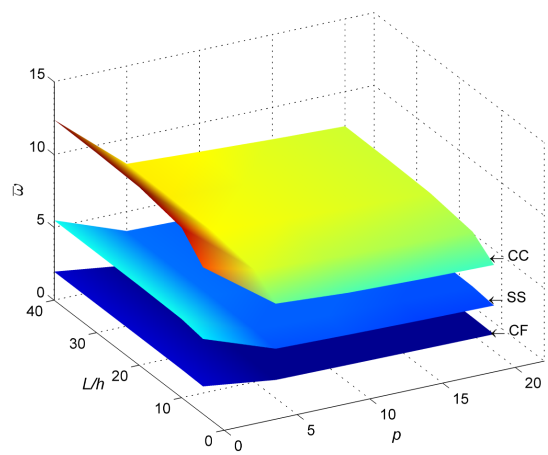
Trong phần này, tần số dao động tự do của dầm FGM được khảo sát và so sánh với các kết quả đã công bố. Bảng 5 thể hiện tần số dao động riêng của dầm FGM với các điều kiện biên, tỷ số L/h và p khác nhau. Từ Bảng 5, có thể thấy rằng, kết quả của bài báo rất gần với kết quả trong các nghiên cứu [7, 9, 10]. Kết quả ở Bảng 5 cũng cho thấy, tần số dao động giảm khi p tăng, điều này là bởi vì, khi p tăng sẽ làm cho mật độ kim loại trong dầm tăng lên và dẫn đến độ cứng của dầm giảm. Với các dầm có cùng tỷ số L/h và p, tần số riêng của dầm CC lớn nhất và dầm CF bé nhất, điều này hoàn toàn hợp lý bởi vì các dầm CC có độ cứng lớn nhất và dầm CF có độ cứng bé nhất.

Bảng 5. Tần số dao động riêng của dầm FGM với các điều kiện biên, tỉ lệ L/h và p khác nhau

L/h	BC	Nghiên cứu	p = 0	0,5	1	2	5	10
5	SS	Bài báo	5,1527	4,4107	3,9905	3,6266	3,4014	3,2818
		[7]	5,1528	4,4102	3,9904	3,6264	3,4009	3,2815
		[10]	5,1527	4,4107	3,9904	3,6264	3,4012	3,2816
	CF	Bài báo	1,8952	1,6180	1,4633	1,3326	1,2592	1,2184
		[7]	1,8957	1,6182	1,4636	1,3328	1,2594	1,2187
		[10]	1,8952	1,6182	1,4633	1,3325	1,2592	1,2183
	CC	Bài báo	10,0670	8,7431	7,9481	7,1752	6,4923	6,1638
		[7]	10,0726	8,7463	7,9518	7,1776	6,4929	6,1658
		[9]	10,0699	8,7463	7,9499	7,1766	6,4940	6,1652
20	SS	Bài báo	5,4603	4,6511	4,2051	3,8361	3,6485	3,5390
		[7]	5,4603	4,6506	4,2051	3,8361	3,6485	3,5390
		[10]	5,4603	4,6511	4,2051	3,8361	3,6485	3,5390
	CF	Bài báo	1,9496	1,6603	1,5010	1,3696	1,3033	1,2645
		[7]	1,9496	1,6602	1,5011	1,3696	1,3034	1,2646
		[10]	1,9496	1,6605	1,5011	1,3696	1,3033	1,2645
	CC	Bài báo	12,2224	10,4267	9,4307	8,5967	8,1435	7,8845
		[7]	12,2243	10,4269	9,4319	8,5977	8,1446	7,8860
		[9]	12,2238	10,4287	9,4316	8,5975	8,1448	7,8859



Hình 8. Ảnh hưởng của tỉ số L/h đến tần số dao động riêng của dầm CC

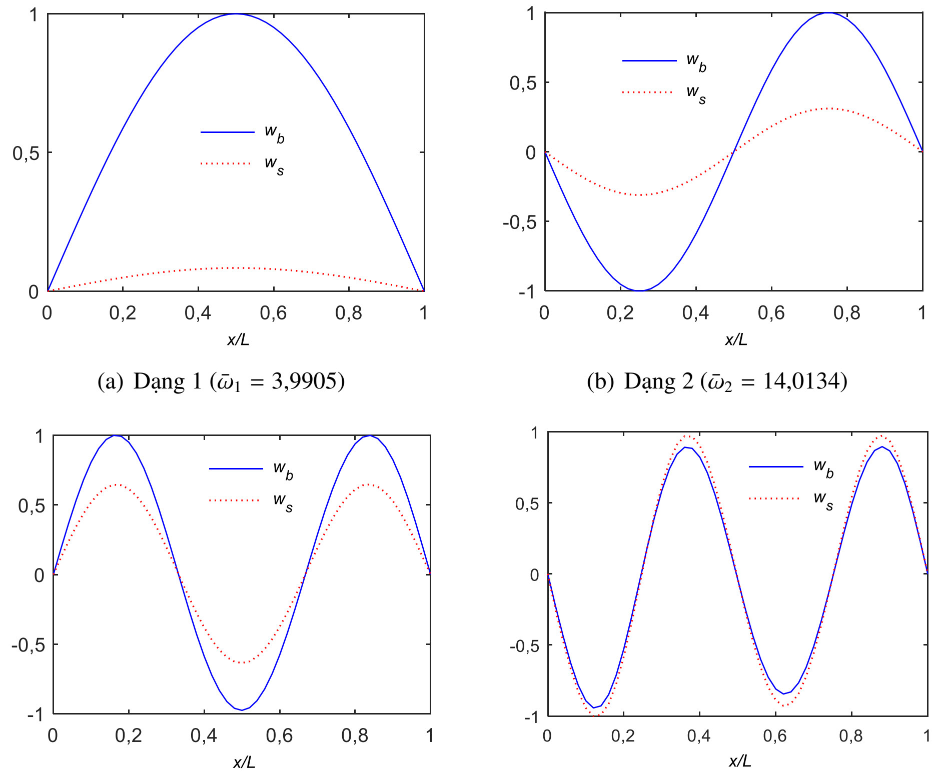


Hình 9. Ảnh hưởng của p, tỉ số L/h đến tần số của dầm

Hình 8 thể hiện ảnh hưởng của tỉ số chiều dài/chiều cao đến tần số dao động riêng của dầm CC. Có thể thấy rằng, tần số tăng nhanh khi L/h = (5 – 10) và hầu như không đổi khi L/h = (10 – 40).

Hình 9 thể hiện sự ảnh hưởng của L/h và p đến tần số riêng của dầm. Có thể nhận xét, tần số giảm nhanh khi $p = (0 - 5)$ và hầu như không đổi khi $p = (5 - 20)$ ở tất cả các điều kiện biên.

Bốn dạng dao động đầu tiên của dầm FGM ($L/h = 5, p = 1$) với điều kiện biên SS được thể hiện ở Hình 10. Có thể thấy rằng, ba dạng dao động đầu tiên, thành phần w_b đóng vai trò chủ đạo. Tuy nhiên, thành phần w_s đóng vai trò chủ đạo ở dạng dao động thứ tư. Hình 10 cũng cho thấy rằng vai trò của thành phần w_s có xu hướng tăng dần với các dạng dao động bậc cao.



(a) Dạng 1 ($\bar{\omega}_1 = 3{,}9905$)   (b) Dạng 2 ($\bar{\omega}_2 = 14{,}0134$)

(c) Dạng 3 ($\bar{\omega}_3 = 27{,}1206$)   (d) Dạng 4 ($\bar{\omega}_4 = 41{,}7732$)

Hình 10. Các dạng dao động của dầm SS

4. Kết luận

Bài báo này đề xuất một hàm xấp xỉ mới bằng cách cải tiến đa thức "Chebyshev loại I" để phân tích dao động riêng của dầm FGM. Mô hình dầm dựa vào lý thuyết bậc cao hai biến. Nguyên lý Lagrange kết hợp phương pháp Ritz được sử dụng để thành lập phương trình chủ đạo bài toán. Các hàm xấp xỉ đề xuất được so sánh với các hàm đa thức POL, hàm "Chebyshev bậc I" CBSI và hàm mũ HBR. Các ví dụ số được thực hiện và so sánh với các kết quả đã công bố. Có thể kết luận rằng, các hàm đề xuất rất hiệu quả trong việc phân tích dao động tự do dầm vật liệu cơ tính biến thiên.

Lời cảm ơn

Tác giả thứ nhất xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Trường Đại học Kiên Giang cho đề tài "Phân tích dao động tự do của dầm có cơ tính biến thiên (FGM) sử dụng đa thức Chebyshev cải tiến", mã số: A2020-KTCN-12.

Tài liệu tham khảo

[1] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2018). Modeling and analysis of functionally graded sandwich beams: a review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(21):1776–1795.

[2] Bernoulli, J. (1964). Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii circulorum osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam theorematis huc pertinentibus. *Acta Eruditorum*, 113–118.

[3] Yang, Q., Zheng, B., Zhang, K., Zhu, J. (2012). Analytical solution of a bilayer functionally graded cantilever beam with concentrated loads. *Archive of Applied Mechanics*, 83(3):455–466.

[4] Bernoulli, J. (1964). Curvatura laminae elasticae. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1694:262–276.

[5] Timoshenko, S. P. (1922). X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253):125–131.

[6] Karamanlı, A. (2018). Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. *Composite Structures*, 189:127–136.

[7] Nguyen, T.-K., Nguyen, T. T.-P., Vo, T. P., Thai, H.-T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76:273–285.

[8] Şimşek, M. (2010). Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Composite Structures*, 92(4):904–917.

[9] Şimşek, M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4):697–705.

[10] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1):57–66.

[11] Nhân, N. T., Dương, N. N., Kiên, N. T. (2020). Phân tích tĩnh dầm composite sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD) - ĐHXDHN*, 14(4V):54–66.

[12] Mashat, D. S., Carrera, E., Zenkour, A. M., Khateeb, S. A. A., Filippi, M. (2014). Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements. *Composites Part B: Engineering*, 59:269–278.

[13] Kadoli, R., Akhtar, K., Ganesan, N. (2008). Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2509–2525.

[14] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., Reddy, J. N. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45(3):519–539.

[15] Thẩm, V. V., Tú, T. M. (2016). Phân tích tĩnh và dao động riêng của dầm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXDHN*, 10(2):15–22.

[16] Khdeir, A. A., Reddy, J. N. (1994). Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *International Journal of Engineering Science*, 32(12):1971–1980.

[17] Trinh, L. C., Vo, T. P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K. (2016). An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads. *Composites Part B: Engineering*, 100:152–163.

[18] Şimşek, M. (2009). Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 1(3):1–11.

[19] Pradhan, K. K., Chakraverty, S. (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, 51:175–184.

[20] Aydogdu, M. (2006). Free Vibration Analysis of Angle-ply Laminated Beams with General Boundary Conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25(15):1571–1583.

[21] Aydogdu, M. (2005). Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(11):1740–1755.

[22] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Thai, H.-T. (2018). Ritz-Based Analytical Solutions for Bending, Buckling and Vibration Behavior of Laminated Composite Beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(11):1850130.

[23] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-K., Nguyen, T.-N., Thai, H.-T. (2018). New Ritz-solution shape functions

for analysis of thermo-mechanical buckling and vibration of laminated composite beams. *Composite Structures*, 184:452–460.

[24] Mantari, J. L., Canales, F. G. (2016). Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions. *Composite Structures*, 152:306–315.

[25] Khalili, S. M. R., Jafari, A. A., Eftekhari, S. A. (2010). A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Composite Structures*, 92(10):2497–2511.

[26] Ebrahimi, F., Barati, M. R., Ömer Civalek (2019). Application of Chebyshev–Ritz method for static stability and vibration analysis of nonlocal microstructure-dependent nanostructures. *Engineering with Computers*, 36(3):953–964.

[27] Moreno-García, P., dos Santos, J. V. A., Lopes, H. (2017). A Review and Study on Ritz Method Admissible Functions with Emphasis on Buckling and Free Vibration of Isotropic and Anisotropic Beams and Plates. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(3):785–815.