

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN ỔN ĐỊNH VÀ SAU ỔN ĐỊNH CỦA DẦM FGM THEO LÝ THUYẾT DẦM EULER–BERNOULLI CÓ XÉT ĐẾN YẾU TỐ MẶT TRUNG HÒA

Nguyễn Văn Long^{a,*}, Trần Minh Tú^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 19/5/2021, Sửa xong 28/7/2021, Chấp nhận đăng 13/8/2021

Tóm tắt

Bài báo phân tích phi tuyến ổn định và sau ổn định của dầm bằng vật liệu FGM chịu tác dụng của tải trọng nén dọc trục. Các hệ thức quan hệ và hệ phương trình chủ đạo được xây dựng trên cơ sở lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và hệ tọa độ quy chiếu gắn với mặt trung hòa. Lời giải giải tích dạng hiển được thiết lập cho các dạng điều kiện biên khác nhau của dầm. Ví dụ kiểm chứng đã được thực hiện qua so sánh với các công bố của các tác giả khác sử dụng hệ tọa độ quy chiếu gắn với mặt trung bình. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học và điều kiện biên đến tải trọng tới hạn và đường cong tải trọng - độ võng của dầm FGM sẽ được khảo sát cụ thể qua các ví dụ số.

Từ khoá: phân tích phi tuyến ổn định; lý thuyết dầm Euler-Bernoulli; dầm FGM; mặt trung hòa.

NONLINEAR BUCKLING AND POST-BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED EULER-BERNOULLI BEAM CONSIDERING NEUTRAL SURFACE POSITION

Abstract

In this paper, the buckling and post-buckling analysis of functionally graded (FG) beam under axially compressive load is presented. Basic relationship and governing equations are derived based on Euler-Bernoulli beam theory and neutral surface position. A closed-form solution for critical buckling loads is obtained for FG beams under various boundary conditions. The validated examples are conducted by comparing with the available results calculated by using a conventional coordinate system that coincided with the middle surface. The effects of material, geometric parameters, and boundary condition on critical loads, the compressive-deflection curve of FG beams are investigated in detail.

Keywords: nonlinear post-buckling analysis; Euler-Bernoulli beam theory; functionally graded beam; neutral surface position.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce\(nuce\)2021-15\(5V\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.huce(nuce)2021-15(5V)-03) © 2021 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

1. Mở đầu

Vật liệu FGM (functionally graded materials) với các đặc trưng cơ học thay đổi theo tọa độ không gian của kết cấu, đã và đang thu hút sự chú ý đặc biệt của giới chuyên môn kể từ thời điểm được phát kiến bởi các nhà khoa học Nhật Bản vào cuối thế kỷ 20. Vật liệu FGM điển hình thường cấu thành từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại. Sở hữu tính kháng nhiệt nổi bật của gốm, tính bền dẻo của kim loại, cùng với cơ tính biến đổi trơn nên tránh được sự bong tách, sự tập trung ứng suất giữa các

*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: longnv@nuce.edu.vn (Long, N. V.)

pha vật liệu, do vậy chúng thường được sử dụng để chế tạo những chi tiết cơ khí, những cấu kiện công trình làm việc trong môi trường nhiệt độ cao. Kết cấu bằng vật liệu FGM được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như: hàng không, điện hạt nhân, ô tô, đóng tàu, xây dựng dân dụng, ...

Sự gia tăng ứng dụng của kết cấu bằng vật liệu FGM trong kỹ thuật cơ khí và kết cấu công trình, cần đi đôi với việc phát triển các mô hình và phương pháp tính phục vụ công tác tối ưu hóa thiết kế. Chính vì vậy, một số lượng lớn các công trình liên quan đến ứng xử cơ học của kết cấu dầm FGM đã được công bố trong thời gian gần đây. Nghiên cứu tổng quan về các lý thuyết dầm ứng dụng trong tính toán kết cấu được Wu và Chen trình bày trong [1] đối với dầm sandwich và dầm composite lớp, Thai và Vo trình bày trong [2], Simsek trong [3], Pradhan và Chakraverty trong [4] đối với dầm FGM. Các nghiên cứu sau đó về ứng xử uốn, ổn định và dao động của dầm bằng vật liệu FGM hoàn hảo (không có lỗ rỗng) đã được công bố bởi nhiều tác giả [5–10]. Các phân tích về ứng xử uốn và dao động riêng của dầm FGM có vi bọt rỗng đã được thực hiện bởi Atmane và cs. [11, 12], Kaddari và cs. [13], Akbas [14], Wattanasakulpong và Chaikitiratanana [15], Phuong và cs. [16].

Nghiên cứu về ổn định và sau ổn định của kết cấu dầm và cột là một trong những vấn đề cơ bản trong tính toán và thiết kế các kết cấu FGM. Long và Hường [17] phân tích ổn định của dầm FGM có các vi lỗ rỗng với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp giải tích. She và cs. [18] trình bày ổn định và sau ổn định nhiệt của dầm FGM bằng phương pháp hàm phạt, sử dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli và Timoshenko. Akbas [19] nghiên cứu ứng xử sau ổn định của dầm FGM có vi bọt rỗng bằng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình dầm Timoshenko. Lei và cs. [20] phân tích sau ổn định của dầm FGM có vi bọt rỗng bằng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát (GDQM). Daneshmehra và cs. [21] khảo sát ứng xử sau ổn định của dầm FGM sử dụng các lý thuyết dầm khác nhau. Zhang và Zheng [22] nghiên cứu ổn định đàn dẻo của dầm FGM trong môi trường nhiệt. Li và Batra [23] thiết lập quan hệ giữa tải trọng tới hạn của dầm FGM theo lý thuyết dầm Timoshenko và Euler-Bernoulli và tải trọng tới hạn của dầm Euler-Bernoulli bằng vật liệu thuần nhất, đẳng hướng. Trong nghiên cứu này các tác giả tính toán trên mặt trung bình nhưng vị trí mặt trung hòa cũng đã được xét đến khi xác định vị trí điểm đặt lực nén dọc trục; vật liệu FGM với quy luật hàm lũy thừa (P-FGM) và quy luật hàm e-mũ (E-FGM) cũng đã được khảo sát.

Có thể thấy rằng các bài toán về ổn định và sau ổn định của dầm FGM đã được một số tác giả đề cập đến với nhiều phương pháp khác nhau, tuy nhiên việc tiếp tục tìm tòi, khám phá thêm những cách tiếp cận mới vẫn là động lực thúc đẩy tính sáng tạo của các nhà khoa học. Trong bài báo này, nhằm mục đích xây dựng lời giải giải tích dạng hiển phục vụ công tác tính toán, thiết kế sơ bộ cấu kiện dầm FGM chịu nén dọc trục, mô hình dầm Euler-Bernoulli với hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung hòa được lựa chọn. Kỹ thuật tính toán với hệ tọa độ quy chiếu gắn với mặt trung hòa đã được Zhang đề xuất đầu tiên cho kết cấu tấm FGM, sau đó được ông và một số tác giả khác áp dụng cho kết cấu dầm FGM [24–28]. Với cách tiếp cận này, tương tác màng - uốn trong quan hệ nội lực – biến dạng sẽ bị triệt tiêu, do vậy giá trị lực tới hạn và quan hệ tải nén - chuyển vị ngang của dầm Euler-Bernoulli bằng vật liệu FGM với các điều kiện biên khác nhau sẽ nhận được dưới dạng biểu thức hiển. Để kiểm chứng độ tin cậy của các biểu thức nhận được, các ví dụ kiểm chứng đã được thực hiện qua so sánh với kết quả của một số tác giả khác với cách tính toán trong hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung bình.

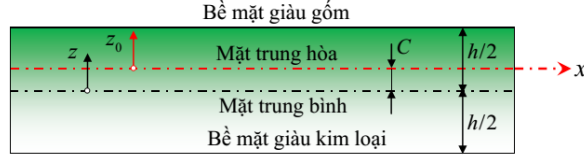
2. Mô hình hóa dầm bằng vật liệu FGM

Xét dầm bằng vật liệu FGM có chiều dài L , mặt cắt ngang chữ nhật với bề rộng b , chiều cao h như Hình 1. Tỷ phần thể tích các vật liệu thành phần của của vật liệu FGM được giả thiết biến thiên dọc theo chiều cao tiết diện theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM), do vậy mô đun đàn hồi E được biểu

diễn dưới dạng [29, 30]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (1)$$

với E_c, E_m tương ứng là các mô đun đàn hồi kéo (nén) của ceramic, và kim loại; $k \geq 0$ là chỉ số tỷ lệ thể tích. Hệ số Poisson được coi là không đổi theo tọa độ chiều cao dầm ($\nu = \text{const}$).



Hình 1. Vị trí mặt trung bình và mặt trung hòa của dầm FGM

Do mô đun đàn hồi E của vật liệu FGM là hàm của tọa độ chiều cao tiết diện dầm, vị trí mặt trung hòa trong trường hợp tổng quát không trùng với mặt trung bình hình học. Tọa độ của điểm bất kỳ theo phương chiều cao dầm có thể được xác định theo hai hệ tọa độ: đi qua mặt trung bình hoặc mặt trung hòa và được ký hiệu là z và z_0 .

Vị trí mặt trung hòa của dầm FGM được xác định từ điều kiện [12, 27]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z - C) E(z) dz = 0 \Rightarrow C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz} = \frac{h (E_c - E_m) k}{2 (k + 2) (k E_m + E_c)} \quad (2)$$

Như vậy, với dầm FGM, mô đun đàn hồi trong hệ tọa độ gắn với mặt trung hòa biểu diễn như sau:

$$E(z_0) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z_0 + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3)$$

3. Các phương trình cơ bản của lý thuyết dầm Euler-Bernoulli

Đối với hệ trục tọa độ đi qua mặt trung hòa, trường chuyển vị theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli biểu diễn dưới dạng [31]:

$$u(x, z_0) = u_0(x) - z_0 \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (4a)$$

$$w(x, z_0) = w_0(x) \quad (4b)$$

trong đó u_0, w_0 tương ứng là chuyển vị màng và độ võng của một điểm bất kỳ trên mặt trung hòa theo phương trục x, z_0 .

Các thành phần biến dạng có kể đến thành phần phi tuyến hình học được xác định thông qua các thành phần chuyển vị:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z_0 \kappa_x \quad (5a)$$

$$\gamma_{xz_0} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z_0} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (5b)$$

Ứng suất pháp liên hệ với biến dạng dài theo định luật Hooke:

$$\sigma_x = E(z_0)\varepsilon_x = E(z_0)(\varepsilon_x^0 + z_0\kappa_x) \quad (6)$$

Các thành phần lực dọc trục và mô men uốn nội lực của dầm được định nghĩa qua ứng suất, và sau đó có thể biểu diễn qua các thành phần biến dạng dài, độ cong:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_0)(\varepsilon_x^0 + z_0\kappa_x) dz_0 = A_{11}\varepsilon_x^0 + B_{11}\kappa_x \quad (7a)$$

$$M_x = \int_A z_0 \sigma_x dA = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_0 E(z_0)(\varepsilon_x^0 + z_0\kappa_x) dz_0 = B_{11}\varepsilon_x^0 + D_{11}\kappa_x \quad (7b)$$

Các hằng số độ cứng của dầm trong (7a) và (7b) được xác định bởi:

$$A_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} E(z_0) dz_0 \quad (8a)$$

$$B_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_0 E(z_0) dz_0 = b \int_{-h/2}^{h/2} (z - C) E(z) dz = 0 \quad (8b)$$

$$D_{11} = b \int_{-h/2-C}^{h/2-C} z_0^2 E(z_0) dz_0 \quad (8c)$$

Từ (5) và (7)–(8), các thành phần nội lực được biểu diễn qua chuyển vị có dạng đơn giản như dưới đây:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 = A_{11} \left[u_{0,x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (9a)$$

$$M_x = D_{11}\kappa_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (9b)$$

Các phương trình cân bằng cho dầm FGM được xây dựng dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu:

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (10)$$

trong đó: δU là biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, δV là biến phân thế năng của tải trọng.

Biến phân thế năng biến dạng đàn hồi của dầm xác định bởi:

$$\delta U = \int_0^L \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA dx = \int_0^L \left[N_x \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right] dx \quad (11)$$

Biến phân thế năng của tải trọng dọc trục P biểu diễn dưới dạng:

$$\delta V = -P(\delta u_0|_{x=L} - \delta u_0|_{x=0}) = -P \delta u_0|_0^L \quad (12)$$

Thay (11) và (12) vào (10), sau đó tiến hành tích phân từng phần, ta được:

$$0 = \left[(N_x - P) \delta u_0 - M_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + V_{xz} \delta w_0 \right] \Big|_0^L - \int_0^L \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right] \delta w_0 \right\} dx \quad (13)$$

trong đó, lực cắt hiệu dụng được định nghĩa: $V_{xz} = N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial x}$.

Để (13) được thỏa mãn, cho hệ số của các biến phân trên chiều dài dầm L bằng không, ta thu được hệ phương trình cân bằng dưới dạng:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = 0 \quad (14b)$$

Đây là hệ phương trình cân bằng chủ đạo để phân tích các bài toán phi tuyến tĩnh của dầm FGM theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli.

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực theo chuyển vị trong (9) vào (14), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (15a)$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + A_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (15b)$$

Các ràng buộc về điều kiện biên thu được khi biểu thức (13) hoàn toàn thỏa mãn, nghĩa là số hạng đầu tiên của biểu thức này cũng phải đồng thời bằng không. Do vậy, các tham số điều kiện biên động học và tĩnh học thể hiện dưới đây có thể được biểu diễn cụ thể cho từng liên kết xác định:

$$(u_0, N_x); (w_0, V_{xz}); \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, M_x \right) \quad (16)$$

4. Phân tích ổn định

Trong phân tích ổn định, bỏ qua thành phần biến dạng phi tuyến trong (5a)–(5b), hệ phương trình cân bằng thu được sau khi áp dụng tiêu chuẩn cân bằng lân cận có dạng sau [32]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17b)$$

trong đó, $N_x^0 = P = -N_0$ là lực dọc màng; N_0 là tải trọng nén dọc trục đặt trên mặt trung hòa. Biểu diễn nội lực qua biến dạng rồi biến dạng qua chuyển vị, ta thu được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị dưới dạng:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (18a)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (18b)$$

Phương trình (18a) chỉ chứa một ẩn u_0 , nghiệm của phương trình này có dạng:

$$u_0 = B_1 x + B_0; \quad 0 \leq x \leq L \quad (19)$$

trong đó: B_0, B_1 là các hằng số tích phân, được xác định theo từng điều kiện biên cụ thể. Liên quan đến thành phần chuyển vị theo phương dọc trục u_0 , các liên kết sau đây được xem xét:

$$\text{Tại } x = 0: u_0 = 0, N_x \neq 0 \text{ (dầm không thể tự do dịch chuyển dọc trục)} \quad (20a)$$

$$\text{Tại } x = L: u_0 \neq 0, N_x = -N_0 \text{ (dầm có thể tự do dịch chuyển dọc trục)} \quad (20b)$$

Từ đây, ta thu được kết quả:

$$B_0 = 0; \quad B_1 = -\frac{N_0}{A_{11}}; \quad u_0 = -\frac{N_0}{A_{11}} x \quad (21)$$

Để xác định độ võng w_0 ta sẽ tiến hành giải phương trình (18b), với các điều kiện biên được xem xét liên quan đến độ võng của dầm. Dưới đây, bài báo nghiên cứu xem xét bốn dạng điều kiện biên thường gặp: dầm hai đầu khớp (SS), dầm hai đầu ngàm (CC), dầm đầu ngàm - đầu khớp (CS), dầm đầu ngàm - đầu tự do (CF); các biểu thức điều kiện biên về độ võng được trình bày như trong Bảng 1.

Bảng 1. Một số dạng điều kiện biên về độ võng cho dầm Euler-Bernoulli

Điều kiện biên	Tại $x = 0$	Tại $x = L$
SS:	$w_0 = 0; M_x = 0$ hay $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$	$w_0 = 0; M_x = 0$ hay $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$
CC:	$w_0 = 0; \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$	$w_0 = 0; \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$
CS:	$w_0 = 0; \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$	$w_0 = 0; M_x = 0$ hay $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$
CF:	$w_0 = 0; \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$	$V_{xz} = 0$ hay $N_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0;$ $M_x = 0$ hay $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$

Phương trình (18b) có thể viết lại thành:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \lambda^2 w_0 = K_1 x + K_2 \quad (22)$$

trong đó: $\lambda^2 = \frac{N_0}{D_{11}}$ và K_1, K_2 là các hằng số. Đây là phương trình vi phân cấp 2 với các hệ số là hằng số, nghiệm của nó có dạng:

$$w_0(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4; \quad C_3 = \frac{K_1}{\lambda^2}, C_4 = \frac{K_2}{\lambda^2} \quad (23)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 phụ thuộc vào điều kiện biên (xem trong Bảng 1); ba trong bốn hằng số này và λ được xác định thông qua bốn phương trình điều kiện biên. Điều kiện để dầm mất ổn định là 4 hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 không đồng thời bằng không. Biết λ ta sẽ xác định được lực mất ổn định $N^* = D_{11} \lambda^2$ và do đó xác định được lực tới hạn $N_{th} = \min \{N^*\}$. Dưới đây, ta xét một số dạng điều kiện biên của dầm cụ thể sau:

4.1. Dầm liên kết hai đầu khớp (SS)

Bốn phương trình điều kiện biên cho ta kết quả:

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0 \quad (24a)$$

$$C_1 \sin \lambda L = 0 \quad (24b)$$

Điều kiện để dầm mất ổn định dẫn đến $C_1 \neq 0$; từ đây suy ra:

$$\sin \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = m\pi; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Qua đó, ta thu được lực mất ổn định, lực nén tới hạn và nghiệm độ võng của dầm:

$$N^* = \frac{m^2 \pi^2 D_{11}}{L^2} \quad (26a)$$

$$N_{th} = \frac{\pi^2 D_{11}}{L^2} \quad (26b)$$

$$w_0(x) = W \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad W = C_1 \quad (26c)$$

4.2. Dầm liên kết hai đầu ngàm (CC)

Bốn phương trình điều kiện biên cho ta kết quả:

$$C_4 = -C_2 \quad (27a)$$

$$C_3 = -\lambda C_1 \quad (27b)$$

$$C_1 (\sin \lambda L - \lambda L) + C_2 (\cos \lambda L - 1) = 0 \quad (27c)$$

$$C_1 (\cos \lambda L - 1) - C_2 \sin \lambda L = 0 \quad (27d)$$

Điều kiện để dầm mất ổn định: C_1, C_2 không đồng thời bằng không; từ đây suy ra:

$$\sin \frac{\lambda L}{2} \left(\sin \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \cos \frac{\lambda L}{2} \right) = 0 \quad (28)$$

Nghiệm của phương trình (28) gồm hai trường hợp:

- Trường hợp 1 (CC-1), hoặc λ là nghiệm của phương trình lượng giác:

$$\sin \frac{\lambda L}{2} = 0 \Rightarrow \lambda L = 2m\pi; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

Từ đây, ta thu được lực mất ổn định và dạng nghiệm độ võng của dầm:

$$N^* = \frac{4m^2 \pi^2 D_{11}}{L^2} \quad (30a)$$

$$w_0(x) = W \sin^2 \frac{m\pi x}{L}; \quad W = -2C_2 \quad (30b)$$

- Trường hợp 2 (CC-2), hoặc λ là nghiệm của phương trình phi tuyến:

$$\tan \frac{\lambda L}{2} = \frac{\lambda L}{2} \quad (31)$$

Nghiệm của phương trình phi tuyến (31) được xác định theo phương pháp giải lặp Newton-Raphson. Kết quả là:

$$\frac{\lambda L}{2} = 4,49341; 7,72525; 10,90412; \dots \quad (32a)$$

$$N^* = \frac{D_{11}}{L^2} \{8,98682^2; 15,45050^2; 21,80824^2; \dots\} \quad (32b)$$

Hàm độ võng của dầm khi đó:

$$w_0(x) = W \left(\sin \lambda x - \frac{\lambda L}{2} \cos \lambda x - \lambda x + \frac{\lambda L}{2} \right); \quad W = C_1 \quad (33)$$

Từ hai trường hợp trên đây, ta thu được lực mất ổn định và lực nén tối hạn:

$$N^* = \frac{D_{11}}{L^2} \{4\pi^2; 8,98682^2; 16\pi^2; 15,45050^2; 36\pi^2; 21,80824^2; \dots\} \quad (34a)$$

$$N_{th} = \frac{4\pi^2 D_{11}}{L^2} \quad (34b)$$

4.3. Dầm liên kết đầu ngàm-đầu khớp (CS)

Bốn phương trình điều kiện biên cho ta kết quả:

$$C_2 = -\lambda L C_1 \quad (35a)$$

$$C_3 = -\lambda C_1 \quad (35b)$$

$$C_4 = \lambda L C_1 \quad (35c)$$

$$C_1 (\sin \lambda L - \lambda L \cos \lambda L) = 0 \quad (35d)$$

Điều kiện để dầm mất ổn định dẫn đến $C_1 \neq 0$; từ đây suy ra:

$$\tan \lambda L = \lambda L \quad (36)$$

Nghiệm của phương trình phi tuyến này được xác định theo phương pháp giải lặp Newton-Raphson. Kết quả thu được:

$$\lambda L = 4,49341; 7,72525; 10,90412; \dots \quad (37)$$

Từ đây, ta thu được lực mất ổn định N^* và lực nén tối hạn N_{th} :

$$N^* = \frac{D_{11}}{L^2} \{4,49341^2; 7,72525^2; 10,90412^2; \dots\} \quad (38a)$$

$$N_{th} = \frac{4,49341^2 D_{11}}{L^2} \quad (38b)$$

Hàm độ võng của dầm khi đó:

$$w_0(x) = W (\sin \lambda x - \lambda L \cos \lambda x - \lambda x + \lambda L); \quad W = C_1 \quad (39)$$

4.4. Dầm liên kết đầu ngàm-đầu tự do (CF)

Bốn phương trình điều kiện biên CF cho ta kết quả:

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (40a)$$

$$C_4 = -C_2 \quad (40b)$$

$$C_2 \cos \lambda L = 0 \quad (40c)$$

Điều kiện để dầm mất ổn định: $C_2 \neq 0$; từ đây suy ra:

$$\cos \lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = \frac{(2m-1)\pi}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Qua đó, ta thu được lực mất ổn định, lực nén tới hạn và nghiệm độ võng của dầm:

$$N^* = \frac{(2m-1)^2 \pi^2 D_{11}}{4L^2} \quad (42a)$$

$$N_{th} = \frac{\pi^2 D_{11}}{4L^2} \quad (42b)$$

$$w_0(x) = W \sin^2 \frac{(2m-1)\pi x}{4L}; \quad W = -2C_2 \quad (42c)$$

5. Phân tích sau ổn định

Trong phân tích sau ổn định, các thành phần chuyển vị được xác định thông qua hệ phương trình vi phân phi tuyến (15a)–(15b). Từ phương trình trong (15a), ta suy ra:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = D_1 \quad (43a)$$

$$u_0 = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx + D_1 x + D_2 \quad (43b)$$

với D_1, D_2 là các hằng số, được xác định dựa vào điều kiện biên của bài toán. Cụ thể là, đối với chuyển vị màng u_0 :

$$\text{Tại } x = 0: u_0 = 0 \quad (44a)$$

$$\text{Tại } x = L: u_0 = -\frac{N_0 L}{A_{11}} \quad (44b)$$

Từ điều kiện đầu tiên trong (44a), ta thu được kết quả $D_2 = 0$ cho tất cả các trường hợp điều kiện biên của dầm; theo đó, từ điều kiện thứ hai trong (44b) ta được:

$$D_1 = \frac{1}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{N_0}{A_{11}} = D_1^* - \frac{N_0}{A_{11}} \quad (45)$$

Thay kết quả xác định D_1 và D_2 ở trên vào phương trình (15b), ta được:

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + A_{11} \left(D_1^* - \frac{N_0}{A_{11}} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (46)$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp bốn theo w_0 , giải phương trình này, ta được liên hệ giữa w_0 và N_0 . Lưu ý rằng cách giải phương trình (46) tương tự như phương trình (18b) đã trình bày ở phần 4; dạng nghiệm độ võng thu được như trong các biểu thức (26), (30), (33), (39) và (42) tương ứng với các điều kiện biên SS, CC-1, CC-2, SC và CF. Sau đây là một số kết quả cụ thể cho các điều kiện biên:

5.1. Dầm liên kết hai đầu khớp (SS)

$$D_1^* = \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 \quad (47a)$$

$$N_0 = D_{11} \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 = N^* + A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 \quad (47b)$$

5.2. Dầm liên kết hai đầu ngàm (CC)

- Trong trường hợp 1 (CC-1):

$$D_1^* = \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 \quad (48a)$$

$$N_0 = D_{11} \frac{4m^2 \pi^2}{L^2} + A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 = N^* + A_{11} \frac{m^2 \pi^2}{4L^2} W^2 \quad (48b)$$

- Trong trường hợp 2 (CC-2):

$$D_1^* = \frac{\bar{D}_1 W^2}{2L^2} \quad (49a)$$

$$N_0 = D_{11} \lambda^2 + A_{11} \frac{\bar{D}_1}{2L^2} W^2 = N^* + A_{11} \frac{\bar{D}_1}{2L^2} W^2 \quad (49b)$$

Khi $\frac{\lambda L}{2} = 4,49341; 7,72525; 10,90412; \dots$ thì: $\bar{D}_1 = 815,33; 7123,29; 28274,36, \dots$

5.3. Dầm liên kết đầu ngàm-đầu khớp (CS)

$$D_1^* = \frac{\bar{D}_1 W^2}{2L^2} \quad (50a)$$

$$N_0 = D_{11} \lambda^2 + A_{11} \frac{\bar{D}_1}{2L^2} W^2 = N^* + A_{11} \frac{\bar{D}_1}{2L^2} W^2 \quad (50b)$$

Khi $\lambda L = 4,49341; 7,72525; 10,90412; \dots$ thì: $\bar{D}_1 = 203,83; 1780,82; 7068,59; \dots$

5.4. Dầm liên kết hai đầu ngàm (CF)

$$D_1^* = \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{64L^2} W^2 \quad (51a)$$

$$N_0 = D_{11} \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4L^2} + A_{11} \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{64L^2} W^2 = N^* + A_{11} \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{64L^2} W^2 \quad (51b)$$

Các kết quả thu được trong (47)–(51), tương ứng với các trường hợp điều kiện biên SS, CC-1, CC-2, SC và CF, là những phương trình cơ bản dùng để nghiên cứu ổn định phi tuyến, bao gồm xác định tải trọng mất ổn định và các đường cong tải nén-độ võng của dầm bằng vật liệu FGM. Như vậy, đối với dầm FGM hoàn hảo (về hình dạng hình học ban đầu), hàm N_0 đạt cực tiểu tại $W = 0$ và giá trị $N^* = N_0|_{W=0}$, điểm thấp nhất trên đồ thị tải nén-độ võng là giá trị tải võng theo kiểu rẽ nhánh.

6. Kết quả số và thảo luận

Xét dầm bằng vật liệu P-FGM với các vật liệu thành phần là gốm (Al_2O_3) và kim loại (Al) trong đó: $E_c = 380$ GPa, $E_m = 70$ GPa và $\nu_c = \nu_m = 0,3$.

6.1. Ví dụ kiểm chứng

Xét dầm tiết diện chữ nhật, vật liệu P-FGM (Al/ Al_2O_3). Bảng 2 trình bày các kết quả tính toán lực tới hạn không thứ nguyên $\bar{N} = N_{th} \frac{12L^2}{E_m h^3}$ cho dầm với 4 trường hợp điều kiện biên bao gồm: CC, CS, SS và CF; và các chỉ số tỷ lệ thể tích khác nhau. Kết quả của bài báo được so sánh với kết quả của Li và Batra [23].

Có thể thấy rằng các kết quả nhận được là hoàn toàn trùng khớp do Li và Batra trong [23] cũng sử dụng mô hình dầm Euler-Bernoulli, và khi tính toán cũng đã coi điểm đặt lực nén dọc trục nằm trên mặt trung hòa.

Bảng 2. Kiểm chứng lực tới hạn không thứ nguyên $\bar{N}$ của dầm FGM

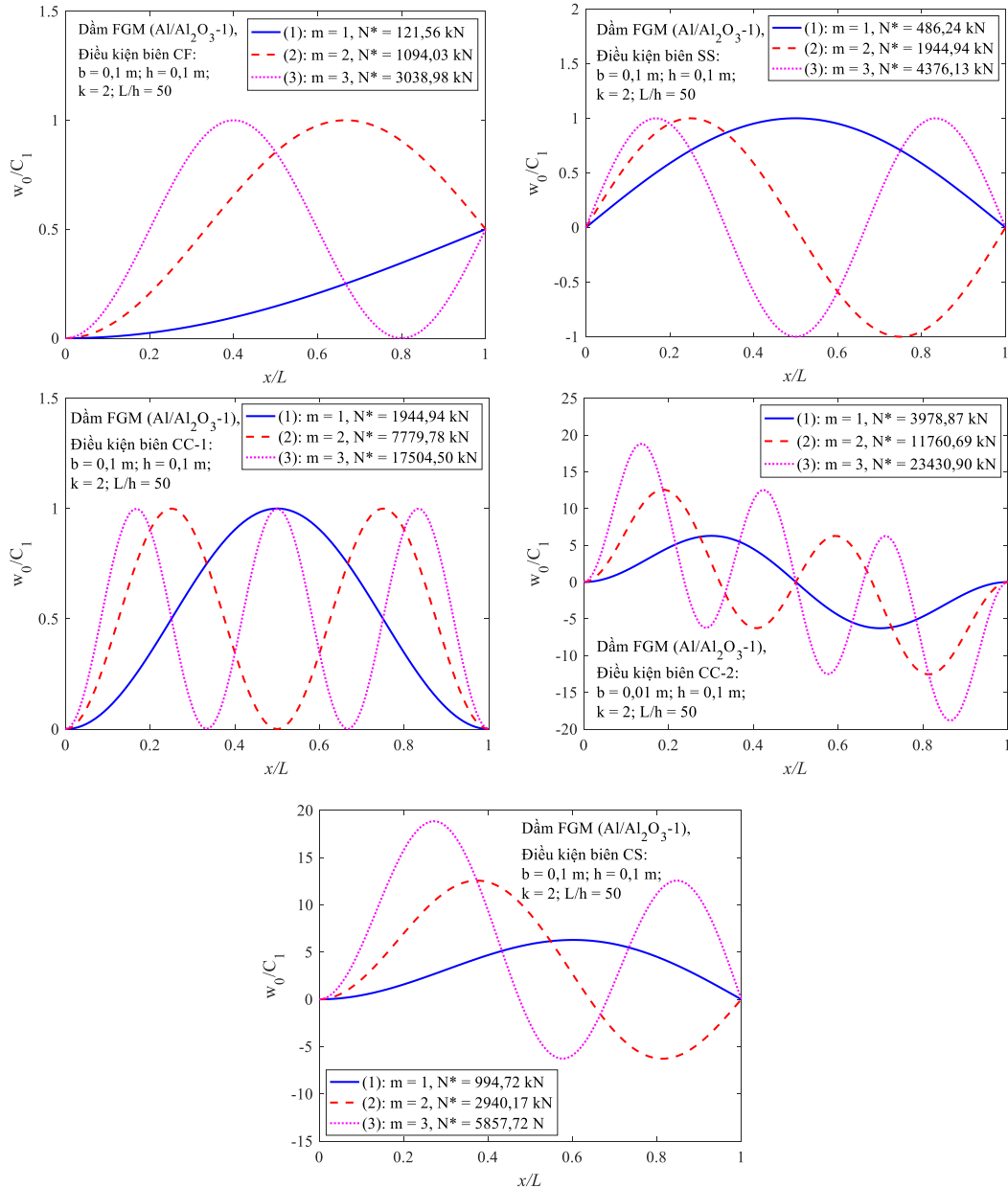
Điều kiện biên	Nguồn	k				
		0	0,5	1	5	∞
CC	Li và Batra [23]	214,3100	138,9300	106,8200	70,4910	39,4780
	Bài báo	214,3114	138,9256	106,8215	70,4909	39,4784
CS	Li và Batra [23]	109,6100	71,0530	54,6330	36,0520	20,1900
	Bài báo	109,6068	71,0517	54,6325	36,0516	20,1907
SS	Li và Batra [23]	53,5780	34,7310	26,7050	17,6230	9,8696
	Bài báo	53,5779	34,7314	26,7054	17,6227	9,8696
CF	Li và Batra [23]	13,3940	8,6829	6,6763	4,4057	2,4674
	Bài báo	13,3945	8,6828	6,6763	4,4057	2,4674

Từ các kết quả tính toán kiểm chứng chỉ ra ở trên, có thể thấy rằng lời giải giải tích và chương trình máy tính sử dụng trong bài báo có độ tin cậy.

6.2. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu và điều kiện biên lên tải trọng tới hạn của dầm FGM

Xét dầm tiết diện vuông, vật liệu P-FGM ($\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$): $h = b = 0,1$ m, dưới tác dụng của tải trọng nén dọc trục.

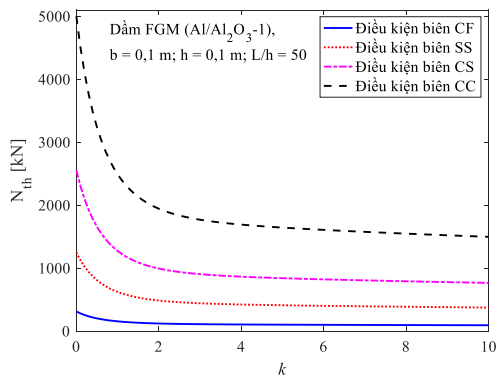
Dầm FGM ($k = 2, L/h = 50$), với bốn trường hợp liên kết được xem xét bao gồm: liên kết đầu ngàm - đầu tự do (CF); hai đầu khớp (SS), đầu ngàm - đầu khớp (CS), và hai đầu ngàm (CC). Tải trọng mất ổn định N^* ứng với các dạng mất ổn định có $m = 1, 2, 3$ tương ứng được trình bày như trên Hình 2.



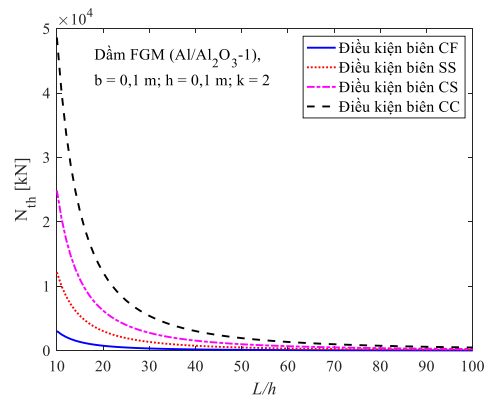
Hình 2. Dạng mất ổn định của dầm FGM với các điều kiện biên khác nhau

Các kết quả số cho thấy, với dầm FGM: Lực tối hạn N_{th} luôn ứng với dạng mất ổn định có $m = 1$; đây là trị số lực nén nhỏ nhất làm cho dầm mất ổn định, do đó mang ý nghĩa kỹ thuật hơn cả. Về ảnh hưởng của điều kiện biên: với cùng kích thước hình học và vật liệu làm dầm, điều kiện biên CC có lực tối hạn lớn nhất (kết quả nghiệm theo trường hợp đầu tiên, CC-1 có lực tối hạn nhỏ hơn so với trường hợp thứ hai, CC-2; do đó, trong các phân tích dưới đây, các kết quả tính toán lấy theo trường hợp CC-1), sau đó lần lượt đến các điều kiện biên CS, SS và CF. Cụ thể, về trị số lực tối hạn, so với trường hợp điều kiện biên SS thì điều kiện biên CC cho kết quả lực tối hạn lớn hơn khoảng 4 lần, điều kiện biên CS cho kết quả lớn hơn khoảng 2 lần; trong khi điều kiện biên CF cho kết quả nhỏ hơn khoảng 4 lần.

Hình 3 là đồ thị biểu diễn sự biến thiên lực tối hạn N_{th} của dầm FGM ($L/h = 50$) với bốn dạng điều kiện biên (CF, SS, CS, CC), theo chỉ số tỷ lệ thể tích, k . Các kết quả cho thấy, khi tăng k (đồng nghĩa với việc tăng hàm lượng kim loại), với cả 4 trường hợp điều kiện biên khác nhau, lực tối hạn đều giảm. Lực tối hạn, giảm nhanh theo quy luật phi tuyến khi k còn nhỏ ($0 \leq k \leq 2$), sau đó thì giảm chậm dần lại.



Hình 3. Biến thiên của lực tối hạn, N_{th} của dầm FGM theo chỉ số tỷ lệ thể tích, k



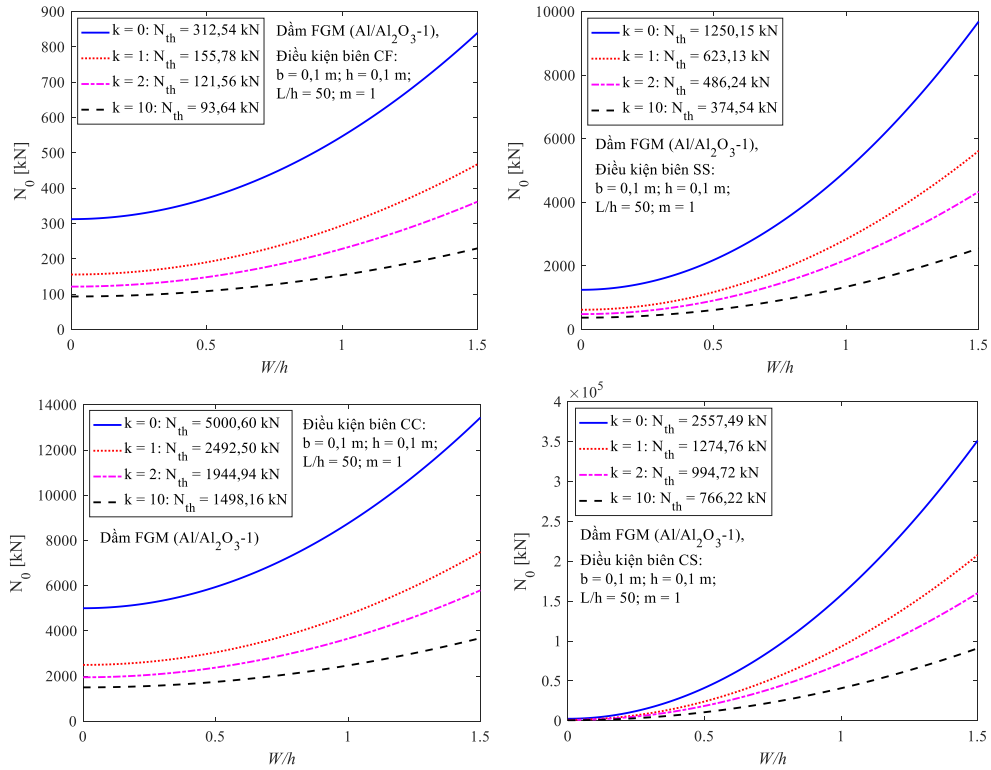
Hình 4. Biến thiên của lực tối hạn N_{th} của dầm FGM theo tỷ số kích thước, L/h

Biến thiên lực tối hạn, N_{th} của dầm FGM ($k = 2$) với bốn trường hợp điều kiện biên (CF, SS, CS, CC), theo tỷ số kích thước L/h được thể hiện bằng đồ thị như trên Hình 4. Các kết quả cho thấy: khi L/h tăng (dầm dài ra), với cả bốn dạng điều kiện biên khảo sát, lực tối hạn giảm theo quy luật phi tuyến; và giảm nhanh nhất là trong khoảng $L/h = 5 \div 15$, sau đó giảm chậm dần.

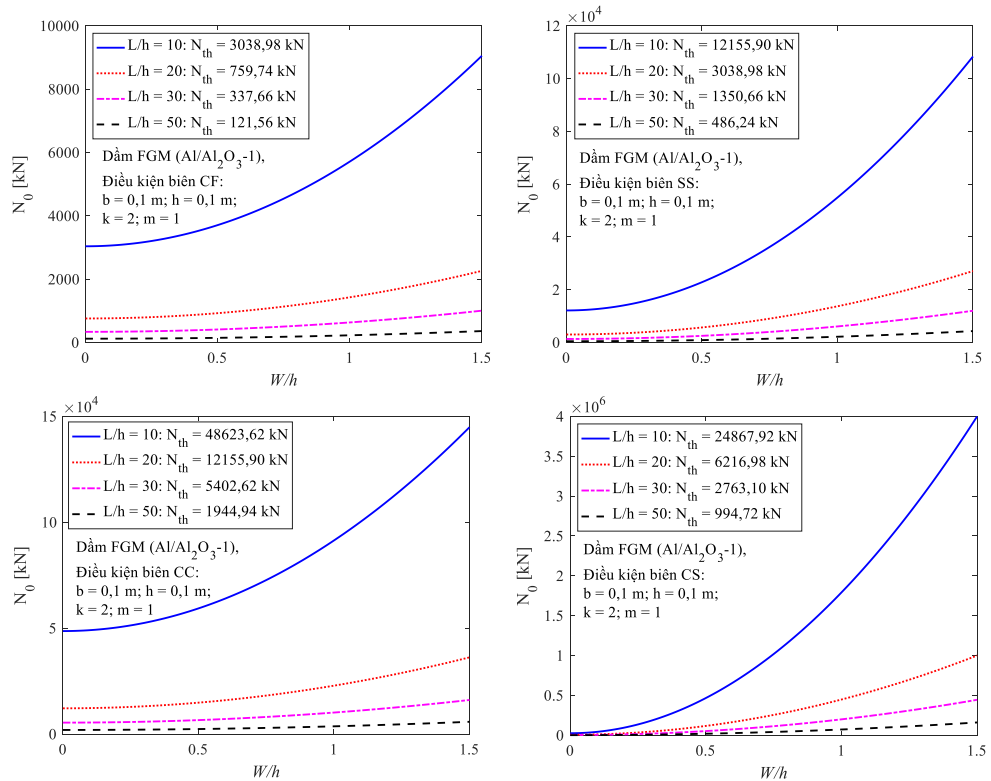
6.3. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu, độ mảnh dầm và điều kiện biên lên đường cong sau ổn định của dầm FGM

Hình 5 so sánh ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích k lên đường cong tải - độ võng của dầm FGM ($L/h = 50$); cho bốn trường hợp điều kiện biên (CF, SS, CS, CC). Có thể thấy rằng, khi k tăng, lực tối hạn giảm và đường cong tải - độ võng sau tối hạn dịch chuyển xuống phía dưới, khả năng mang tải của dầm giảm. Nguyên nhân là khi k tăng, tương ứng với hàm lượng kim loại tăng làm giảm độ cứng của kết cấu dầm.

Hình 6 là đồ thị so sánh ảnh hưởng của tỷ số kích thước dầm L/h lên đường cong tải - độ võng của dầm FGM ($k = 2$); cho bốn trường hợp điều kiện biên (CF, SS, CS, CC). Có thể thấy rằng, khi L/h tăng có nghĩa là độ mảnh dầm tăng dẫn đến lực tối hạn giảm và đường cong tải - độ võng sau tối hạn dịch chuyển xuống dưới, khả năng mang tải của dầm giảm.



Hình 5. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích, k lên đường cong tải - độ võng của dầm FGM ($L/h = 50$)



Hình 6. Ảnh hưởng của tỷ số kích thước, L/h lên đường cong tải - độ võng của dầm FGM ($k = 2$)

7. Kết luận

Bài báo sử dụng mô hình dầm Euler-Bernoulli để xây dựng biểu thức giải tích cho lực tới hạn và quan hệ đường cong tải trọng nén - độ võng của dầm FGM, chịu nén dọc trục với các loại điều kiện biên khác nhau. Nghiệm giải tích dưới dạng ẩn thu được bằng cách giải trực tiếp hệ phương trình cân bằng ổn định của dầm thiết lập trong hệ trục gắn với mặt trung hòa. Các khảo sát số cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, điều kiện biên lên ứng xử ổn định và sau ổn định của dầm. Các kết quả cho thấy, với dầm bằng vật liệu FGM:

- Lực tới hạn luôn ứng với dạng mất ổn định có $m = 1$;
- Khi tăng chỉ số tỷ lệ thể tích k hoặc tăng tỷ số kích thước L/h thì lực tới hạn của dầm giảm, đường cong tải trọng - độ võng sau tới hạn dịch chuyển xuống phía dưới cho thấy khả năng mang tải nén của dầm giảm (độ cứng của kết cấu giảm);
- Độ ổn định của dầm phụ thuộc lớn vào điều kiện biên; tương ứng với các điều kiện liên kết lý tưởng CC, CS, SS, CF thì khả năng ổn định của dầm giảm dần.

Các kết quả nhận được là nguồn tài liệu tham khảo hữu ích, góp phần cho công tác nghiên cứu, tính toán ổn định kết cấu dầm FGM chịu tải nén dọc trục.

Tài liệu tham khảo

- [1] Zhen, W., Wanji, C. (2008). [An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams](#). *Composite Structures*, 84(4):337–349.
- [2] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2012). [Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1):57–66.
- [3] Şimşek, M. (2010). [Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories](#). *Nuclear Engineering and Design*, 240(4):697–705.
- [4] Pradhan, K. K., Chakraverty, S. (2014). [Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 82:149–160.
- [5] Tossapanon, P., Wattanasakulpong, N. (2016). [Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation](#). *Composite Structures*, 142:215–225.
- [6] Akbaş, Ş. D. (2015). [Free vibration and bending of functionally graded beams resting on elastic foundation](#). *Research on Engineering Structures and Materials*, 1(1).
- [7] Avcar, M., Mohammed, W. K. M. (2018). [Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation](#). *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10).
- [8] Kahya, V., Turan, M. (2017). [Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory](#). *Composites Part B: Engineering*, 109:108–115.
- [9] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2018). Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformable FGM beams. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 5(1):13–24.
- [10] Sina, S. A., Navazi, H. M., Haddadpour, H. (2009). [An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams](#). *Materials & Design*, 30(3):741–747.
- [11] Atmane, H. A., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S. R. (2015). [A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities](#). *Steel and Composite Structures*, 19(2):369–384.
- [12] Atmane, H. A., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). [Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
- [13] Kaddari, M., Kaci, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Bourada, F., Tounsi, A., Bedia, E. A., Al-Osta, M. A. (2020). [A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: bending and free vibration analysis](#). *Computers and Concrete*, 25(1):37–57.

- [14] Akbaş, Ş. D. (2017). [Thermal Effects on the Vibration of Functionally Graded Deep Beams with Porosity](#). *International Journal of Applied Mechanics*, 09(05):1750076.
- [15] Wattanasakulpong, N., Chaikittiratana, A. (2015). [Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method](#). *Meccanica*, 50(5):1331–1342.
- [16] Phuong, N. T. B., Tu, T. M., Phuong, H. T., Long, N. V. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE) - NUCE*, 13(1):33–45.
- [17] Long, N. V., Huỳnh, N. T. (2020). [Phân tích ổn định kết cấu dầm vật liệu xốp chịu nén dọc trục với các điều kiện biên khác nhau](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD) - ĐHXDHN*, 14(2V): 97–106.
- [18] She, G.-L., Yuan, F.-G., Ren, Y.-R. (2017). [Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory](#). *Applied Mathematical Modelling*, 47:340–357.
- [19] Akbas, S. D. (2017). [Post-buckling responses of functionally graded beams with porosities](#). *Steel and Composite Structures*, 24(5):579–589.
- [20] Lei, J., He, Y., Li, Z., Guo, S., Liu, D. (2019). [Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 209:811–829.
- [21] Daneshmehr, A., Heydari, M., Akbarzadeh Khorshidi, M. (2013). Post-buckling analysis of FGM beams according to different shear deformation theories. *International Journal of Multidisciplinary and Current Research*, 1:37–49.
- [22] Zhang, J., Zheng, W. (2020). [Elastoplastic buckling of FGM beams in thermal environment](#). *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 33(1):151–161.
- [23] Li, S.-R., Batra, R. C. (2013). [Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams](#). *Composite Structures*, 95:5–9.
- [24] Zhang, D.-G., Zhou, Y.-H. (2008). [A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface](#). *Computational Materials Science*, 44(2):716–720.
- [25] Yin, S., Yu, T., Liu, P. (2013). [Free Vibration Analyses of FGM Thin Plates by Isogeometric Analysis Based on Classical Plate Theory and Physical Neutral Surface](#). *Advances in Mechanical Engineering*, 5: 634584.
- [26] Zhang, D.-G. (2013). [Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 100:121–126.
- [27] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
- [28] Wang, C. M., Ke, L. L., Chowdhury, A. N. R., Yang, J., Kitipornchai, S., Fernando, D. (2017). [Critical examination of midplane and neutral plane formulations for vibration analysis of FGM beams](#). *Engineering Structures*, 130:275–281.
- [29] Chi, S.-H., Chung, Y.-L. (2006). [Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis](#). *International Journal of Solids and Structures*, 43(13):3657–3674.
- [30] Bao, G., Wang, L. (1995). [Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings](#). *International Journal of Solids and Structures*, 32(19):2853–2871.
- [31] Reddy, J. N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press.
- [32] Bích, Đ. H. (2000). *Lý thuyết đàn hồi*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.