Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, NUCE 2020. 14 (5V): 197–210

PHÂN TÍCH TẦN SỐ RIÊNG VÀ DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA DẦM BÊ TÔNG ỨNG SUẤT TRƯỚC VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÁC NHAU

Nguyễn Sỹ Nam[a,*], Lê Ngọc Chấn[a], Phạm Hồng Anh[a]

[a]*Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng, số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 01/09/2020, Sửa xong 25/09/2020, Chấp nhận đăng 28/09/2020

Tóm tắt

Ngày nay trong các ngành giao thông vận tải, xây dựng việc sử dụng các loại dầm hoặc sàn bê tông cốt thép (BTCT) dự ứng lực (ứng suất trước - ƯST) rất phổ biến. Việc nghiên cứu các loại dầm này thường tập trung vào bài toán tĩnh. Các đặc trưng riêng của kết cấu như tần số dao động riêng, dạng dao động riêng và tỷ số cản là các tham số có ảnh hưởng lớn tới phản ứng động lực học của công trình. Chúng được sử dụng trong cả phân tích, thiết kế lẫn kiểm định công trình. Hơn nữa, trong các nghiên cứu điều khiển giảm dao động cho các công trình chịu tải trọng động, các tần số riêng và dạng dao động riêng là hai trong các thông số rất quan trọng cần được xác định. Do đó, nghiên cứu này tập trung xác định các tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của dầm bê tông ứng suất trước với các điều kiện biên khác nhau. Nghiên cứu đã thiết lập được các phương trình đặc trưng cho phép xác định tần số dao động riêng và các hàm dạng riêng của dao động. Trên cơ sở đó sử dụng phương pháp số Newton – Raphson trên nền phần mềm Matlab để phân tích số các bài toán đó.

Từ khoá: dầm; bê tông ứng lực trước; tần số riêng; dạng dao động riêng; phương pháp Newton – Raphson; dầm Euler – Bernoulli.

ANALYSIS OF NATURAL FREQUENCY AND VIBRATION MODAL FUNCTION OF PRE-STRESSED CONCRETE BEAM WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS

Abstract

Today, the transportation and construction industry commonly use beams and prestressed concrete floors. The research of prestressed concrete beams and slabs often focuses on the static problem. Specific characteristics of the structure, such as natural frequencies, vibration modal functions and drag coefficients are parameters that have great influence on the responses of structural dynamics. They are used in the analysis, design and building inspection. Moreover, the research of vibration control for buildings under dynamic loads, which natural frequencies and vibration modal functions are two of the very significant parameters that need to be determined. Therefore, this research focuses on identifying natural frequencies and vibration modal functions of prestressed concrete beam with different boundary conditions. The research has established characteristic equations to determine natural vibration frequencies and modal functions. Based on that, using the Newton-Raphson numerical method by Matlab software to analyze the problems.

Keywords: beam; prestressed concrete; natural frequency; vibration modal function; Newton-Raphson method; Euler – Bernoulli beam.

https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(5V)-16

[*]Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* namns@nuce.edu.vn (Nam, N. S.)

1. Giới thiệu

Kết cấu bê tông cốt thép ứng suất trước đã được sử dụng khá lâu trên thế giới. Ở các nước phát triển, đã được sử dụng phổ biến trong các cấu kiện dầm, cầu bê tông từ thập niên 70 của thế kỷ trước. Ở Việt Nam, cấu kiện ứng suất trước cũng được đưa vào sử dụng trong giao thông, xây dựng khoảng hai thập kỉ qua. Nguyên lý của bê tông ứng suất trước là tạo ra ứng lực nén trước của bê tông để triệt tiêu ứng suất kéo xuất hiện trong giai đoạn sử dụng cấu kiện bê tông cốt thép. Để có ứng lực nén trước trong bê tông ta phải tạo ra ứng lực kéo trong các cốt thép cường độ cao rồi sau đó lợi dụng tính dính bám của các cốt thép đó với bê tông hoặc dùng các mấu neo để truyền ứng lực kéo trong cốt thép vào bê tông, tạo thành ứng lực nén trước cho bê tông.

Các phương pháp tính toán thiết kế kết cấu BTCT ƯST dưới tác dụng của tải trọng tĩnh đã được đưa vào các tiêu chuẩn và được áp dụng khá phổ biến trên thế giới cũng như tại Việt Nam [1–5]. Các vấn đề như vật liệu dự ứng lực, phương pháp tạo ứng suất trước, tìm nội lực dầm ứng suất trước siêu tĩnh, các vấn đề về dão, về hồi phục của vật liệu, ... cũng đã được trình bày trong các tài liệu nêu trên. Các nghiên cứu này cũng chỉ ra loại cấu kiện ƯST có nhiều ưu điểm nổi bật như: có thể sử dụng bê tông cường độ cao và cốt thép cường độ cao, các tính chất này là không hợp lý hoặc không dùng được cho kết cấu BTCT thường vì bê tông cường độ cao không có ý nghĩa nhiều đối với vùng chịu kéo của dầm BTCT thường, còn cốt thép có cường độ cao sẽ không sử dụng hết khả năng của nó nếu dùng cho BTCT thường; BTCT ƯST có thể hạn chế hoặc loại bỏ hoàn toàn khe nứt bên trong bê tông, đồng thời khả năng chịu nén của bê tông cường độ cao có thể được sử dụng hết trên toàn bộ tiết diện dầm, tức là trong dầm BTCT ƯST, bê tông cường độ cao được sử dụng hiệu quả hơn nhiều so với trong dầm BTCT thường; ngoài ra, dầm BTCT ƯST có độ võng nhỏ vì luôn có độ vồng do lực nén của cốt thép lên bê tông gây ra, do đó cho phép vượt nhịp lớn so với BTCT thường.

So với tính toán thiết kế kết cấu BTCT ƯST dưới tác dụng của tải trọng tĩnh, các vấn đề lý thuyết về động lực học và dao động của dầm ứng suất trước trên thế giới cũng như ở Việt Nam vẫn chưa được nghiên cứu phổ biến. Trong nghiên cứu về động lực học thì các thông số tần số riêng, dạng dao động riêng và hệ số cản là các thông số cần phải xác định trước. Hơn nữa, trong các nghiên cứu điều khiển giảm dao động cho các công trình chịu tải trọng động [6], các tần số riêng và dạng dao động riêng là hai trong các thông số rất quan trọng cần được xác định. Trong [7] đã khảo sát ảnh hưởng của lực dọc đến tần số riêng và dao động tự do của một dầm mảnh có ứng suất trước theo một mô hình dầm giản đơn trên hai gối tựa. Hiệu ứng "mềm hóa dầm bằng nén trước" biểu thị sự suy giảm tần số riêng uốn của dầm do nén trước đã được đề cập trong [8]. Nghiên cứu [9] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với thực nghiệm để đánh giá ảnh hưởng của ứng suất trước đến tần số riêng của dầm có biên tự do. Theo tài liệu [10] tác giả đã khảo sát đáp ứng động lực học của cầu dư ứng lực ở Việt Nam dưới tác dụng của hoạt tải khai thác. Bên cạnh đó, các nghiên cứu về tần số riêng và dạng dao động riêng của các loại dầm với các vật liệu và các lý thuyết dầm khác nhau cũng được nghiên cứu như ở các tài liệu [11–15].

Trong bài báo này, các tác giả sử dụng nguyên lý d'Alembert để thiết lập phương trình dao động của dầm ứng suất trước và xác định dạng dao động tổng quát cho dầm. Từ dạng dao động tổng quát đó đi thiết lập các phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng cho từng dầm với các điều kiện biên khác nhau. Các phương trình đặc trưng đó thường là các phương trình đại số phi tuyến phức tạp, do đó bào báo đã sử dụng phương pháp Newton-Raphson và phần mềm Matlab để giải các phương trình này.

2. Phương trình dao động, phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng của dầm ứng suất trước

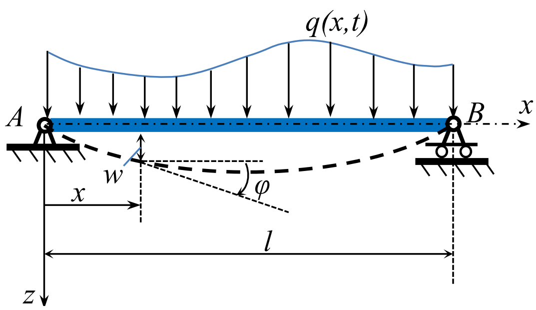
2.1. Phương trình dao động của dầm ứng suất trước

Trong phần này, để lập phương trình dao động của dầm ứng suất trước ta sử dụng lý thuyết dầm Euler - Bernoulli như sau:

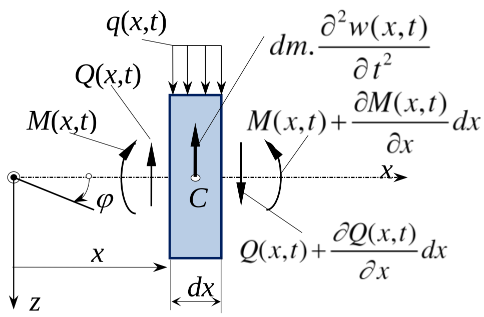
Xét mô hình dầm như Hình 1. Trục hình học của dầm là thẳng khi chưa biến dạng. Chọn trục tọa độ x trùng với trục hình học khi chưa biến dạng, trục z vuông góc với trục của dầm. Bỏ qua dao động xoắn và dao động dọc trục. Dầm chỉ thực hiện dao động uốn theo phương đứng z và chịu tải trọng phân bố $q(x,t)$ theo phương đứng. Do đó, độ võng w, góc xoay mặt cắt ngang φ, mômen uốn M và lực cắt Q là các hàm của tọa độ x và thời gian t:

$$w(x,t), \varphi(x,t), M(x,t), Q(x,t) \tag{1}$$

Để thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm, ta tách một phân tố có chiều dài dx của dầm. Các thành phần lực tác dụng lên phân tố như Hình 2.



Hình 1. Dầm chịu tải trọng $q(x,t)$



Hình 2. Phần tử mặt cắt dầm

Áp dụng nguyên lý d'Alembert cho phân tố dầm ta thu được phương trình:

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x,t) \tag{2}$$

trong đó $dm = \mu(x)\,dx = \rho A(x)\,dx$, với $\mu(x)$ là khối lượng trên đơn vị dài của dầm, ρ là khối lượng trên đơn vị thể tích dầm, $A(x)$ là diện tích mặt cắt ngang của dầm.

Ta có mối quan hệ giữa các yếu tố lực và biến dạng của dầm [16]:

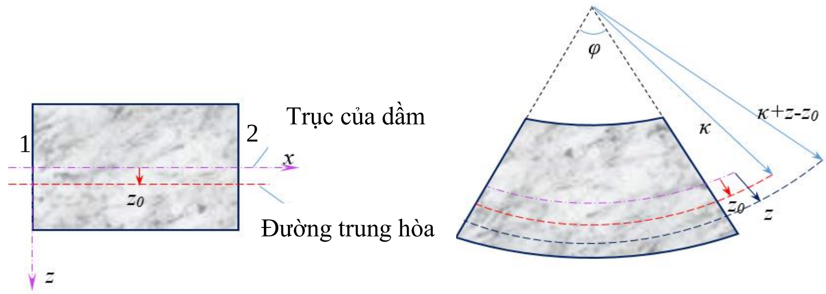
$$Q(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x}; \quad M = \int_A z\sigma_{xx}dA; \quad \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \tag{3}$$

trong đó, $\varepsilon_{xx}(x,z,t)$ là biến dạng dài tỉ đối theo phương x. Trong trường hợp dầm chịu ứng lực trước, thì ứng lực trước gây ra biến dạng ban đầu. Xét tại vị trí mặt cắt ngang có tọa độ x, biến dạng dài tỉ đối đó là:

$$\varepsilon_0(x,z,0) = \varepsilon_0(x) \tag{4}$$

Sau khi biến dạng uốn, gọi biến dạng dài tỉ đối sinh ra là $\varepsilon^*_{xx}(x,z,t)$. Trong giới hạn tuyến tính, biến dạng dài tổng thể bằng biến dạng dài ban đầu do ứng lực trước và biến dạng dài do dầm chịu uốn:

$$\varepsilon_{xx}(x,z,t) = \varepsilon_0(x) + \varepsilon^*_{xx}(x,z,t) \tag{5}$$



Hình 3. Biến dạng dài của một đoạn dầm

Xét một phân tố dầm chịu uốn như Hình 3, biến dạng dài tỷ đối của một lớp z nào đó của dầm phụ thuộc vào tọa độ z, khi $z = z_0$ thì $\varepsilon(z_0) = 0$. Đối với dầm đồng chất đối xứng thì dễ dàng xác định vị trí của đường trung hòa z_0. Tuy nhiên đối với dầm bất kỳ lớp trung hòa nói chung không trùng với trục đối xứng của dầm. Ký hiệu κ là bán kính cong của đường trung hòa (trục của dầm). Do đường trung hòa không biến dạng dài nên khoảng cách ban đầu giữa hai mặt cắt ngang tính theo đường trung hòa là:

$$L_0 = \kappa d\varphi \tag{6}$$

Khoảng cách giữa điểm tại mặt cắt 1 và điểm tại mặt cắt 2 của lớp vật liệu có tọa độ z sau khi biến dạng sẽ là:

$$L = (\kappa + z - z_0) d\varphi \tag{7}$$

Từ công thức (6) và (7) nếu chọn $z_0 = 0$ ta suy ra biến dạng tỷ đối của lớp vật liệu có tọa độ z là:

$$\varepsilon_{xx}^{*}(z) = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{z}{\kappa} \tag{8}$$

trong đó độ cong của dầm được xác định theo công thức toán:

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

Thay biểu thức (9) vào biểu thức (8), bỏ qua vô cùng bé bậc cao ta được:

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) \approx \varepsilon_0(x) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \tag{10}$$

Thế biểu thức (10) thay vào (3) ta được:

$$M = \varepsilon_0(x) E \int_A z dA - E \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} \int_A z^2 dA \tag{11}$$

Ta có công thức xác định trọng tâm và mômen quán tính mặt cắt ngang:

$$A z_C = \int_A z dA; \quad I(x) = \int_A z^2 dA \tag{12}$$

trong đó z_C là tọa độ trọng tâm theo phương trục z, khi dầm biến dạng thì $z_C = w$. Thay biểu thức (12) vào (11), rồi thay biểu thức (11) vào (3) ta được

$$M(x,t) = E\varepsilon_0(x)A(x)w - EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{13}$$

$$Q(x,t) = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E\varepsilon_0(x)A(x)w\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \tag{14}$$

Thay công thức (14) vào phương trình (2) thu được phương trình đạo hàm riêng mô tả dao động uốn của dầm có ứng suất trước:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\varepsilon_0(x)EA(x)w\right] + \rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{15}$$

Trong trường hợp dầm có mặt cắt ngang không đổi, phương trình (15) có dạng:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \varepsilon_0 EA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{16}$$

Từ (16) ta suy ra phương trình dao động tự do của dầm có ứng suất trước:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \varepsilon_0 EA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

Khi $\varepsilon_0 = 0$ (dầm không có ứng suất trước), từ phương trình (16) được phương trình dao động uốn của dầm Euler – Bernoulli thường:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t) \tag{18}$$

2.2. *Phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng*

Áp dụng phương pháp Bernouli, ta tìm nghiệm phương trình (17) dưới dạng:

$$w(x,t) = X(x)T(t) \tag{19}$$

trong đó $X(x)$ là hàm dạng thỏa mãn điều kiện biên, cũng là hàm biên độ dao động uốn tại vị trí x; $T(x)$ là hàm dao động phụ thuộc vào điều kiện đầu của dao động.

Thế biểu thức (19) vào phương trình (17), biến đổi ta thu được:

$$EI\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} - \varepsilon_0 EA\frac{X''(x)}{X(x)} = -\rho A\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \tag{20}$$

Do vế phải của phương trình (20) chỉ phụ thuộc vào t, còn vế trái chỉ phụ thuộc vào x, nên hai vế phải bằng một hằng số. Ta ký hiệu hằng số là ω^2. Từ (20) ta có:

$$\frac{EI}{\rho A}\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} - \varepsilon_0\frac{EAX''(x)}{\rho AX(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \tag{21}$$

Từ (21) ta suy ra hai phương trình:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{22}$$

$$X^{(IV)}(x) - \varepsilon_0 \frac{A}{I} X''(x) - \frac{\omega^2 \mu}{EI} X(x) = 0 \tag{23}$$

Sự khác nhau cơ bản giữa dầm có ứng suất trước và dầm không có ứng suất trước là số hạng giữa trong phương trình (23). Phương trình đặc trưng toán học của phương trình vi phân (23) có dạng:

$$s^4 - 2\beta s^2 - \alpha^2 = 0 \tag{24}$$

trong đó

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu}{EI}; \quad 2\beta = \varepsilon_0 \frac{A}{I} \tag{25}$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng toán học (24):

$$s_1 = i\gamma; \quad s_2 = -i\gamma; \quad s_3 = \delta; \quad s_4 = -\delta \tag{26}$$

trong đó:

$$\gamma = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \beta} \tag{27}$$

$$\delta = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} + \beta} \tag{28}$$

Theo lí thuyết phương trình vi phân tuyến tính, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp bốn (23) có dạng:

$$X(x) = B_1 e^{\delta x} + B_2 e^{-\delta x} + B_3 e^{i\gamma x} + B_4 e^{-i\gamma x} \tag{29}$$

Biến đổi phương trình (29) về dạng lượng giác thu được hàm dạng riêng tổng quát:

$$X(x) = C_1 \cos\gamma x + C_2 \sin\gamma x + C_3 \cosh\delta x + C_4 \sinh\delta x \tag{30}$$

trong đó C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số, được xác định từ các điều kiện biên.

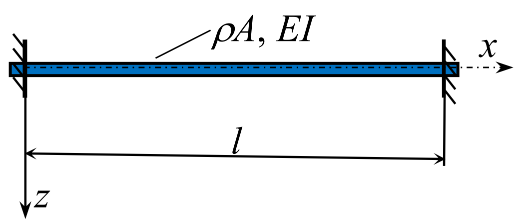
Từ hàm dạng tổng quát (30), ứng với mỗi loại dầm có điều kiện biên khác nhau ta sẽ thu được biểu thức hàm dạng khác nhau và biểu thức xác định tần số riêng khác nhau:

2.3. Phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng của dầm hai đầu ngàm

a. Phương trình đặc trưng

Các điều kiện biên của dầm hai đầu ngàm như Hình 4 là độ võng $w(x,t)$ và góc xoay $w'(x,t)$ tại hai biên ($x = 0$ và $x = l$) đều bằng 0:

$$w(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$w(l,t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$
$$w'(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$
$$w'(l,t) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$



Hình 4. Dầm hai đầu ngàm

Với các điều kiện biên trên từ các biểu thức (30) và đạo hàm của nó suy ra bốn phương trình xác định các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4:

$$X(0) = 0 : C_1 + C_3 = 0 \tag{31}$$

$$X(l) = 0 : C_1 \cos\gamma l + C_2 \sin\gamma l + C_3 \cosh\delta l + C_4 \sinh\delta l = 0 \tag{32}$$

$$X'(0) = 0 : C_2\gamma + C_4\delta = 0 \tag{33}$$

$$X'(l) = 0 : -C_1\gamma \sin\gamma l + C_2\gamma \cos\gamma l + C_3\delta \sinh\delta l + C_4\delta \cosh\delta l = 0 \tag{34}$$

Từ phương trình (31) và (33) suy ra:

$$C_1 = -C_3; \quad C_4 = -\frac{\gamma}{\delta} C_2 \tag{35}$$

Thế biểu thức (35) vào các phương trình (32) và (34) ta được:

$$C_1(\cos\gamma l - \cosh\delta l) + C_2(\sin\gamma l - \frac{\gamma}{\delta}\sinh\delta l) = 0 \tag{36}$$

$$-C_1(\gamma\sin\gamma l + \delta\sinh\delta l) + C_2(\gamma\cos s\gamma l - \gamma\cosh\delta l) = 0 \tag{37}$$

Điều kiện cần để cho C_1, C_2 không đồng thời bằng 0 là:

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma l - \cosh\delta l & \sin\gamma l - \dfrac{\gamma}{\delta}\sinh\delta l \\ -\gamma\sin\gamma l - \delta\sinh\delta l & \gamma\cos\gamma l - \gamma\cosh\delta l \end{vmatrix} = 0 \tag{38}$$

Khai triển định thức với chú ý $\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, ta rút ra được phương trình đặc trưng dao động uốn của dầm ứng suất trước với biên là hai đầu ngàm:

$$\begin{aligned} &2\gamma\delta - 2\gamma\delta\cos\gamma l\cosh\delta l + \delta^2\sin\gamma l\sinh\delta l - \gamma^2\sin\gamma l\sinh\delta l = 0 \\ &\left(\delta^2 - \gamma^2\right)\sin\gamma l\sinh\delta l + 2\gamma\delta\left(1 - \cos\gamma l\cosh\delta l\right) = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

trong đó γ, δ là các hàm của α, xác định như biểu thức (27), (28). Rút gọn ta thu được phương trình đặc trưng:

$$f(\alpha) = 2\beta\sin\gamma l\sinh\delta l + 2\alpha\left(1 - \cos\gamma l\cosh\delta l\right) = 0 \tag{40}$$

Phương trình (40) là phương trình đại số phi tuyến, có vô số nghiệm số, giải phương trình ta xác định được các nghiệm α_k ($k = 1, 2, \ldots$). Từ đó ta tính được tần số riêng của dầm 2 đầu ngàm chịu ứng suất trước theo biểu thức (25):

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\mu}\alpha_k} \tag{41}$$

Trong thực tế, khi nào cho biết ε_0 và các tham số của dầm ta tính được $\beta = \varepsilon_0 \dfrac{A}{2I}$. Khi biết β thì γ và δ là hàm của biến α. Giải phương trình (40) bằng phương pháp số ta được α_k. Sau đó theo (41) ta được ω_k.

b. Dạng dao động riêng

Từ phương trình (37) ta có:

$$C_1 = \frac{\gamma\cos(\gamma l) - \gamma\cosh(\delta l)}{\gamma\sin(\gamma l) + \delta\sinh(\delta l)} C_2 = h(\gamma, \delta) C_2 \tag{42}$$

Theo (35) ta có:

$$C_3 = -C_1 = -h(\gamma, \delta) C_2; \quad C_4 = -\frac{\gamma}{\delta} C_2 \tag{43}$$

Thay các biểu thức (43) vào phương trình hàm dạng tổng quát (30) ta thu được dạng dao động riêng của dầm ứng suất trước với biên hai đầu ngàm:

$$X(x) = \left[h(\gamma, \delta)(\cos\gamma x - \cosh\delta x) + \sin\gamma x - \frac{\gamma}{\delta}\sinh\delta x\right] C_2 \tag{44}$$

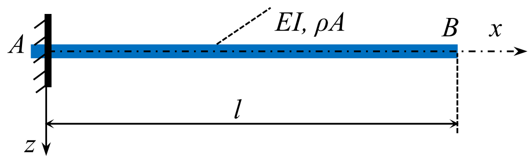
Giải phương trình đặc trưng ta xác định được các nghiệm α_k, thay vào các công thức (27), (28) ta xác định được các giá trị γ_k, δ_k, thay các giá trị này vào (44) ta có biểu thức hàm dạng dao động riêng:

$$X_k(x) = \left[\frac{\gamma_k \cos(\gamma_k l) - \gamma_k \cosh(\delta_k l)}{\gamma_k \sin(\gamma_k l) - \delta_k \sinh(\delta_k l)} (\cos(\gamma_k x) - \cosh(\delta_k x)) + \sin(\gamma_k x) - \frac{\gamma_k}{\delta_k} \sinh(\delta_k x) \right] C_2 \tag{45}$$

trong đó $k = 1, 2, 3, \ldots$ Với mỗi k ta có tần số dao động riêng bậc k và dạng dao động riêng thứ k.

2.4. Phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng của dầm một đầu ngàm một đầu tự do

Điều kiện biên của dầm 1 đầu ngàm, 1 đầu tự do như Hình 5:



Hình 5. Dầm một đầu ngàm một đầu tự do

Tại đầu ngàm: $x = 0$, độ võng bằng 0, góc xoay bằng 0:

$$\begin{aligned} &w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ &w'(0, t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

Tại đầu tự do: $x = l$, mômen bằng 0, lực cắt bằng 0:

$$w''(l, t) = 0 \Rightarrow X''(l) = 0; \quad w'''(l, t) = 0 \Rightarrow X'''(l) = 0 \tag{47}$$

Với các điều kiện biên này, tương tự như trường hợp trên, từ các biểu thức (30) và đạo hàm của nó suy ra được phương trình đặc trưng:

$$\gamma\left(\gamma^4 + \delta^4\right) + 2\delta^2\gamma^3 \cos\gamma l \cosh\delta l + \delta\gamma^2\left(\gamma^2 - \delta^2\right) \sin\gamma l \sinh\delta l = 0 \tag{48}$$

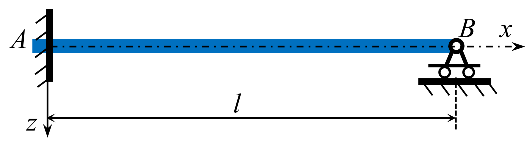
Ta cũng thu được hàm dạng riêng của dao động:

$$X(x) = \left(\frac{\gamma_k \delta_k^2 \cosh\delta_k l + \gamma_k^3 \cos\gamma_k l}{\gamma_k^3 \sin\gamma_k l - \delta_k^3 \sinh\delta_k l} (\cos\gamma_k x - \cosh\delta_k x) + \sin\gamma_k x - \frac{\gamma_k}{\delta_k} \sinh\delta_k x \right) C_2 \tag{49}$$

với $k = 1, 2, 3, \ldots$

2.5. Phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng của dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa

Điều kiện biên của dầm 1 đầu ngàm, 1 đầu gối như Hình 6:



Hình 6. Dầm một đầu ngàm một đầu gối

Tại đầu ngàm: $x = 0$, độ võng bằng 0, góc xoay bằng 0:

$$\begin{aligned} &w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0; \\ &w'(0, t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Tại đầu gối tựa: $x = l$, độ võng bằng 0, mômen bằng 0:

$$w(l, t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0; \quad w''(l, t) = 0 \Rightarrow X''(l) = 0 \tag{51}$$

Với các điều kiện biên này, từ các biểu thức (30) và đạo hàm của nó, biến đổi ta suy ra được phương trình đặc trưng:

$$(\gamma^2 - \delta^2) \cos\gamma l \sin\gamma l - \gamma\delta(1 + \frac{\gamma^2}{\delta^2}) \cos\gamma l \sinh\delta l + 2\delta^2 \cosh\delta l \sin\gamma l = 0 \tag{52}$$

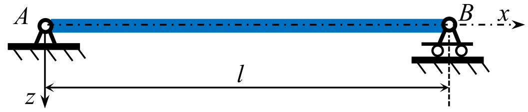
Ta cũng thu được hàm dạng riêng của dao động:

$$X_k(x) = \frac{\delta_k^2 \sin(\gamma_k l) - \gamma_k \delta_k \sinh(\delta_k l)}{\gamma_k^2 \cos(\gamma_k l) - \delta_k^2 \cosh(\delta_k l)} (-\cos(\gamma_k x) + \cosh(\delta_k x)) + \sin(\gamma_k x) - \frac{\gamma_k}{\delta_k} \sinh(\delta_k x) \tag{53}$$

với $k = 1, 2, 3, \ldots$

2.6. Phương trình đặc trưng và dạng dao động riêng của dầm hai đầu gối tựa

Điều kiện biên của dầm hai đầu gối tựa như Hình 7.



Hình 7. Dầm một đầu ngàm hai đầu gối tựa

Tại đầu gối thứ nhất: $x = 0$, độ võng bằng 0, mômen bằng 0:

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 \\ w''(0,t) = 0 &\Rightarrow X''(0) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Tại đầu gối thứ hai: $x = l$, độ võng bằng 0, mômen bằng 0:

$$w(l,t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0; \quad w''(l,t) = 0 \Rightarrow X''(l) = 0$$

Với các điều kiện biên này, từ các biểu thức (30) và đạo hàm của nó, biến đổi ta suy ra được phương trình đặc trưng:

$$\sin \gamma l = 0 \quad (55)$$

Giải phương trình ta được:

$$\gamma_k l = k\pi \Rightarrow \gamma_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (k = 1, 2, ...) \quad (56)$$

Theo công thức (27), biến đổi ta có:

$$\alpha_k^2 = \frac{k^4\pi^4}{l^4} + 2\beta k^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad (k = 1, 2, ...) \quad (57)$$

Từ công thức (25) ta suy ra:

$$\omega_k^2 = k^4 \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EI}{\mu} + k^2 \frac{\pi^2}{l^2} \varepsilon_0 \frac{E}{\rho}, \quad (k = 1, 2, ...) \quad (58)$$

Ta cũng thu được hàm dạng riêng của dao động:

$$X(x) = C_2 \sin \gamma x \quad (59)$$

Từ các phương trình đặc trưng viết cho dầm ứng suất trước với các điều kiện biên khác nhau ta thấy đó đều là phương trình đại số phi tuyến. Chỉ có dầm với điều kiện biên hai đầu gối tựa cho ta phương trình đặc trưng là hàm lượng giác đơn giản.

3. Phân tích số tần số riêng và dạng dao động riêng

Để phân tích số ta tiến hành giải các phương trình đặc trưng tìm các tần số riêng ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$, thay tần số riêng tìm được vào phương trình hàm dạng ta sẽ xác định được các dạng dao động riêng tương ứng. Các phương trình đặc trưng hầu hết là phương trình đại số phi tuyến, lời giải giải tích là rất khó thực hiện. Trong nghiên cứu này, phương trình đó được giải bằng phương pháp số Newton – Raphson. Đây là phương pháp được sử dụng rất phổ biến, hội tụ nhanh và đã được viết thành hàm trong phần mềm Matlab. Tuy nhiên, nó có nhược điểm là phải xác định được nghiệm gần đúng đầu vào và kết quả chỉ cho một nghiệm chính xác. Do đó, để xác định nghiệm gần đúng ban đầu này ta có thể dùng phương pháp số khác là phương pháp dây cung. Với cách này ta có thể xác định tùy ý số tần số riêng.

Đối với các loại dầm đơn thông dụng tại Việt Nam [1, 2], biến dạng đầu của cốt thép là kéo, thường khoảng 0,7%, còn biến dạng dài tỷ đối ban đầu của bê tông là nén, thường khoảng 0,1%. Do đó biến dạng dài tỉ đối được chọn phạm vi $-0{,}001 \leq \varepsilon_0 \leq -0{,}0001$. Trường hợp dầm $\varepsilon_0 > 0$ tuy rằng không thực tế cho trường hợp dầm bê tông ứng suất trước nhưng bài báo cũng thực hiện tính toán cho trường hợp $\varepsilon_0 = 0{,}001$ để có cái nhìn tổng quát hơn về dầm ứng suất trước nói chung. Bên cạnh đó, kết quả tính toán trong bài báo cũng được so sánh với kết quả tính toán cho dầm Euler – Bernoulli thường trong tài liệu [17].

Dưới đây là bảng tham số cầu Bùng như Bảng 1, một loại cầu bê tông cốt thép dự ứng lực được xây dựng ở tỉnh Nghệ An [10], và được sử dụng để tính toán.

Bảng 1. Thông số của dầm bê tông cốt thép ứng lực trước

TT	Kí hiệu	Giá trị	Diễn giải
1	l	20,4 m	Chiều dài dầm
2	ρ	2500 kg/m^3	Khối lượng riêng
3	$\mu = \rho A$	2277 kg/m	Khối lượng trên đơn vị chiều dài
4	E	0,315 × 1011 N/m^2	Môđun đàn hồi
5	EI	4157000800 Nm^2	Độ cứng chống uốn

Dưới đây là kết quả tính toán tần số riêng và dạng dao động riêng cho dầm ứng suất trước với một số biên khác nhau:

3.1. Dầm hai đầu ngàm

Trong Bảng 2 là tần số riêng của dầm hai đầu ngàm ƯST với các giá trị biến dạng tỉ đối ban đầu khác nhau.

Bảng 2. Tần số riêng của dầm hai đầu ngàm ứng suất trước

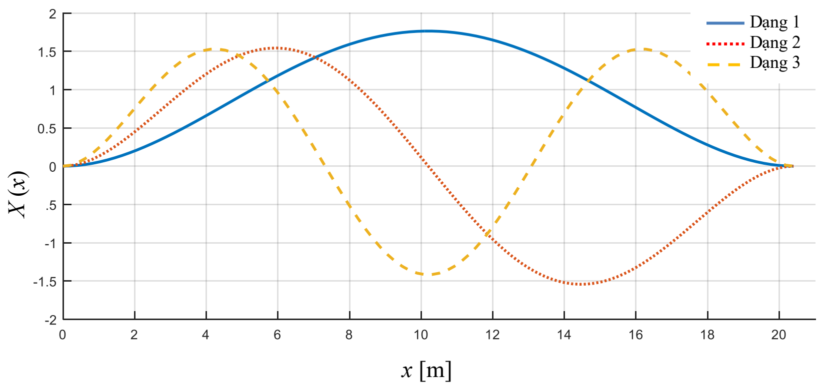
Bậc dao động	Dầm ứng suất trước (rad/s)					Dầm thường [17] (b)	Sai lệch % của (a) so với (b)
	$\varepsilon_0 = -0{,}0001$	$\varepsilon_0 = -0{,}0005$	$\varepsilon_0 = -0{,}001$ (a)	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0{,}001$		
1	72,383	71,346	70,025	72,640	75,156	72,640	3,60
2	199,887	198,487	196,721	200,236	203,686	200,236	1,76
3	392,161	390,631	388,709	392,543	396,338	392,543	0,98
4	648,492	646,888	644,877	648,893	652,883	648,893	0,62
5	968,921	967,270	965,202	969,334	973,448	969,334	0,43
6	1353,442	1351,758	1349,650	1353,863	1358,062	1353,863	0,31
7	1802,053	1800,345	1798,208	1802,480	1806,742	1802,480	0,24
8	2314,754	2313,028	2310,868	2315,186	2319,495	2315,186	0,19
9	2891,544	2889,803	2887,626	2891,979	2896,326	2891,979	0,15
10	3532,423	3530,670	3528,478	3532,861	3537,238	3532,861	0,12
15	7698,146	7696,357	7694,120	7698,593	8728,485	7698,593	0,06
20	13466,077	13464,270	13462,010	13466,529	13471,046	13466,529	0,03

Từ Bảng 2 cho thấy:

Khi dầm chịu nén trước ($\varepsilon_0 < 0$) thì tần số riêng của dầm ƯST giảm so với dầm thường, nén càng nhiều thì tần số riêng càng giảm nhiều. Đây gọi là hiện tượng "mềm hóa" trong dầm ứng suất trước. Còn khi dầm chịu kéo trước ($\varepsilon_0 > 0$) thì tần số riêng sẽ tăng lên so với dầm thường.

Khi dầm chịu nén trước (hoặc kéo trước) càng lớn thì tần số riêng càng giảm (hoặc tăng) so với dầm thường. Tần số riêng bậc 1 sẽ lệch so với tần số riêng dầm thường nhiều nhất (3,6%) và sai lệch này giảm nhanh với tần số bậc cao hơn.

Trên Hình 8 là các dạng dao động riêng ứng với tần số bậc 1, 2 và 3 trong trường hợp biến dạng tỉ đối ban đầu $\varepsilon_0 = -0{,}001$. Dạng dao động riêng này là phù hợp với điều kiện biên 2 đầu ngàm của dầm UST.



Hình 8. Các dạng dao động riêng của dầm hai đầu ngàm, $\varepsilon_0 = -0{,}001$

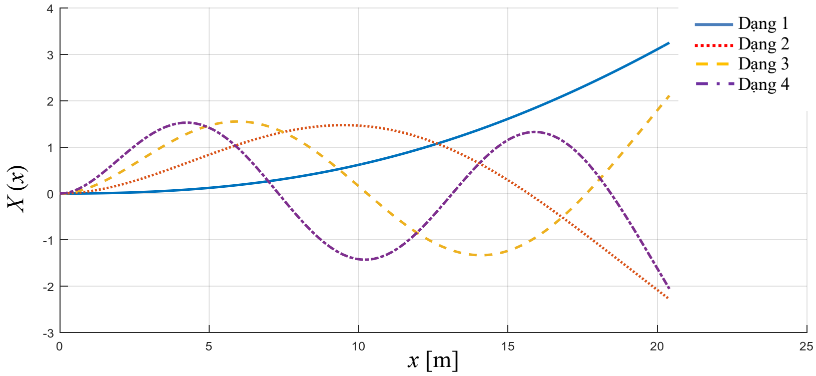
3.2. Dầm một đầu ngàm một đầu tự do

Trong Bảng 3 là tần số riêng của dầm một đầu ngàm một đầu tự do UST với các giá trị biến dạng tỉ đối ban đầu khác nhau. Kết quả cho thấy quy luật thay đổi tần số riêng tương tự như trên, tuy nhiên với dầm một đầu ngàm một đầu tự do tần số riêng nhỏ hơn nhiều dầm hai đầu ngàm, và như là "giảm 1 bậc" so với dầm hai đầu ngàm. Sai lệch tần số so với dầm thường cũng tăng đáng kể (lớn nhất ở tần số thứ nhất 13,75%).

Bảng 3. Tần số riêng của dầm một đầu ngàm một đầu tự do

Bậc dao động	Dầm ứng suất trước (rad/s)					Dầm thường [17] (b)	Sai lệch % của (a) so với (b)
	$\varepsilon_0 = -0{,}0001$	$\varepsilon_0 = -0{,}0005$	$\varepsilon_0 = -0{,}001$ (a)	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0{,}001$		
1	11,284	10,690	9,846	11,416	12,713	11,416	13,75
2	71,258	69,527	68,636	71,540	75,587	71,540	4,06
3	199,968	197,871	196,814	200,315	205,450	200,315	1,75
4	392,156	389,858	388,704	392,538	398,218	392,538	0,98
5	648,493	646,085	644,877	648,893	654,870	648,893	0,62
6	968,921	966,443	965,202	969,334	975,498	969,334	0,43
7	1353,442	1350,915	1349,650	1353,863	1360,157	1353,863	0,31
8	1802,053	1799,491	1798,208	1802,480	1808,869	1802,480	0,24
9	2314,754	2312,164	2310,868	2315,186	2321,647	2315,186	0,19
10	2891,544	2888,932	2887,626	2891,979	2898,497	2891,979	0,15

Trên Hình 9 là các dạng dao động riêng ứng với tần số bậc 1, 2, 3 và 4 trong trường hợp biến dạng tỉ đối ban đầu $\varepsilon_0 = -0{,}001$. Dạng dao động riêng này là phù hợp với điều kiện biên của dầm này.



Hình 9. Các dạng dao động riêng dầm một đầu ngàm một đầu tự do, $\varepsilon_0 = -0{,}001$

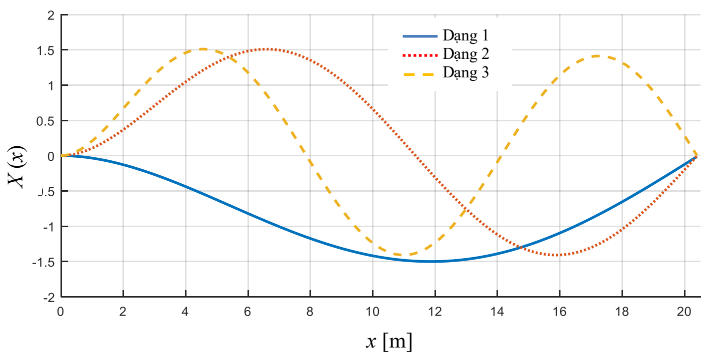
3.3. Dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa

Trong Bảng 4 là tần số riêng của dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa với các giá trị biến dạng tỉ đối ban đầu khác nhau. Với dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa tần số riêng nhỏ hơn dầm hai đầu ngàm nhưng lớn hơn dầm một đầu ngàm một đầu tự do.

Bảng 4. Tần số riêng của dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa

Bậc dao động	Dầm ứng suất trước (rad/s)					Dầm thường [17] (b)	Sai lệch % của (a) so với (b)
	$\varepsilon_0 = -0{,}0001$	$\varepsilon_0 = -0{,}0005$	$\varepsilon_0 = -0{,}001$ (a)	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0{,}001$		
1	49,833	48,923	47,768	50,059	52,312	50,059	4,577
2	161,888	160,544	158,850	162,223	165,540	162,223	2,079
3	338,091	160,544	158,850	162,223	165,540	162,223	2,079
4	578,400	576,811	574,820	578,796	582,748	578,796	0,687
5	882,805	576,811	574,820	578,796	582,748	578,796	0,687
6	1251,303	881,164	879,109	883,215	887,304	883,215	0,465
7	1683,892	1682,190	1680,059	1684,318	1688,566	1684,318	0,253
8	2180,571	2178,848	2176,694	2181,001	2185,300	2181,001	0,197
9	2741,338	2739,601	2737,427	2741,772	2746,111	2741,772	0,158
10	3366,195	3364,445	3362,256	3366,632	3371,003	3366,632	0,130

Trên Hình 10 là 3 dạng dao động riêng đầu, các dạng dao động này là phù hợp với điều kiện biên.



Hình 10. Các dạng dao động riêng dầm một đầu ngàm một đầu gối tựa, $\varepsilon_0 = -0{,}001$

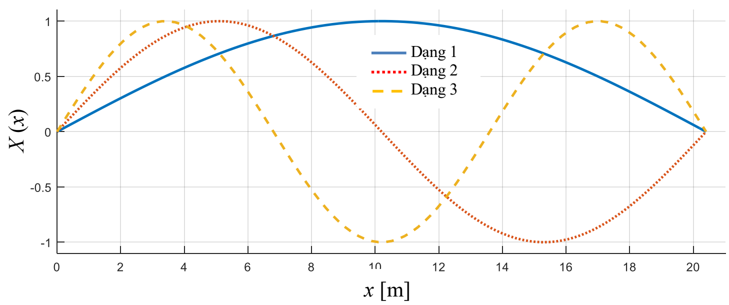
3.4. Dầm hai đầu gối tựa

Trong Bảng 5 là tần số riêng của dầm 2 đầu gối tựa, sai lệch tần số của dầm ƯST loại này so với dầm thường cùng loại là khá lớn ở các tần số đầu (lớn nhất 15,8% ở tần số bậc 1). Trường hợp này cũng là điều kiện biên thực tế của dầm cầu Bùng. Với cùng kích kích thước dầm, thì tần số riêng phụ thuộc vào điều kiện biên, tần số riêng này thể hiện và tỉ lệ thuận với độ cứng của các loại dầm.

Bảng 5. Tần số riêng của dầm hai đầu gối tựa

Bậc dao động	Dầm ứng suất trước (rad/s)					Dầm thường [2] (b)	Sai lệch % của (a) so với (b)
	$\varepsilon_0 = -0{,}0001$	$\varepsilon_0 = -0{,}0005$	$\varepsilon_0 = -0{,}001$ (a)	$\varepsilon_0 = 0$	$\varepsilon_0 = 0{,}001$		
1	31,574	28,595	26,982	32,044	36,409	32,044	15,80
2	127,709	124,870	123,426	128,176	132,757	128,176	3,71
3	287,930	285,114	283,696	288,397	293,022	288,397	1,63
4	512,239	509,431	508,021	512,705	517,347	512,705	0,91
5	800,636	797,832	796,426	801,102	805,751	801,102	0,58
6	1153,121	1150,319	1148,915	1153,587	1158,241	1153,587	0,41
7	1569,694	1566,893	1565,491	1570,160	1574,816	1570,160	0,30
8	2050,355	2047,555	2046,154	2050,822	2055,479	2050,822	0,23
9	2595,105	2592,305	2590,904	2595,571	2600,230	2595,571	0,18
10	3203,943	3201,144	3199,743	3204,409	3209,068	3204,409	0,15

Trên Hình 11 là các dạng dao động riêng ban đầu tương ứng với các tần số riêng ban đầu của dầm hai đầu gối tựa.



Hình 11. Các dạng dao động riêng của dầm hai đầu gối tựa, $\varepsilon_0 = -0{,}001$

4. Kết luận

Bài báo đã tập trung vào nghiên cứu xác định các tần số riêng và dạng dao động riêng của một số loại dầm có điều kiện biên khác nhau, từ kết quả nghiên cứu rút ra được các kết luận sau:

Phương trình đặc trưng xác định tần số riêng của dầm ƯST là các phương trình đại số phi tuyến (trừ trường hợp dầm hai đầu gối tựa là phương trình lượng giác), phương trình này có vô số nghiệm số là các tần số riêng. Khi dầm chịu nén trước ($\varepsilon_0 < 0$) thì tần số riêng của dầm ƯST giảm so với dầm thường, nén càng nhiều thì tần số riêng càng giảm nhiều. Đây gọi là hiện tượng "mềm hóa" trong dầm ứng suất trước. Còn khi dầm chịu kéo trước ($\varepsilon_0 > 0$) thì tần số riêng sẽ tăng lên so với dầm thường. Khi dầm chịu nén trước (hoặc kéo trước) càng lớn thì tần số riêng càng giảm (hoặc càng tăng) so với dầm thường. Tần số riêng bậc 1 sẽ lệch so với tần số riêng dầm thường nhiều nhất và sai lệch này giảm nhanh với tần số bậc cao hơn.

Chỉ một số tần số riêng đầu (bậc 1, 2, 3) mới cho sai lệch tần số riêng là đáng kể so với dầm không có ứng suất trước, các tần số bậc cao hơn gần như không đáng kể. Trong thực tế ta thấy cũng chỉ các tần số riêng bậc thấp mới có khả năng bị cộng hưởng do các tải trọng cưỡng bức gây ra, các tần số riêng bậc cao là rất lớn và hầu như không có loại tải nào có tần số cao như vậy. Hơn nữa, khi nghiên cứu bài toán ứng suất, biến dạng của các kết cấu, thì chủ yếu các thành phần đó tập trung ở tần số bậc 1, giảm rất nhanh khi các tần số có bậc cao lên (thường các nghiên cứu sử dụng 1 hoặc vài tần số đầu).

Nghiên cứu mới dừng lại dầm ƯST đàn hồi tuyến tính có ε_0 = const, có thể phát triển theo nhiều hướng khác nhau như cho bài toán sàn ƯST, bài toán dầm có ƯST có $\varepsilon_0(x)$ là hàm theo vị trí x (các hàm này sẽ phụ thuộc vào cách bố trí cốt thép dự ứng lực).

Ngoài ra tần số riêng chịu ảnh hưởng của ứng của ứng suất dư trong dầm, do đó việc suy giảm ứng suất dư trong quá trình khai thác cũng ảnh hưởng lớn đến tần số riêng. Đặc biệt, khi dầm bê tông có vết nứt thì ứng suất dư này có sự thay đổi khác thường, do đó tần số riêng sẽ thay đổi lớn, sự thay đổi này phụ thuộc vào vị trí, số lượng, kích thước và sự phát triển vết nứt. Trong tài liệu [8], bằng thực nghiệm các tác giả đã chỉ ra rằng khi dầm có vết nứt, thì quy luật không còn giống như nghiên cứu lý thuyết nữa. Vấn đề này mở ra hướng nghiên cứu lý thuyết tiếp theo nhằm lý giải các hiện tượng thực tiễn.

Tài liệu tham khảo

[1] Trung, N. V., Hà, H. (1996). *Cầu bê tông cốt thép*. Tập 1,2, Trường Đại học Giao thông vận tải, Hà Nội.

[2] Minh, P. Q., Phong, N. T., Cống, N. Đ. (2011). *Kết cấu bê tông cốt thép*. Nhà xuất bản khoa học và kĩ thuật, Hà Nội.

[3] Abeles, P. W., Bardhan-Roy B., K. (1981). *Prestressed Concrete Designer's Handbook*. 3 edition, CRC Press, New York.

[4] Japan Prestressed Concrete Engineering Association (1998). *Prestressed Concrete in Japan*.

[5] Lin T., Y., Burns N., H. (1981). *Design of prestressed concrete structures*. Wiley, New York.

[6] Phúc, V. Đ. (2019). *Điều khiển tối ưu dao động bằng kết hợp nhiều bộ giảm chấn động lực*. Luận án Tiến sĩ, Đại học Bách khoa Hà Nội.

[7] Kerr, A. D. (1976). On the dynamic response of a prestressed beam. *Journal of Sound and Vibration*, 49 (4):569–573.

[8] Saiidi, M., Douglas, B., Feng, S. (1994). Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges. *Journal of Structural Engineering*, 120(7):2233–2241.

[9] Li, F. G., Zhao, Y. (2013). Finite element analysis of natural vibration frequency for unbounded prestressed concrete beams. *Applied Mechanics and Materials*, Trans Tech Publ, 351:1034–1037.

[10] Hương, N. T. V. *Dao động uốn của dầm có ứng suất trước dưới tác dụng của vật thể di động*. Luận văn Thạc sỹ khoa học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

[11] Majkut, L. (2009). Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1):193–210.

[12] Huan, D. T., Quoc, T. H., Tu, T. M. (2018). Free vibration analysis of functionally graded shell panels with various geometric shapes in thermal environment. *Vietnam Journal of Mechanics*, 40(3):199–215.

[13] Thẩm, V. V., Tú, T. M. (2016). Phân tích tĩnh và dao động riêng của dầm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) theo các lý thuyết biến dạng cắt khác nhau. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 10(2):15–22.

[14] *Giải bài toán trị riêng của dầm bằng phương pháp biến đổi vi phân*. Luận văn thạc sĩ khoa học, Đại học bách khoa Hà Nội.

[15] Kim, T., Park, I., Lee, U. (2017). Forced vibration of a Timoshenko beam subjected to stationary and moving loads using the modal analysis method. *Shock and Vibration*, 2017:3924921.

[16] Hùng, T. T. (2017). *Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[17] Khang, N. V. (2012). *Cơ học kĩ thuật*. Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam.