Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, NUCE 2020. 14 (4V): 54–66

PHÂN TÍCH TĨNH DẦM COMPOSITE SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO HAI BIẾN

Nguyễn Thiện Nhân[a], Nguyễn Ngọc Dương[b,*], Nguyễn Trung Kiên[b]

[a] *Khoa Kỹ thuật – Công nghệ, Trường Đại học Kiên Giang, số 320A, Quốc lộ 61, Thị trấn Minh Lương, huyện Châu Thành, tỉnh Kiên Giang, Việt Nam*
[b] *Khoa Xây Dựng, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh, số 01 Võ Văn Ngân, Quận Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam*

Nhận ngày 25/08/2020, Sửa xong 07/09/2020, Chấp nhận đăng 09/09/2020

Tóm tắt

Bài báo này đề xuất một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến để phân tích ứng xử tĩnh của dầm composite. Trường chuyển vị của bài toán được rút gọn từ lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến bằng cách sử dụng phương trình cân bằng tĩnh học. Phương trình chủ đạo được thành lập từ phương trình Lagrange. Lời giải Ritz, với hàm xấp xỉ là hàm số mũ cơ số Napier, phù hợp với các điều kiện biên khác nhau được đề xuất để giải bài toán. Sự hiệu quả của trường chuyển vị đề xuất và hàm xấp xỉ Ritz mới được phân tích, đánh giá. Các ví dụ số được thực hiện để khảo sát độ hội tụ của lời giải và so sánh với các nghiên cứu trước. Ảnh hưởng của điều kiện biên, hướng sợi, tỷ số chiều dài/chiều cao dầm, đặc biệt là biến dạng cắt đến chuyển vị và ứng suất của dầm composite lớp được khảo sát và bình luận chi tiết.

Từ khoá: dầm composite; lý thuyết biến dạng cắt bậc cao; phương pháp Ritz; phân tích tĩnh; rút gọn trường chuyển vị.

BENDING ANALYSIS OF COMPOSITE BEAM USING A TWO-VARIABLE HIGH ORDER BEAM THEORY

Abstract

This paper proposes a two-variable higher-order beam theory for static analysis of laminated composite beams. The displacement fields are refined from general higher-order beam theory by using static equilibrium equations. The governing equations are established from the Lagrange equations. The Ritz's approximation functions, which so called Napier's exponential functions, are developed for various boundary conditions. The effectiveness of the proposed displacement field and new Ritz's approximation function are analyzed and evaluated. The numerical examples are performed to examine the convergence of solution, and compare with available results. Effects of boundary conditions, fiber orientation, length-to-height ratio and especially shear effect on displacement and stress of laminated composite beams are investigated and discussed in detail.

Keywords: composite beam; high-order beam theory; Ritz method; static analysis; refine beam theory.

https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(4V)-05

---

1. Giới thiệu

Composite là vật liệu hỗn hợp, được tạo thành từ hai hay nhiều vật liệu thành phần. Các ưu điểm nổi bật của vật liệu composite là cường độ cao, trọng lượng nhẹ, cách âm, cách nhiệt và chống ăn mòn tốt. Nhờ các đặc điểm ưu việt trên, vật liệu composite được sử dụng trong nhiều ngành kỹ thuật như

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* duongnn@hcmute.edu.vn (Dương, N. N.)

xây dựng, giao thông, hàng không, tàu thủy... Trong các dạng kết cấu composite được ứng dụng thực tiễn, dầm composite khá phổ biến và thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Nhiều lý thuyết, phương pháp tính toán, quy luật ứng xử được đề xuất nhằm phân tích ứng xử dầm [1, 2].

Lý thuyết dầm có thể chia vào ba nhóm chính: lý thuyết cổ điển (LTCĐ) [3], lý thuyết bậc nhất (LTBN) [4, 5] và lý thuyết bậc cao (LTBC) [6–10]. LTCĐ bỏ qua biến dạng cắt, vì vậy, chỉ áp dụng phù hợp cho các dầm mảnh. LTBN kể đến biến dạng cắt, tuy nhiên, lý thuyết này cần hệ số điều chỉnh cắt. Trong trường hợp tổng quát, việc xác định hệ số điều chỉnh cắt rất phức tạp. Để khắc phục nhược điểm này, các nhà khoa học phát triển các LTBC. Khi đề xuất các LTBC, một trong các ý tưởng để giảm chi phí tính toán là giảm biến số trong trường chuyển vị của bài toán. Thái, và cs. [11] đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt một biến để phân tích tĩnh và dao động tự do dầm vật liệu đẳng hướng kích thước vi mô. Shimpi [12] phân tích tĩnh và dao động của dầm đẳng hướng bằng lý thuyết dầm một biến và giải bằng tích phân trực tiếp. Nguyễn, và cs. [13] đã giới thiệu lý thuyết ba biến phân tích tĩnh tấm vật liệu phân lớp chức năng (FGM). Ngoài ra, Thái, và cs. [14] đã phân tích tĩnh và dao động tự do của tấm vật liệu đẳng hướng dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản và giải bài toán bằng Navier và Levy. Có thể thấy rằng, hướng tiếp cận này chưa được sử dụng phổ biến khi phân tích ứng xử của dầm vật liệu composite.

Về phương pháp, phần tử hữu hạn được sử dụng phổ biến nhất [6, 15, 16]. Bên cạnh đó, các phương pháp giải tích cũng được các nhà khoa học quan tâm. Zenkour [17] sử dụng lời giải Navier để phân tích dầm composite và sandwich chịu uốn ngang. Aydogdu [18, 19] sử dụng phương pháp Ritz để phân tích dao động tự do và ổn định dầm composite. Mantari, và cs. [20] phân tích ổn định và dao động tự do của dầm composite theo phương pháp Ritz với các điều kiện biên khác nhau. Nguyễn, và cs. [21] đề xuất các hàm Ritz dạng lượng giác để giải bài toán tĩnh, dao động tự do và ổn định của dầm composite nhiều lớp. Ngoài ra, Nguyễn, và cs. [22] đề xuất các hàm "Hybrid" dạng mũ và đa thức để phân tích dao động và ổn định của dầm composite chịu tải trọng cơ nhiệt. Có thể thấy rằng, sự hiệu quả của lời giải Ritz phụ thuộc vào đặc điểm của hàm dạng và lời giải này ít được sử dụng khi phân tích tĩnh dầm composite.

Mục tiêu của bài báo này là đề xuất (i) lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến và (ii) hàm xấp xỉ mới dạng hàm số mũ cơ số Napier để phân tích tĩnh dầm composite. Trường chuyển vị hai biến được rút gọn từ trường chuyển vị bậc cao ba biến bằng cách sử dụng phương trình cân bằng tĩnh học. Quan hệ ứng suất-biến dạng tuân thủ định luật Hooke cho vật liệu composite. Phương trình chủ đạo rút ra từ nguyên lý Lagrange. Các hàm xấp xỉ dạng mũ Napier được đề xuất để xấp xỉ trường chuyển vị. Các ví dụ số được thực hiện và so sánh với các nghiên cứu trước để chứng minh sự chính xác của lý thuyết đề xuất. Các ảnh hưởng của tỷ số nhịp/chiều cao, điều kiện biên, hướng sợi đến chuyển vị của dầm được khảo sát chi tiết.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Quan hệ ứng suất và biến dạng

Vật liệu composite được nghiên cứu trong bài báo này là vật liệu composite nhiều lớp, mỗi lớp là vật liệu trực hướng và có hướng sợi khác nhau. Quan hệ ứng suất và biến dạng tại lớp thứ k^{th} trên hệ tọa độ tổng thể có dạng như sau:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_{xz}^{(k)} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cc} \bar{Q}_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{array} \right\} \tag{1}$$

trong đó $\bar{Q}_{11}^{(k)}; \bar{Q}_{55}^{(k)}$ là các hằng số độ cứng giảm của lớp thứ k^{th} trên hệ tọa độ tổng thể, được cho bởi công thức sau:

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\cos^4\theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}^{(k)}\sin^4\theta \tag{2}$$

$$\bar{Q}_{55}^{(k)} = Q_{55}^{(k)}\cos^2\theta + Q_{44}^{(k)}\sin^2\theta \tag{3}$$

trong đó θ là góc hợp bởi hướng sợi của lớp k^{th} và trục x:

$$Q_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)}E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}} \tag{4}$$

$$Q_{44}^{(k)} = G_{23}^{(k)}, Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \tag{5}$$

2.2. *Trường chuyển vị*

Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (LTBC) theo Thai [14]:

$$u(x,z) = u_0(x) - zw_{b,x}(x) + g(z)w_{s,x}(x) \tag{6}$$

$$w(x,z) = w_b(x) + w_s(x) \tag{7}$$

trong đó $g(z) = \frac{z}{4} - \left(\frac{5z^3}{3h^2}\right)$, $u_0(x)$ là chuyển vị tại điểm trên trục trung hòa theo phương trục dầm, $w_b(x)$ và $w_s(x)$ lần lượt là chuyển vị ngang tại điểm trên trục trung hòa do biến dạng uốn và cắt gây ra.

Phương trình biến dạng:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = u_{0,x} - zw_{b,xx} + gw_{s,xx} \tag{8}$$

$$\gamma_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = -w_{b,x} + g_{,z}w_{s,x} + w_{b,x} + w_{s,x} = (1+g_{,z})w_{s,x} \tag{9}$$

Phương trình cân bằng tĩnh của dầm:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xz,z} = 0 \tag{10}$$

Tích phân hai vế phương trình (10) theo $z \in [-h/2; h/2]$ và kết hợp với phương trình (1) với lưu ý $\sigma_{xz}\Big|_{z=-h/2}^{z=h/2} = 0$, ta thu được:

$$N_{xx,x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx,x}dz = A_1u_{0,xx} - A_2w_{b,xxx} + A_3w_{s,xxx} = 0 \tag{11}$$

trong đó:

$$(A_1, A_2, A_3) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11}^{(k)}(1, z, g)dz \tag{12}$$

Tích phân hai vế phương trình (11) theo x thu được:

$$N_{xx} = A_1u_{0,x} - A_2w_{b,xx} + A_3w_{s,xx} = C \tag{13}$$

trong đó C là hằng số tích phân. Do bài báo chỉ phân tích tĩnh dầm chịu tải ngang nên $N_{xx} = C = 0$ [12].

Tích phân hai vế phương trình (13) thu được:

$$A_1 u_0 - A_2 w_{b,x} + A_3 w_{s,x} = C_1 \tag{14}$$

Phương trình (14) được viết lại :

$$u_0 = \frac{A_2}{A_1} w_{b,x} - \frac{A_3}{A_1} w_{s,x} + \frac{C_1}{A_1} \tag{15}$$

Thay phương trình (15) vào phương trình (6), ta thu được trường chuyển vị mới:

$$u(x,z) = (\frac{A_2}{A_1} - z) w_{b,x} + (g - \frac{A_3}{A_1}) w_{s,x} + \frac{C_1}{A_1} \tag{16}$$

$$w(x,z) = w_b(x) + w_s(x) \tag{17}$$

Thay phương trình (16) và (17) vào phương trình (8) và (9) thu được trường biến dạng mới:

$$\varepsilon_x = (\frac{A_2}{A_1} - z) w_{b,xx} + (g - \frac{A_3}{A_1}) w_{s,xx} \tag{18}$$

$$\gamma_{xz} = (1 + g_{,z}) w_{s,x} \tag{19}$$

2.3. *Các biểu thức năng lượng*

Năng lượng biến dạng của hệ:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_x + \sigma_{xz} \gamma_{xz})\, dV = \frac{1}{2} \int_0^L \left(B_1 w_{b,xx}^2 + 2B_2 w_{b,xx} w_{s,xx} + B_3 w_{s,xx}^2 + D w_{s,x}^2 \right) dx \tag{20}$$

trong đó:

$$(B_1; B_2; B_3) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\left(\frac{A_2}{A_1} - z \right)^2 ; \left(\frac{A_2}{A_1} - z \right) \left(g - \frac{A_3}{A_1} \right)^2 ; \left(g - \frac{A_3}{A_1} \right) \right) bdz \tag{21}$$

$$D = \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{55}^{(k)} (1 + g_{,z})^2 bdz \tag{22}$$

Công của tải trọng ngoài:

$$V = - \int_0^L q(w_b + w_s) dx \tag{23}$$

trong đó q là tải trọng phân bố đều trên dầm.

Tổng năng lượng của hệ:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_0^L \left(B_1 w_{b,xx}^2 + 2B_2 w_{b,xx} w_{s,xx} + B_3 w_{s,xx}^2 + D w_{s,x}^2 \right) dx - \int_0^L q(w_b + w_s) dx \tag{24}$$

2.4. Phương pháp Ritz

Sử dụng phương pháp Ritz, trường chuyển vị được xấp xỉ như sau:

$$w_b(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) w_{bj} \tag{25}$$

$$w_s(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) w_{sj} \tag{26}$$

trong đó w_{bj}, w_{sj} là các thông số cần xác định; $\varphi_j(x)$ là hàm xấp xỉ thỏa các điều kiện biên khác nhau như biên tựa đơn (S), biên ngàm (C) và biên tự do (F) được cho trong (Bảng 1). Theo nghiên cứu [23], hàm $\varphi_j(x)$ là hàm kết hợp giữa đa thức khóa biên và hàm số mũ cơ số Napier. Tuy nhiên, trong bài báo này có sự cải tiến bỏ qua hàm đa thức, chỉ sử dụng thuần túy hàm số mũ cơ số Napier đem lại nhiều lợi ích cho tốc độ hội tụ của bài toán. Có thể thấy rằng, phương pháp Ritz dựa vào nguyên lý biến phân về chuyển vị. Theo nguyên lý này, trường chuyển vị thỏa mãn các điều kiện biên chính và làm cho năng lượng của cơ hệ đạt giá trị dừng sẽ chính là trường chuyển vị thực và làm thỏa các phương trình cân bằng [24]. Trong bài báo này, trường chuyển vị của bài toán được biểu diễn gần đúng như tổ hợp tuyến tính của các hàm xấp xỉ. Tương tự các nghiên cứu trước [18, 19, 23], các hàm xấp xỉ được đề xuất trong nghiên cứu này thỏa các điều kiện biên chính của bài toán (Bảng 1). Trong trường hợp, hàm xấp xỉ không thỏa các điều kiện biên thì phương pháp nhân tử Lagrange [25, 26] hoặc hàm phạt [20] được sử dụng, mặc dù vậy, hướng tiếp cận này làm tăng chi phí tính toán.

Bảng 1. Hàm xấp xỉ và điều kiện biên (ĐKB) của dầm

ĐKB	$\varphi_j(x)$	$x = 0$	$x = L$
SS	$\left(e^{-\frac{jx}{L}} - 1\right)\left(e^{\frac{jx}{L}} - e^{j}\right)$	$w_s = 0; w_b = 0$	$w_s = 0; w_b = 0$
CF	$\left(e^{-\frac{jx}{L}} - 1\right)^2$	$u = 0; w_s = 0; w_b = 0;$ $w_{s,x} = 0; w_{b,x} = 0$	-
CC	$\left(e^{-\frac{jx}{L}} - 1\right)^2\left(e^{\frac{jx}{L}} - e^{j}\right)^2$	$u = 0; w_s = 0; w_b = 0;$ $w_{s,x} = 0; w_{b,x} = 0$	$u = 0; w_s = 0; w_b = 0;$ $w_{s,x} = 0; w_{b,x} = 0$

Thay phương trình (25) và (26) vào phương trình (24) và sử dụng nguyên lý Lagrange:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_j} = 0 \tag{27}$$

trong đó: p_j tương ứng với các biến số w_{sj}, w_{bj}. Phương trình chủ đạo của bài toán phân tích tĩnh dầm composite được rút ra từ phương trình (27) có dạng như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ {}^{T}\mathbf{K}^{12} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w_{sj}} \\ \mathbf{w_{bj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F_j} \\ \mathbf{F_j} \end{pmatrix} \tag{28}$$

trong đó **K**và **F** lần lượt là ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng, với các hệ số như sau:

$$K_{ij}^{11} = B_1 I_{ij}^{1}; \quad K_{ij}^{12} = B_2 I_{ij}^{2}; \quad K_{ij}^{22} = B_3 I_{ij}^{1} + D I_{ij}^{2}; \quad F_j = \int_0^L q\varphi_j dx \tag{29}$$

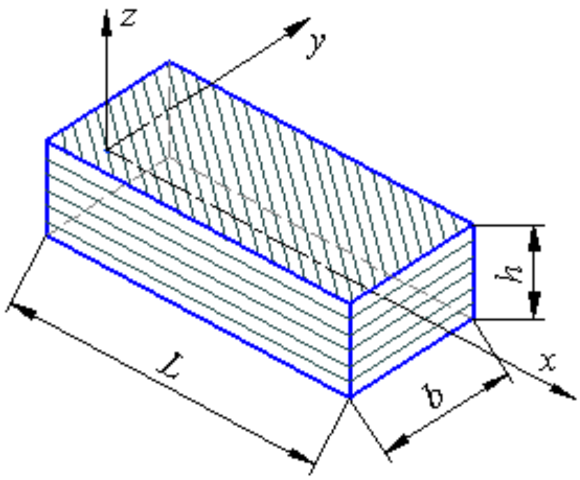
$$I_{ij}^1 = \int_0^L \varphi_{i,xx}\varphi_{j,xx}dx; \quad I_{ij}^2 = \int_0^L \varphi_{i,x}\varphi_{j,x}dx \tag{30}$$

Từ các phương trình (28), (29) và (30) có thể thấy rằng: trường chuyển vị rút gọn thu được phương trình chủ đạo với ít biến số hơn trường chuyển vị ban đầu và số lần tính toán cho ma trận **K** giảm vì chỉ tính 2^j lần các tích phân ở phương trình (30). Trong khi đó nếu sử dụng trường chuyển vị ba biến như nghiên cứu của Nguyễn và cs. [21] thì số lần tính tích phân là 3^j. Để giải phương trình (28), bài báo này sử dụng phần mềm Matlab để lập trình tính toán ma trận độ cứng **K**, vectơ tải **F**.

3. Kết quả số

Trong phần này, các ví dụ số sẽ được thực hiện để khảo sát sự hội tụ và độ chính xác của lời giải. Vật liệu được sử dụng có đặt trưng như sau: $E_1/E_2 = 25; G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2; \nu_{12} = 0.25$. Kích thước hình học của dầm được thể hiện qua Hình 1. Để thuận tiện cho việc khảo sát, các biểu thức không thứ nguyên được định nghĩa như sau:

$$\bar{w} = \frac{100wE_2bh^3}{qL^4}; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{bh^2}{qL^2}\sigma_{xx}\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right); \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{bh}{qL}\sigma_{xz}(0,0) \tag{31}$$



Hình 1. Kích thước hình học của dầm composite

3.1. Khảo sát sự hội tụ

Kết quả khảo sát số bước lặp khi tìm chuyển vị giữa nhịp $\bar{w}$ của dầm composite ($0^0/90^0$) và $L/h = 5$ được trình bày trong Bảng 2. Có thể thấy rằng: với điều kiện biên SS bài toán hội tụ khi $j = 4$, với điều kiện biên CF bài toán hội tụ khi $j = 10$ và với điều kiện biên CC bài toán hội tụ khi $j = 6$. Vì vậy, các chuỗi số này sẽ được sử dụng để biểu diễn kết quả trong bài báo này.

Từ kết quả khảo sát ở Bảng 3, có thể thấy rằng hàm xấp xỉ Ritz trong bài báo này cho kết quả hội tụ nhanh, với số bước lặp ít hơn hàm xấp xỉ Ritz trong nghiên cứu [21]. Do đó, chi phí tính toán của sẽ giảm đáng kể.

Bảng 2. Khảo sát số bước lặp của hàm xấp xỉ Ritz

ĐKB	Chỉ số j trong phương trình (25) và (26)						
	2	4	6	8	10	12	14
SS	4,776	4,777	4,777	4,777	4,777	4,777	4,777
CF	15,034	15,201	15,286	15,277	15,279	15,279	15,279
CC	1,876	1,92	1,922	1,922	1,922	1,922	1,922

Bảng 3. So sánh kết quả khảo sát số bước lặp

Nghiên cứu	Chỉ số j trong phương trình (25) và (26) ứng với các ĐKB		
	SS	CF	CC
Bài báo	4	10	6
Nguyễn và cs. [21]	14	14	14

3.2. *Các ví dụ số*

Ví dụ 1: Trong ví dụ này, chuyển vị ngang không thứ nguyên dầm phân lớp ($0^0/90^0$) và ($0^0/90^0/0^0$) được trình bày và so sánh với kết quả trong các nghiên cứu trước.

Bảng 4 và 5 cho thấy rằng: lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được đề xuất trong bài báo này cho chuyển vị giữa nhịp dầm hoàn toàn chính xác với kết quả của các nghiên cứu [6], [10], [15], [21].

Kết quả phân tích ứng suất pháp σ_{xx} và ứng suất cắt σ_{xz} của dầm SS ($0^0/90^0$) và ($0^0/90^0/0^0$) được trình bày trong Bảng 6 và 7. Có thể thấy rằng, kết quả trong bài báo này hoàn toàn trùng khớp với kết quả của các nghiên cứu [6], [21].

Bảng 4. Chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp dầm ($0^0/90^0$)

ĐKB	Lý thuyết	L/h				
		5	10	20	30	50
SS	Bài báo	4,777	3,688	3,413	3,362	3,336
	Nguyễn và cs. [21]	4,777	3,688	3,413	3,362	3,336
	Khdier và Reddy [10]	4,777	3,668	-	-	3,336
	Võ và Thái [6]	4,785	3,696	3,421	-	3,344
	Murthy và cs. [15]	4,750	3,688	-	-	3,318
CF	Bài báo	15,279	12,343	11,562	11,414	11,337
	Nguyễn và cs. [21]	15,260	12,330	11,556	11,410	11,335
	Khdier và Reddy [10]	15,279	12,343	-	-	11,337
	Võ và Thái [6]	15,305	12,369	11,588	-	11,363
	Murthy và cs. [15]	15,334	12,398	-	-	11,392
CC	Bài báo	1,922	1,006	0,753	0,704	0,679
	Nguyễn và cs. [21]	1,920	1,004	0,752	0,704	0,679
	Khdier và Reddy [10]	1,922	1,005	-	-	0,679
	Murthy và cs. [15]	1,924	1,007	-	-	0,681

Bảng 5. Chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp dầm ($0^0/90^0/0^0$)

ĐKB	Lý thuyết	L/h				
		5	10	20	30	50
SS	Bài báo	2,413	1,097	0,759	0,697	0,665
	Nguyễn và cs. [21]	2,412	1,096	0,759	0,697	0,665
	Khdier và Reddy [10]	2,412	1,096	-	-	0,665
	Võ và Thái [6]	2,414	1,098	0,761	-	0,666
	Murthy và cs. [15]	2,398	1,090	-	-	0,661
CF	Bài báo	6,824	3,455	2,525	2,345	2,251
	Nguyễn và cs. [21]	6,813	3,447	2,520	2,342	2,250
	Khdier và Reddy [10]	6,824	3,455	-	-	2,251
	Võ và Thái [6]	6,830	3,461	2,530	-	2,257
	Murthy và cs. [15]	6,836	3,466	-	-	2,262
CC	Bài báo	1,537	0,532	0,236	0,178	0,147
	Nguyễn và cs. [21]	1,536	0,531	0,236	0,177	0,147
	Khdier và Reddy [10]	1,537	0,532	-	-	0,147
	Murthy và cs. [15]	1,538	0,532	-	-	0,147

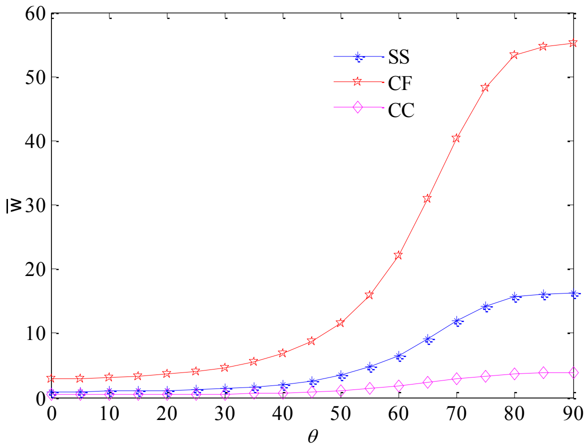
Bảng 6. Ứng suất pháp σ_{xx} của dầm ($0^0/90^0$) và ($0^0/90^0/0^0$)

θ	Lý thuyết	L/h				
		5	10	20	30	50
$0^0/90^0/0^0$	Bài báo	1,0694	0,8512	0,7959	0,7857	0,7806
	Nguyễn và cs. [21]	1,0696	0,8516	0,7965	-	-
	Võ và Thái [6]	1,0670	0,8503	0,7961	-	-
$0^0/90^0$	Bài báo	0,2362	0,2342	0,2338	0,2337	0,2336
	Nguyễn và cs. [21]	0,2362	0,2343	0,2338	-	-
	Võ và Thái [6]	0,2361	0,2342	0,2337	-	-

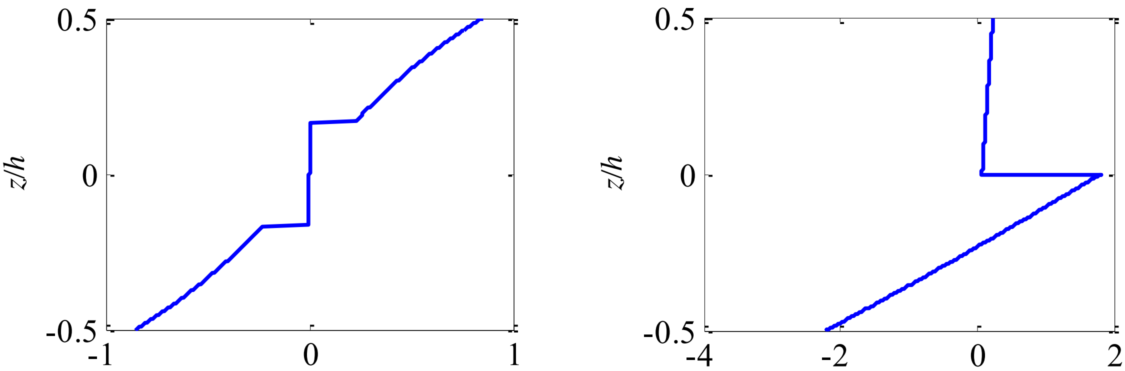
Bảng 7. Ứng suất pháp σ_{xz} của dầm ($0^0/90^0$) và ($0^0/90^0/0^0$)

θ	Lý thuyết	L/h				
		5	10	20	30	50
$0^0/90^0/0^0$	Bài báo	0,4057	0,4319	0,4467	0,4514	0,4545
	Nguyễn và cs. [21]	0,4050	0,4289	0,4388	-	-
	Võ và Thái [6]	0,4057	0,4311	0,4438	-	-
$0^0/90^0$	Bài báo	0,9212	0,9611	0,9819	0,9874	0,9905
	Nguyễn và cs. [21]	0,9174	0,9483	0,9594	-	-
	Võ và Thái [6]	0,9187	0,9484	0,9425	-	-

Hình 2 biểu diễn ảnh hưởng của hướng sợi đến chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp dầm ứng với các điều kiện biên khác nhau và $L/h = 10$. Có thể thấy rằng, chuyển vị của dầm tăng khi hướng sợi tăng với tất cả các ĐKB. Điều này là hợp lý vì hướng sợi tăng làm giảm độ cứng của dầm composite.



Hình 2. Ảnh hưởng của hướng sợi đến chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp dầm phân lớp đối xứng $[\theta/-\theta]_s$



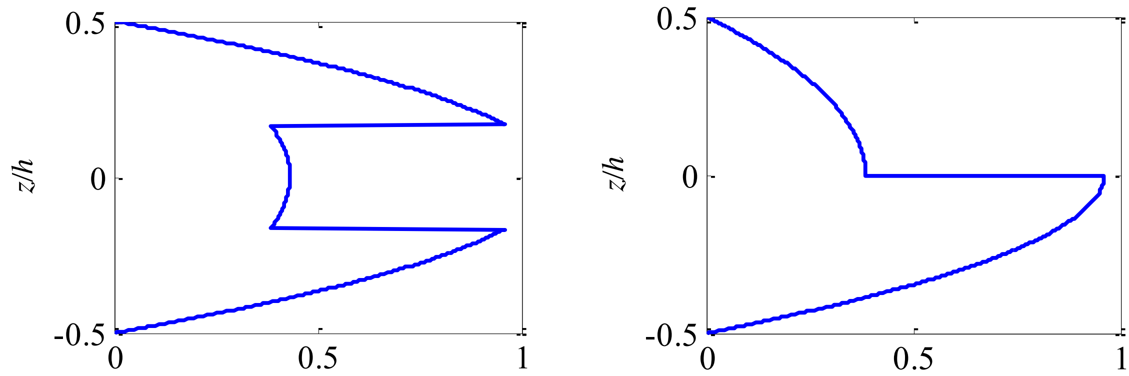
(a) $0^0/90^0/0^0$ (b) $0^0/90^0$

Hình 3. Biểu đồ phân bố ứng suất pháp dọc chiều cao của dầm tựa đơn

Sự phân bố ứng suất pháp dọc chiều cao dầm tại vị trí $x = L/2$ của dầm $0^0/90^0/0^0$ và $0^0/90^0$ được trình bày lần lượt ở hình Hình 3(a) và 3(b). Sự phân bố ứng suất tiếp dọc chiều cao dầm tại vị trí $x = 0$ của dầm $0^0/90^0/0^0$ và $0^0/90^0$ được trình bày lần lượt ở hình Hình 4(a) và 4(b). Có thể thấy rằng, ứng suất cắt bằng không tại biên trên và biên dưới dầm.

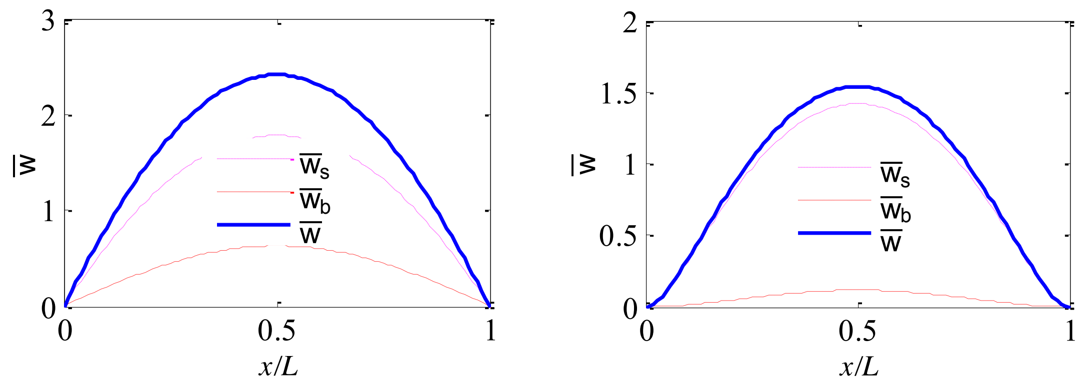
Ví dụ 2: Trong ví dụ này sẽ trình bày sự ảnh hưởng của các chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}_b, \bar{w}_s$ đến tổng chuyển vị $\bar{w}$ tại giữa nhịp dầm phân lớp $(0^0/90^0/0^0)$ ứng với các điều kiện biên khác nhau.

Các chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}_b, \bar{w}_s, \bar{w}$ dọc chiều dài dầm composite ĐKB SS và CC được thể hiện lần lượt ở các Hình 5(a) và 5(b). Kết quả cho thấy rằng, chuyển vị $\bar{w}_s$ đóng vai trò quan trọng trong tổng chuyển vị của dầm. Mặt khác, Hình 5(b) cho thấy đường cong biểu diễn $\bar{w}_b, \bar{w}_s$ gần như tiếp xúc với trục x tại các vị trí $x = 0$; $x = L$, điều này phù hợp với điều kiện $w_{b,x}(0) = 0$; $w_{b,x}(L) = 0$ và $w_{s,x}(0) = 0$; $w_{s,x}(L) = 0$ của điều kiện biên CC.



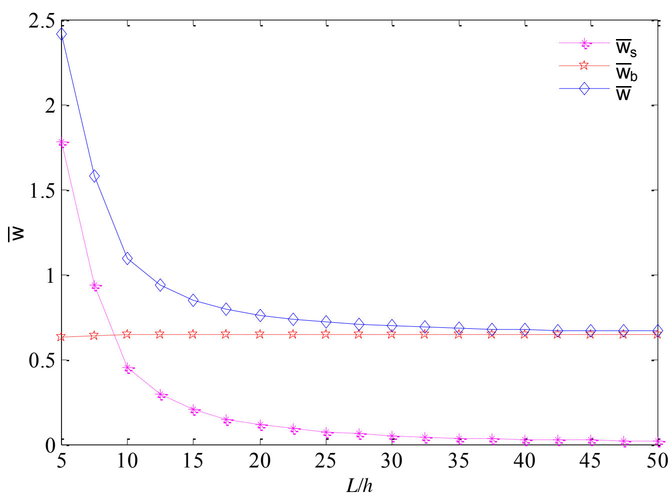
(a) $0^0/90^0/0^0$ (b) $0^0/90^0$

Hình 4. Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp dọc chiều cao của dầm tựa đơn



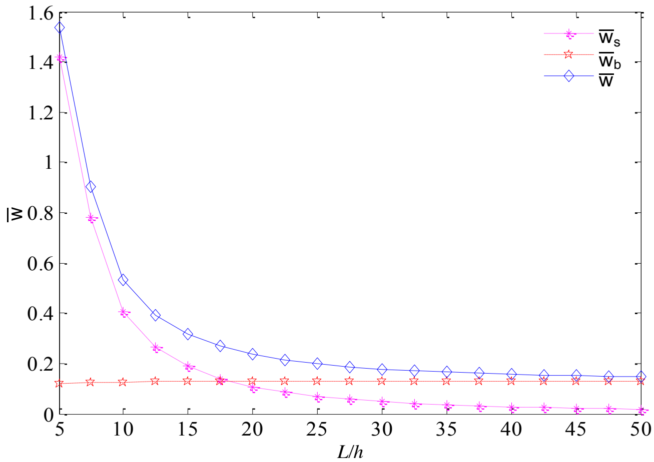
(a) SS (b) CC

Hình 5. Chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w}_b, \bar{w}_s, \bar{w}$ dọc chiều dài của dầm $0^0/90^0/0^0$; $L/h = 5$

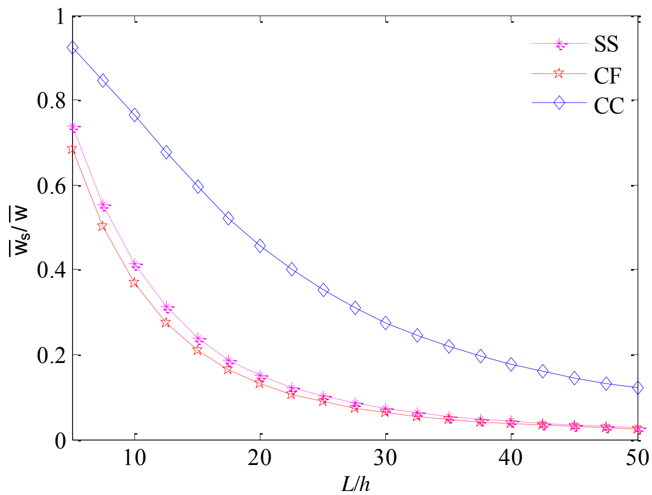


Hình 6. Ảnh hưởng của hiệu ứng dầm dày đến chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp của dầm tựa đơn

Quan hệ giữa chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp dầm và tỉ số L/h được thể hiện ở Hình 6 và 7. Các hình này cho thấy rằng: chuyển vị do uốn $\bar{w}_b$ hầu như không phụ thuộc vào tỉ số L/h và nó đóng vai trò quyết định đến chuyển vị $\bar{w}$ của những dầm mảnh. Tuy nhiên, chuyển vị do cắt $\bar{w}_s$ có khuynh hướng tăng khi dầm càng dày và $\bar{w}_s$ đóng vai trò quyết định khi tính toán chuyển vị $\bar{w}$ của dầm dày. Mặt khác, đối với dầm tựa đơn (SS) chuyển vị $\bar{w}_s$ lớn hơn $\bar{w}_b$ khi $L \approx 10h$, trong khi đó, đối với dầm hai đầu ngàm (CC) $\bar{w}_s$ vượt $\bar{w}_b$ khi $L \approx 18h$.



Hình 7. Ảnh hưởng của hiệu ứng dầm dày đến chuyển vị không thứ nguyên giữa nhịp của dầm hai đầu ngàm.



Hình 8. Quan hệ giữa tỉ số $\bar{w}_s/\bar{w}$ và tỉ số L/h

Hình 8 thể hiện sự biến thiên của $\bar{w}_s/\bar{w}$ theo L/h của dầm ứng với các điều kiện biên khác nhau. Nhìn chung, $\bar{w}_s$ hầu như ít ảnh hưởng đến tổng chuyển vị $\bar{w}$ đối với các dầm mỏng. Đối với các điều kiện biên SS, CF thì chuyển vị $\bar{w}_s$ chiếm khoảng $5\%\bar{w}$, còn đối với điều kiện biên CC thì $\bar{w}_s$ chiếm khoảng $10\%\bar{w}$. Khi dầm càng dày thì ảnh hưởng của $\bar{w}_s$ đến $\bar{w}$ càng cao, cụ thể khi $L/h = 5, \bar{w}_s \approx 70\%\bar{w}$ đối với dầm SS, CF và tỉ số này $> 90\%$ đối với dầm CC. Có thể thấy rằng, ảnh hưởng của biến dạng cắt lớn nhất với điều kiện biên CC.

4. Kết luận

Bài báo này đã trình bày một lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến, được thiết lập từ trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến bằng cách sử dụng phương trình cân bằng tĩnh học. Hàm xấp xỉ Ritz dạng hàm số mũ cơ số Napier được đề xuất để xấp xỉ trường chuyển vị. Từ các kết quả số về khảo sát số bước lặp, chuyển vị không thứ nguyên và ứng suất của dầm composite có thể kết luận rằng:

- Trường lý thuyết đề xuất đơn giản và hiệu quả trong việc phân tích tĩnh dầm composite.

- Hàm xấp xỉ Ritz cho kết quả tính toán chính xác và giảm số bước lặp, điều này làm giảm chi phí tính toán.

Lời cảm ơn

Tác giả thứ nhất xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Trường Đại học Kiên Giang cho đề tài "Phân tích tĩnh dầm composite sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao hai biến", mã số: A2020-KTCN-33

Tài liệu tham khảo

[1] Ghugal, Y. M., Shimpi, R. P. (2001). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 20(3):255–272.

[2] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M. (2017). Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. *Composite Structures*, 171:486–504.

[3] Bernoulli, J. (1964). Curvatura laminae elasticae. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1694:262–276.

[4] Girhammar, U. A., Pan, D. H. (2007). Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(2):239–255.

[5] Li, X.-F. (2008). A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *Journal of Sound and vibration*, 318(4-5):1210–1229.

[6] Vo, T. P., Thai, H.-T. (2012). Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. *Composite Structures*, 94(8):2513–2522.

[7] Khdeir, A. A., Redd, J. N. (1997). Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*, 37(1):1–3.

[8] Kant, T., Marur, S. R., Rao, G. S. (1997). Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theory. *Composite Structures*, 40(1):1–9.

[9] Khdeir, A. A., Reddy, J. N. (1994). Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. *International Journal of Engineering Science*, 32(12):1971–1980.

[10] Khdeir, A. A., Reddy, J. N. (1997). An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams. *Composite Structures*, 37(2):195–203.

[11] Thai, S., Thai, H.-T., Vo, T. P., Patel, V. I. (2018). A simple shear deformation theory for nonlocal beams. *Composite Structures*, 183:262–270.

[12] Shimpi, R. P., Shetty, R. A., Guha, A. (2017). A simple single variable shear deformation theory for a rectangular beam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 231(24):4576–4591.

[13] Nguyen, T. N., Ngo, T. D., Nguyen-Xuan, H. (2017). A novel three-variable shear deformation plate formulation: theory and Isogeometric implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326:376–401.

[14] Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Ngo, T. (2017). A new simple shear deformation plate theory. *Composite Structures*, 171:277–285.

[15] Murthy, M. V. V. S., Mahapatra, D. R., Badarinarayana, K., Gopalakrishnan, S. (2005). A refined higher order finite element for asymmetric composite beams. *Composite Structures*, 67(1):27–35.

[16] Han, J., Hoa, S. V. (1993). A three-dimensional multilayer composite finite element for stress analysis of composite laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(22):3903–3914.

[17] Zenkour, A. M. (1999). Transverse shear and normal deformation theory for bending analysis of laminated and sandwich elastic beams. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 6(3):267–283.

[18] Aydogdu, M. (2006). Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25(15):1571–1583.

[19] Aydogdu, M. (2005). Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(11):1740–1755.

[20] Mantari, J. L., Canales, F. G. (2016). Free vibration and buckling of laminated beams via hybrid Ritz solution for various penalized boundary conditions. *Composite Structures*, 152:306–315.

[21] Nguyen, T.-K., Nguyen, N.-D., Vo, T. P., Thai, H.-T. (2017). Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. *Composite Structures*, 160:142–151.

[22] Nguyen, N.-D., Nguyen, T.-K., Nguyen, T.-N., Thai, H.-T. (2018). New Ritz-solution shape functions for analysis of thermo-mechanical buckling and vibration of laminated composite beams. *Composite Structures*, 184:452–460.

[23] Duong, N. N., Kien, N. T., Nhan, N. T. (2019). Ritz solution for buckling analysis of thin-walled composite channel beams based on a classical beam theory. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE*, 13(3):34–44.

[24] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press.

[25] Nguyen, T.-K., Vo, T. P., Nguyen, B.-D., Lee, J. (2016). An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory. *Composite Structures*, 156:238–252.

[26] Şimşek, M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4):697–705.