Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, NUCE 2020. 14 (4V): 39–53

PHÂN TÍCH TĨNH KẾT CẤU TẤM CHỮ NHẬT E-FGM CÓ GẮN LỚP VẬT LIỆU ÁP ĐIỆN

Vũ Văn Thẩm[a,*], Dương Thành Huân[b], Chu Thanh Bình[a]

[a]*Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng, số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*
[b]*Khoa Cơ - Điện, Học viện Nông nghiệp Việt Nam, thị trấn Trâu Qùy, huyện Gia Lâm, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 06/8/2020, Sửa xong 10/09/2020, Chấp nhận đăng 15/09/2020

Tóm tắt

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị để phân tích tĩnh kết cấu tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên theo quy luật hàm số e-mũ (E–FGM), tích hợp các lớp vật liệu composite cốt sợi áp điện (PFRC) tại mặt trên và mặt dưới tấm. Tấm chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt. Sự biến đổi điện thế theo chiều dày lớp áp điện được giả thiết biến đổi tuyến tính. Sử dụng nguyên lý công ảo để thiết lập các phương trình cân bằng tĩnh. Độ tin cậy của thuật toán và chương trình tính được kiểm chứng qua so sánh với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, các kích thước hình học và điện thế áp đặt đến độ võng và ứng suất của tấm E–FGM.

Từ khoá: phân tích tĩnh; tấm E-FGM; lớp áp điện; phương pháp giải tích; lý thuyết bốn ẩn chuyển vị.

STATIC ANALYSIS OF EXPONENTIAL FUNCTIONALLY GRADED RECTANGULAR PLATES WITH INTEGRATED SURFACE PIEZOELECTRIC LAYERS

Abstract

This paper presents an analytical solution for the static analysis of exponentially functionally graded (E–FGM) rectangular plates integrated with piezoelectric fiber-reinforced composite (PFRC) actuators under electro-mechanical loadings. The four-variable refined plate theory is applied to express the displacement components. The plate is under mechanical load, and the piezoelectric faces are subjected to an applied voltage. The electrostatic potential is assumed to be linear through the thickness of PFRC. The equations of equilibrium are established by applying the principle of virtual work principle. Comparison studies have been carried out to verify the accuracy of the present model. Furthermore, the effects of some parameters on displacements and stresses of the plates, including applied voltage, material anisotropy and side-to-thickness ratio, are discussed.

Keywords: static analysis; exponential functionally graded plates; piezoelectric layer; analytical solutions; four-variable theory.

https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(4V)-04 © 2020 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Vật liệu có cơ tính biến thiên FGM là loại vật liệu composite thế hệ mới được cấu tạo từ hai hoặc nhiều hơn các loại vật liệu với thành phần biến đổi trơn và liên tục theo một phương ưu tiên do vậy tránh được sự tập trung ứng suất và không xảy ra sự bong tách lớp. Vật liệu FGM tận dụng được lợi thế của các vật liệu thành phần: khả năng chịu nhiệt và chịu ăn mòn tốt của gốm (ceramic); độ bền dẻo của kim loại (metal), vì vậy có nhiều đặc tính ưu việt hơn so với loại vật liệu thuần nhất có thành phần

*Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* thamvv@nuce.edu.vn (Thẩm, V. V.)

cấu tạo tương tự. Vật liệu áp điện (piezoelectric material) là loại vật liệu có khả năng thay đổi hình dạng, kích thước dưới tác động của điện trường hoặc sinh ra điện trường khi bị biến dạng. Kết cấu tấm FGM có gắn lớp áp điện được gọi tắt là kết cấu FGM áp điện, là một dạng kết cấu "thông minh" được sử dụng nhiều trong các ngành công nghiệp đóng tàu, công nghiệp sản xuất ô tô, hạt nhân, hàng không, vũ trụ. Ưu điểm nổi bật của dạng kết cấu có gắn thêm các lớp áp điện là có thể kiểm soát được hình dạng (cong, vênh) hoặc giảm bớt được các rung lắc bất lợi xuất hiện trong quá trình làm việc của kết cấu.

Trong vài thập kỷ qua, các nghiên cứu về đối tượng kết cấu tấm FGM áp điện đã được nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới quan tâm. Shakeri và Mirzaeifar [1] đề xuất mô hình PTHH dựa trên lý thuyết nhiều lớp liên tiếp (layerwise) để phân tích tĩnh và động của các tấm FGM dày có gắn các lớp áp điện. Selim và cs. [2] đã đề xuất sử dụng lý thuyết biến dạng bậc cao của Reddy với phương pháp không lưới để điều khiển dao động của các tấm FGM áp điện. Ray và Sachade [3] đã tiến hành phân tích tĩnh tấm FGM áp điện sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), lý thuyết tấm bậc nhất (FSDT). Rouzegar và Abbasi [4] đã thiết lập công thức PTHH dựa trên lý thuyết bốn ẩn chuyển vị để phân tích tĩnh tấm FGM tích hợp với một lớp composite cốt sợi áp điện (PFRC). Ray và Sachade [5] đã sử dụng phương pháp nghiệm chính xác để phân tích tĩnh kết cấu tấm FGM có gắn lớp PFRC tại mặt trên hoặc dưới của tấm. Shiyekar và Kant [6] đã phát triển một mô hình tương tác cơ – điện theo lý thuyết tấm bậc cao 12 ẩn chuyển vị để phân tích uốn cho tấm FGM tích hợp với một lớp PFRC, kết quả số được so sánh với nghiệm chính xác [5].

Nghiên cứu để xây dựng được mô hình tính toán chính xác và hiệu quả cho các kết cấu tấm, vỏ nói chung và kết cấu tấm FGM nói riêng luôn thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học. Trong quá trình xây dựng mô hình tính, các tác giả đã có những đề xuất để cải tiến, rút gọn, hay làm tinh các lý thuyết truyền thống để nhận được mô hình mới có những ưu điểm hơn mô hình cũ. Từ lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất 5 ẩn chuyển vị truyền thống, bằng việc chia độ võng thành hai thành phần: thành phần do mô men uốn (w_b) và thành phần do lực cắt (w_s), Shimpi và Patel [7] đã đề xuất lý thuyết tấm bốn ẩn chuyển vị cải tiến. Theo lý thuyết này, phần uốn không đóng góp vào biến dạng cắt. Biến dạng cắt trong trường hợp này không bằng không hay là hằng số mà được biểu diễn dưới dạng hàm $f(z)$ biến thiên theo chiều dày z thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang bị triệt tiêu tại bề mặt tấm. Sau nghiên cứu [7] đã có nhiều các công bố khác nhau liên quan đến dạng hàm $f(z)$ [8–11]. Các nghiên cứu đã sử dụng lời giải giải tích, lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị để tính toán cho đối tượng là kết cấu tấm áp điện có thể kể đến nhóm tác giả Rouzegar và Abad đã phân tích uốn tấm composite có gắn lớp áp điện tại mặt trên [4] và phân tích dao động tự do của tấm P-FGM có gắn lớp áp điện tại cả hai mặt trên và dưới [12].

Các nhà khoa học Việt Nam trong những năm gần đây đã có những đóng góp nổi bật trong lĩnh vực cơ học vật liệu mới và kết cấu bằng vật liệu mới. Nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu tấm, vỏ có gắn lớp vật liệu áp điện cũng là chủ đề dành được sự quan tâm từ các nhà nghiên cứu trong nước, tuy nhiên các kết quả nghiên cứu về kết cấu tấm có gắn lớp áp điện nói chung và kết cấu FGM có gắn các lớp áp điện nói riêng cho đến nay cũng chưa thật phong phú. Một trong những nghiên cứu làm cơ sở khoa học tốt cho các nghiên cứu về kết cấu composite áp điện phải kể đến luận án tiến sĩ của tác giả Lê Kim Ngọc [13]. Trong nghiên cứu này, tác giả đã phân tích tương đối chuyên sâu về ứng xử cơ – điện của vật liệu áp điện và kết cấu tấm composite áp điện. Tác giả luận án đã tiến hành phân tích tĩnh và dao động tự do của kết cấu tấm composite có lớp áp điện hình chữ nhật bằng phương pháp PTHH. Theo tiếp cận giải tích, nhóm nghiên cứu Trần Minh Tú, Trần Hữu Quốc và Vũ Văn Thẩm đã tính toán độ võng và ứng suất của kết cấu tấm composite có gắn lớp áp điện chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và điện trường [14]. Ngoài ra các bài toán về phân tích dao động riêng [15] và tối

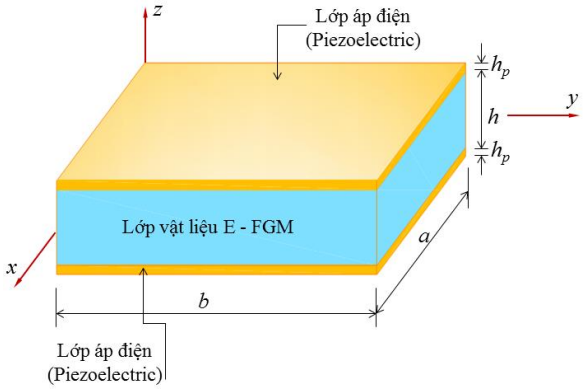
ưu vị trí các cặp miếng áp điện gắn trên kết cấu tấm composite [16] cũng đã được nhóm nghiên cứu này thực hiện. Nguyễn Đình Đức và cs. [17] đã phân tích dao động phi tuyến kết cấu vỏ hai độ cong FGM áp điện không hoàn hảo đặt trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng cơ học và nhiệt độ. Nguyen-Quang và cs. [18] đã phân tích và điều khiển kết cấu tấm FGM áp điện sử dụng phương pháp PTHH trơn CS-DSG3 (cell-based smoothed discrete shear gap method). Kết quả nghiên cứu cho thấy tính ưu việt của vật liệu áp điện trong việc điền khiển dao động của kết cấu tấm.

Qua các công trình đã được công bố nêu trên, có thể thấy đối tượng nghiên cứu là kết cấu tấm FGM có gắn lớp vật liệu áp điện đã dành được sự quan tâm đặc biệt từ các nhà khoa học trên thế giới và trong nước. Đã có nhiều phương pháp, mô hình tính được sử dụng để phân tích tĩnh và động loại kết cấu này. Phương pháp số có lợi thế là giải quyết được những bài toán với đối tượng kết cấu có hình dạng phức tạp hoặc điều kiện biên khác nhau. Phương pháp giải tích mặc dù chỉ giải quyết những bài toán đặc thù nhưng phương pháp này vẫn là một trong những lựa chọn tin cậy do có thể dự đoán được quy luật ứng xử cũng như có thể kiểm soát được kết quả. Kết quả của lời giải giải tích là cơ sở tốt để kiểm chứng độ chính xác của các phương pháp số. Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả sử dụng lời giải giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị để phân tích tĩnh kết cấu tấm làm bằng vật liệu E – FGM có gắn lớp áp điện tại mặt trên hoặc mặt dưới hoặc cả hai bề mặt tấm. Kết cấu tấm tổng thể E-FGM áp điện được xem xét chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt. Bài báo này sẽ góp phần làm phong phú thêm các nghiên cứu về phân tích tĩnh kết cấu tấm FGM có gắn các lớp vật liệu áp điện.

2. Các công thức lý thuyết

2.1. Tấm FGM áp điện

Xét tấm làm từ vật liệu E – FGM có gắn lớp áp điện tại mặt trên và dưới (Hình 1). Tấm có chiều dài a, chiều rộng b, chiều cao tấm h_t, chiều cao của lớp FGM và mỗi lớp áp điện lần lượt là h và h_p. Hệ tọa độ tấm (x, y, z) được lựa chọn với $z = 0$ tại mặt trung bình của tấm và chiều dương trục z hướng lên trên. Tấm chịu đồng thời tác dụng của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt.



Hình 1. Kết cấu tấm E – FGM áp điện

Mô đun đàn hồi kéo – nén (Young's modulus) biến thiên theo chiều dày z và tuân theo quy luật hàm số mũ [6]:

$$E(z) = E_b e^{\lambda(z+\frac{h}{2})} \text{ với } \lambda = \frac{1}{h} \ln \frac{E_t}{E_b} \tag{1}$$

trong đó E_b và E_t lần lượt là mô đun đàn hồi của vật liệu tại bề mặt dưới cùng và mặt trên cùng của tấm FGM; λ là tham số đặc trưng cho sự biến đổi vật liệu theo chiều dày tấm. Hệ số poát xông ν được giả thiết là hằng số.

2.2. Lý thuyết bốn ẩn chuyển vị

Trường chuyển vị theo HSDT-4 được biểu diễn dưới dạng [19]:

$$\begin{aligned} u(x,y,x,t) &= u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b(x,y,t)}{\partial x} - f(z)\frac{\partial w_s(x,y,t)}{\partial x};\\ v(x,y,x,t) &= v_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_b(x,y,t)}{\partial y} - f(z)\frac{\partial w_s(x,y,t)}{\partial y};\\ w(x,y,x,t) &= w_b(x,y,t) + w_s(x,y,t) \end{aligned} \tag{2}$$

trong đó u_0, v_0 lần lượt là các thành phần chuyển vị màng của điểm bất kỳ trên mặt trung bình theo phương x, y; w_b và w_s là các thành phần độ võng do mômen uốn và do lực cắt gây ra; $f(z)$ là hàm đặc trưng cho quy luật biến thiên của ứng suất cắt ngang theo chiều dày tấm. Hàm: $f(z) = z\left[-1/8 + 3/2(z/h_t)^2\right]$ được lấy theo tài liệu tham khảo [19], thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới tấm bằng không.

Trường biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z)\kappa_x^s \\ f(z)\kappa_y^s \\ f(z)\kappa_{xy}^s \\ g(z)\gamma_{yz}^s \\ g(z)\gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{3}$$

với:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \kappa_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}; \kappa_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2};\\ &g(z) = [1 - f'(z)]; \kappa_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \kappa_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}; \kappa_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y};\\ &\kappa_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}; \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}; \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng của lớp vật liệu FGM:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^c \\ \sigma_y^c \\ \sigma_{xy}^c \\ \tau_{yz}^c \\ \tau_{xz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{FGM} & c_{12}^{FGM} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{FGM} & c_{22}^{FGM} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^{FGM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{FGM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^{FGM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

trong đó các hệ số độ cứng của lớp vật liệu FGM c_{ij}^{FGM} được xác định theo:

$$c_{11}^{FGM} = c_{22}^{FGM} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; c_{22}^{FGM} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}; c_{44}^{FGM} = c_{55}^{FGM} = c_{66}^{FGM} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \tag{6}$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng của một lớp vật liệu áp điện:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^p \\ \sigma_y^p \\ \sigma_{xy}^p \\ \tau_{yz}^p \\ \tau_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^p & c_{12}^p & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^p & c_{22}^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{7}$$

trong đó $\left[c_{ij}^p\right]$ là ma trận các hệ số độ cứng của lớp áp điện, $\left[e_{ij}\right]$ là ma trận các hệ số ứng suất áp điện, $\{E\}$ là véc tơ cường độ điện trường.

Cường độ điện trường E tính toán thông qua trường điện thế Φ của lớp áp điện:

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{8}$$

trong đó quy luật biến đổi điện thế theo phương chiều dày của lớp áp điện Φ được giả thiết biến thiên theo hàm bậc nhất như sau [20–23]:

$$\Phi(x, y, z, t) = \left(z - \frac{h}{2}\right) \frac{1}{h_p} \phi_0^t \text{ với } h/2 \le z \le \text{h}/2{+}h_p \tag{9}$$

$$\Phi(x, y, z, t) = -\left(z + \frac{h}{2}\right) \frac{1}{h_p} \phi_0^d \text{ với } -h/2 - h_p \le z \le -h/2 \tag{10}$$

trong đó $\phi_0^t; \phi_0^d$ lần lượt là điện thế bên ngoài áp đặt lên lớp áp điện phía trên và phía dưới, dưới dạng tải trọng điện.

2.3. Phương trình chuyển động

Các phương trình cân bằng được thiết lập từ nguyên lý công ảo như sau:

$$\iiint_v \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \iint_\Omega q \left(\delta w_b + \delta w_s\right) d\Omega = 0 \tag{11}$$

Thay thế các thành phần biến dạng, điện tích xuất hiện và điện trường vào phương trình (11) và tích phân theo chiều dày z ta được:

$$\iint_\Omega \left\{ \begin{array}{l} N_{xx} \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} - M_{xx} \dfrac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - S_{xx} \dfrac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \\ +N_{yy} \dfrac{\partial \delta v}{\partial y} - M_{yy} \dfrac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - S_{yy} \dfrac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \\ +N_{xy} \dfrac{\partial \delta u}{\partial y} + N_{xy} \dfrac{\partial \delta v}{\partial x} - 2M_{xy} \dfrac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2S_{xy} \dfrac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \\ +Q_{yz} \dfrac{\partial \delta w_s}{\partial y} + Q_{xz} \dfrac{\partial \delta w_s}{\partial x} - q \delta w_b - q \delta w_s \end{array} \right\} d\Omega = 0 \tag{12}$$

trong đó các thành phần nội lực được tính theo:

$$\begin{aligned} \left\{N_{ij}, M_{ij}, S_{ij}\right\} &= \int_{-h/2-h_p}^{-h/2} \sigma_{ij}^p \{1, z, f(z)\} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^c \{1, z, f(z)\} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_p} \sigma_{ij}^p \{1, z, f(z)\} dz; \\ Q_{iz} &= \int_{-h/2-h_p}^{-h/2} \tau_{iz}^p \left[1 - f'(z)\right] dz + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{iz}^c \left[1 - f'(z)\right] dz + \int_{h/2}^{h/2+h_p} \tau_{iz}^p \left[1 - f'(z)\right] dz, \quad i, j = x, y \end{aligned} \tag{13}$$

Thực hiện các phép biến đổi biến phân và cho các hệ số của các biến phân chuyển vị $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$ bằng không ta nhận được phương trình cân bằng cho bài toán tĩnh như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \\
&\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

2.4. Lời giải giải tích – nghiệm Navier

Xét tấm E – FGM áp điện bốn biên tựa khớp, điều kiện biên có dạng:

$$\text{- Tại } x = 0 \text{ và } x = a\text{: } v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = S_y = \Phi = 0 \tag{15}$$

$$\text{- Tại } y = 0 \text{ và } y = b\text{: } u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = S_x = \Phi = 0 \tag{16}$$

Sử dụng dạng nghiệm Navier thỏa mãn điều kiện biên (15), (16) cho tấm E – FGM áp điện như sau:

$$\begin{aligned}
u_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}\cos\alpha x \sin\beta y; v_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}\sin\alpha x\cos\beta y \\
w_b(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^b \sin\alpha x \sin\beta y; w_s(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^s \sin\alpha x \sin\beta y
\end{aligned} \tag{17}$$

trong đó: $\alpha = m\pi/a; \beta = n\pi/b$ và $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}^b, w_{mn}^s$ là các hệ số cần xác định.

Khai triển tải trọng tác dụng tải trọng q và điện thế áp đặt ϕ_0 được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên (15), (16):

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn}^b \\ w_{mn}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Thay (17) và (18) vào hệ các phương trình cân bằng (14), ta thu được phương trình để giải, biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn}^b \\ w_{mn}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

trong đó các hệ số s_{ij} và F_i được xác định theo:

$$\begin{aligned}
&s_{11} = A_1\alpha^2 + A_{19}\beta^2;\ s_{12} = (A_4 + A_{19})\alpha\beta;\\
&s_{13} = -\alpha\left[A_2\alpha^2 + (A_5 + 2A_{20})\beta^2\right];\\
&s_{14} = -\alpha\left[A_3\alpha^2 + (A_6 + 2A_{21})\beta^2\right];\ s_{22} = A_{19}\alpha^2 + A_7\beta^2;\\
&s_{23} = -\beta\left[A_8\beta^2 + (A_5 + 2A_{20})\alpha^2\right];\ s_{24} = -\beta\left[A_9\beta^2 + (A_6 + 2A_{21})\alpha^2\right];\\
&s_{33} = A_{10}\alpha^4 + 2(A_{12} + 2A_{22})\alpha^2\beta^2 + A_{14}\beta^4;\\
&s_{34} = A_{11}\alpha^4 + 2(A_{13} + 2A_{23})\alpha^2\beta^2 + A_{15}\beta^4;\\
&s_{44} = A_{16}\alpha^4 + A_{26}\alpha^2 + 2(A_{17} + 2A_{24})\alpha^2\beta^2 + A_{25}\beta^2 + A_{18}\beta^4;\\
&F_1 = \frac{\partial N_x^\phi}{\partial x};\ F_2 = \frac{\partial N_y^\phi}{\partial y};\ F_3 = q_0 + \frac{\partial^2 M_x^\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^\phi}{\partial y^2};\ F_4 = q_0 + \frac{\partial^2 S_x^\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y^\phi}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

với:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} c_{11}^p \\ c_{12}^p \\ c_{22}^p \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)\,]\,dz + \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} c_{11}^{FGM} \\ c_{12}^{FGM} \\ c_{13}^{FGM} \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)\,]\,dz \\
&+ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \begin{bmatrix} c_{11}^p \\ c_{12}^p \\ c_{22}^p \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)\,]\,dz
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{16} \\ A_{12} & A_{13} & A_{17} \\ A_{14} & A_{15} & A_{18} \end{bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} c_{11}^p \\ c_{12}^p \\ c_{22}^p \end{bmatrix} \left[z^2\ zf(z)\ f^2(z)\right] dz \\
&+ \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} c_{11}^{FGM} \\ c_{12}^{FGM} \\ c_{13}^{FGM} \end{bmatrix} \left[z^2 zf(z)\ f^2(z)\right] dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \begin{bmatrix} c_{11}^p \\ c_{12}^p \\ c_{22}^p \end{bmatrix} \left[z^2\ zf(z)\ \ f^2(z)\right] dz
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\{A_{25}, A_{26}\} &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \left\{c_{44}^p, c_{55}^p\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz + \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{c_{44}^{FGM}, c_{55}^{FGM}\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz \\
&+ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \left\{c_{44}^p, c_{55}^p\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\{A_{25}, A_{26}\} &= \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \left\{c_{44}^p, c_{55}^p\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz + \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{c_{44}^{FGM}, c_{55}^{FGM}\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz \\
&+ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \left\{c_{44}^p, c_{55}^p\right\} [1 \ - \ f'(z)]^2 dz
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} N_x^\phi & M_x^\phi & S_x^\phi \\ N_y^\phi & M_y^\phi & S_y^\phi \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}-h_p}^{-\frac{h}{2}} \frac{\phi_0}{h_p} \begin{bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)]\, dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_p} \frac{\phi_0}{h_p} \begin{bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \end{bmatrix} [1 \quad z \quad f(z)]\, dz \tag{25}$$

3. Kết quả số và thảo luận

3.1. Bài toán kiểm chứng

Xét tấm vuông làm bằng vật liệu E – FGM kích thước ($a \times a \times h$), có gắn lớp áp điện chiều dày h_p tại mặt trên hoặc mặt dưới của tấm. Các thông số vật liệu được tham khảo theo nghiên cứu của Ray và Sachade [5].

Các thông số vật liệu:

+ Vật liệu E – FGM: Mô đun đàn hồi tại mặt đáy và mặt trên cùng của lớp FGM là: $E_d = 200$ GPa và E_t thay đổi; Hệ số Poát xông $\nu = 0{,}3$.

+ Vật liệu áp điện PFRC (PZT5H): $c_{11}^p = 32{,}6$ GPa, $c_{12}^p = 4{,}3$ GPa, $c_{22}^p = 7{,}2$ GPa, $c_{44}^p = 1{,}05$ GPa, $c_{55}^p = c_{66}^p = 1{,}29$ GPa, $e_{31} = -6{,}76$ C/m^2.

Tấm chịu tải trọng cơ học và điện thế áp đặt phân bố dạng hình sin lần lượt là: $q = q_0 \sin\alpha x \sin\beta y$ và $\phi = \phi_0 \sin\alpha x \sin\beta y$ (với $m = n = 1$, $q_0 = -40$ N/m^2, ϕ_0 thay đổi).

Kết quả độ võng và ứng suất không thứ nguyên tính theo lý thuyết tấm bậc cao bốn ẩn chuyển vị được so sánh với nghiệm chính xác của Ray và Sachade [5], phương pháp giải tích theo lý thuyết tấm bậc cao 12 ẩn chuyển vị của tác giả Shiyekar và Kant [6] và một nghiên cứu khác của các tác giả Ray và Sachade sử dụng phương pháp PTHH [3].

Các biểu thức không thứ nguyên [5]:

$$\begin{aligned} &\bar{w} = \frac{100E_b}{(a/h)^4 h\,|q_0|} \mathrm{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right); \bar{\sigma}_x = \frac{1}{(a/h)^2\,|q_0|} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm\frac{h}{2}\right); \\ &\bar{\sigma}_y = \frac{1}{(a/h)^2\,|q_0|} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm\frac{h}{2}\right); \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{(a/h)^2\,|q_0|} \bar{\sigma}_{xy}\left(0, 0, \pm\frac{h}{2}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

Kết quả so sánh trong các Bảng 1 và Bảng 2 cho thấy mô hình dựa trên lý thuyết HSDT-4 là hiệu quả khi cho kết quả độ võng, ứng suất rất gần với kết quả tính theo mô hình 3D [5] trong khi số ẩn và số phương trình ít hơn so với các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao khác. Sử dụng bộ chương trình đã thiết lập này, bài báo thực hiện các khảo sát số để phân tích tĩnh kết cấu tấm E – FGM có gắn các lớp vật liệu áp điện tại mặt trên và dưới của tấm chịu đồng thời tác động của tải trọng cơ học và điện trường.

Phần trăm sai số được tính theo:

$$\delta\,(\%) = \frac{KQ^{tt} - KQ^{3D}}{KQ^{3D}} 100\% \quad (KQ^{tt}\text{: kết quả tính toán; } KQ^{3D}\text{: kết quả 3D}) \tag{27}$$

3.2. Bài toán khảo sát

Trong mục khảo sát này, bằng các ví dụ số cụ thể, bài báo khảo sát ảnh hưởng của vị trí đặt tải trọng (mặt trên hoặc mặt dưới hoặc cả hai mặt của tấm FGM áp điện), tính dị hướng của vật liệu và điện thế áp đặt đến độ võng, ứng suất của kết cấu tấm FGM áp điện.

Bảng 1. Độ võng và ứng suất của tấm E-FGM ($E_t/E_d = 10$) có gắn lớp áp điện tại mặt trên chịu tải trọng cơ học $q_0^t = -40$ N/m^2 và điện thế ϕ_0^t phân bố dạng hình sin

Kết quả	Phương pháp	$a/h = 10$			$a/h = 100$		
		$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$	$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$
$\bar{w}$	3D [5]	−0,9553	186,8222	−188,7329	−0,9155	0,9368	−2,7678
	Bài báo	−0,9577	186,4727	−188,3882	−0,9151	0,9350	−2,7652
	δ (%)	0,2510	−0,1870	−0,1830	−0,0440	−0,1920	−0,0940
	HSDT [6]	−0,9575	187,8140	−189,7290	−0,9147	0,9342	−2,7635
	δ (%)	0,2300	0,5310	0,5280	−0,0870	−0,2780	−0,1550
	PTHH [3]	−0,9485	183,9178	−185,8148	−0,9145	0,9328	−2,7619
	δ (%)	−0,7120	−1,5550	−1,5460	−0,1090	−0,4270	−0,2130
$\bar{\sigma}_x$	3D [5]	0,0871	−5,8052	5,9794	0,0874	0,0291	0,1457
		−0,4201	203,9840	−204,8249	−0,4161	1,6124	−2,4446
	Bài báo	0,0878	−5,7503	5,9258	0,0874	0,0292	0,1456
	δ (%)	0,8040	−0,9460	−0,8960	0,0000	0,3440	−0,0690
		−0,4196	202,4409	−203,2800	−0,4158	1,6107	−2,4422
	δ (%)	−0,1190	−0,7560	−0,7540	−0,0720	−0,1050	−0,0980
	HSDT [6]	0,0873	−5,9143	6,0891	0,0872	0,0296	0,1448
	δ (%)	0,2300	1,8790	1,8350	−0,2290	1,7180	−0,6180
		−0,4247	206,3480	−207,1980	−0,4172	1,6138	−2,4483
	δ (%)	1,0950	1,1590	1,1590	0,2640	0,0870	0,1510
	PTHH [3]	0,0893	−6,1985	6,3772	0,0893	0,0299	0,1486
	δ (%)	2,5260	6,7750	6,6530	2,1740	2,7490	1,9900
		−0,4250	208,1964	−209,0447	−0,4247	1,6447	−2,4941
	δ (%)	1,1660	2,0650	2,0600	2,0670	2,0030	2,0250
$\bar{\sigma}_y$	3D [5]	0,0870	−19,6720	19,8460	0,0873	−0,1145	0,2892
		−0,4213	57,9752	−58,8178	−0,4170	0,1751	−1,0090
	Bài báo	0,0877	−20,1049	20,2803	0,0873	−0,1144	0,2890
	δ (%)	0,8050	2,2010	2,1880	0,0000	−0,0870	−0,0690
		−0,4205	58,8948	−59,7358	−0,4167	0,1743	−1,0077
	δ (%)	−0,1900	1,5860	1,5610	−0,0720	−0,4570	−0,1290
	HSDT [6]	0,0873	−19,8310	20,0051	0,0871	−0,1140	0,2882
	δ (%)	0,3450	0,8080	0,8020	−0,2290	−0,4370	−0,3460
		−0,4256	59,2543	−60,1056	−0,4181	0,1771	−1,0134
	δ (%)	1,0210	2,2060	2,1890	0,2640	1,1420	0,4360
	PTHH [3]	0,0893	−20,1638	20,3424	0,0892	−0,1167	0,2951
	δ (%)	2,6440	2,5000	2,5010	2,1760	1,9210	2,0400
		−0,4260	58,2432	−59,0951	−0,4256	0,1772	−1,0283
	δ (%)	1,1160	0,4620	0,4710	2,0620	1,1990	1,9130
$\bar{\sigma}_{xy}$	3D [5]	−0,0469	6,8593	−6,9530	−0,0470	0,0230	−0,1171
		0,2242	−70,4771	70,9256	0,2243	−0,4813	0,9298
	Bài báo	−0,0472	6,9610	−7,0555	−0,0470	0,0229	−0,1170
	δ (%)	0,6400	1,4830	1,4740	0,0000	−0,4350	−0,0850
		0,2262	−70,3596	70,8120	0,2241	−0,4806	0,9288
	δ (%)	0,8920	−0,1670	−0,1600	−0,0890	−0,1450	−0,1080
	HSDT [6]	−0,0469	6,9021	−6,9960	−0,0470	0,0229	−0,1169
	δ (%)	0,000	0,6240	0,6180	0,000	−0,4350	−0,1710
		0,2251	−71,0439	71,4941	0,2239	−0,4803	0,9281
	δ (%)	0,4010	0,8040	0,8020	−0,1780	−0,2080	−0,1830
	PTHH [3]	−0,0481	7,1027	−7,1989	−0,0480	0,0233	−0,1194
	δ (%)	2,5590	3,5480	3,5370	2,1280	1,3040	1,9640
		0,2290	−71,7882	72,2462	0,2289	−0,4907	0,9486
	δ (%)	2,1410	1,8600	1,8620	2,0510	1,9530	2,0220

Bảng 2. Độ võng và ứng suất của tấm E-FGM (E_t/E_d = 0,1) có gắn lớp áp điện tại mặt dưới chịu tải trọng cơ học $q_0^t = -40$ N/m^2 và điện thế ϕ_0^t phân bố dạng hình sin

Kết quả	Phương pháp	a/h = 10			a/h = 100		
		$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$	$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$
$\bar{w}$	3D [5]	9,2748	1748,2000	−1807,5000	−8,9338	8,7587	−26,7280
	Bài báo	−9,3665	1774,0500	−1792,8000	−8,9458	8,6595	−26,5510
	δ (%)	0,9890	1,4780	−0,8140	0,1340	−1,1330	−0,6620
	HSDT [6]	−9,1979	1776,2100	−1794,6000	−8,9093	8,5929	−26,4120
	δ (%)	−0,8290	1,6020	−0,7140	−0,2740	−1,8930	−1,1850
	PTHH [3]	−9,2761	1789,0000	−1766,7000	−8,9364	8,6323	−26,5050
	δ (%)	0,0140	2,3340	−2,2570	0,0290	−1,4430	−0,8340
$\bar{\sigma}_x$	3D [5]	0,4032	−195,9400	196,7420	0,4005	−1,5486	2,3495
		−0,0882	5,4977	−5,6753	−0,0866	−0,0313	−0,1419
	Bài báo	0,4010	−193,6200	194,4200	0,3980	−1,5410	2,3360
	δ (%)	−0,5460	−1,1830	−1,1800	−0,6240	−0,4910	−0,5750
		−0,0867	5,3690	−5,5420	−0,0860	−0,0320	−0,1410
	δ (%))	−1,7010	−2,3410	−2,3490	−0,6930	2,2360	−0,6340
	HSDT [6]	0,4122	−200,2700	201,0910	0,4094	−1,5643	2,3495
	δ (%)	2,2320	2,2100	2,2110	2,2220	1,0140	0,0000
		−0,0870	5,1151	−5,2891	−0,0848	−0,0329	−0,1347
	δ (%)	−1,3610	−6,9590	−6,8050	−2,0790	5,1120	−5,0740
	PTHH [3]	0,4060	−198,9900	199,8020	0,4058	−1,5729	2,3844
	δ (%)	0,6940	1,5590	1,5550	1,3230	1,5690	1,4850
		−0,0882	5,7883	−5,9647	−0,0881	−0,0328	−0,1435
	δ (%)	0,0000	5,2860	5,0990	1,7320	4,7920	1,1280
$\bar{\sigma}_y$	3D [5]	0,4115	−54,9290	55,7515	0,4085	−0,1529	0,9700
		−0,0880	18,8895	−19,066	−0,0858	0,1082	−0,2798
	Bài báo	0,4096	−55,0430	55,8622	0,4059	−0,1466	0,9585
	δ (%)	−0,4620	0,2080	0,1990	−0,6360	−4,1200	−1,1860
		−0,0858	19,2263	−19,3980	−0,0855	0,1075	−0,2784
	δ (%))	−2,5000	1,7830	1,7430	−0,3500	−0,6470	−0,5000
	HSDT [6]	0,4209	−58,383	59,2244	0,4177	−0,1697	1,0052
	δ (%)	2,2840	6,2880	6,2290	2,2520	10,9880	3,6290
		−0,0862	18,5407	−18,713	−0,0840	0,1044	−0,2724
	δ (%))	−2,0450	−1,8470	−1,8490	−2,0980	−3,5120	−2,6450
	PTHH [3]	0,4148	−54,2980	55,1272	0,4143	−0,1484	0,9771
	δ (%)	0,8020	−1,1490	−1,1200	1,4200	−2,9430	0,7320
		−0,0874	19,2664	−19,4410	−0,0873	0,1096	−0,2842
	δ (%)	−0,6820	1,9950	1,9710	1,7480	1,2940	1,5730
$\bar{\sigma}_{xy}$	3D [5]	−0,2193	67,4898	−67,929	−0,2178	0,4581	−0,8937
		0,0453	−6,5681	6,6587	0,0464	−0,0207	0,1135
	Bài báo	−0,2182	66,9472	−67,384	−0,2163	0,4543	−0,8869
	δ (%)	−0,5020	−0,8040	−0,8020	−0,6890	−0,8300	−0,7610
		0,0464	−6,6217	6,7146	0,0463	−0,0203	0,1128
	δ (%)	2,4280	0,8160	0,8400	−0,2160	−1,9320	−0,6170
	HSDT [6]	−0,2208	68,2317	−68,673	−0,2208	0,4635	−0,9051
	δ (%)	0,6840	1,0990	1,0970	1,3770	1,1790	1,2760
		0,0472	−6,7491	6,8436	0,0472	−0,0207	0,1151
	δ (%)	4,1940	2,7560	2,7770	1,7240	0,0000	1,4100
	PTHH [3]	−0,2164	67,1785	−67,6110	−0,2150	0,4517	−0,8817
	δ (%)	−1,3220	−0,4610	−0,4670	−1,2860	−1,3970	−1,3430
		0,0450	−6,5236	6,6136	0,0461	−0,0201	0,1123
	δ (%)	−0,6620	−0,6780	−0,6770	−0,6470	−2,8990	−1,0570

Xét tấm chữ nhật làm bằng vật liệu E – FGM, lớp áp điện PFRC được gắn tại mặt trên và dưới của tấm, kích thước tấm $a \times b \times h_t$, lớp lõi FGM có chiều dày h_c, mỗi lớp áp điện có chiều dày h_p, các thuộc tính vật liệu lấy theo mục 3.1. Tấm chịu tải trọng cơ học và điện thế áp đặt phân bố dạng hình sin tác dụng lên lớp trên ($q_0^t = -40$ N/m^2 và ϕ_0^t được xem xét thay đổi). Các đại lượng không thứ nguyên tính theo biểu thức (26), trong đó $h = h_c$, các ứng suất: $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}$ được tính giá trị tại mặt trên và mặt dưới của tấm FGM ($z = \pm h_c/2$).

Độ võng và ứng suất không thứ nguyên của kết cấu tấm tổng thể chịu tải trọng cơ học và điện thế áp đặt phân bố hình sin tác dụng lên mặt trên hoặc mặt dưới với cường độ ϕ_0^t hoặc ϕ_0^d được trình bày trong các từ Bảng 3 đến Bảng 6 theo tỷ số a/h_c với các mức điện thế áp đặt khác nhau.

Bảng 3. Độ võng và ứng suất của tấm E-FGM ($E_t/E_d = 10$) có gắn hai lớp PFRC tại hai mặt chịu tải trọng cơ học q_0^t và điện thế phân bố hình sin ($\phi_0^d = 0, \phi_0^t$ thay đổi)

Kết quả	$a/h_c = 10$			$a/h_c = 100$		
	$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$	$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$
$\bar{w}$	−0,9476	185,2783	−187,1735	−0,9060	0,9365	−2,7485
$\bar{\sigma}_x$	0,0866	−5,6652	5,8384	0,0863	0,0289	0,1437
	−0,4168	202,1050	−202,9385	−0,4137	1,6101	−2,4374
$\bar{\sigma}_y$	0,0867	−20,0153	20,1887	0,0864	−0,1145	0,2873
	−0,4159	58,6044	−59,4362	−0,4128	0,1759	−1,0016
$\bar{\sigma}_{xy}$	−0,0467	6,9140	−7,0073	−0,0465	0,0230	−0,1160
	0,2242	−70,1910	70,6393	0,2225	−0,4808	0,9259

Bảng 4. Độ võng và ứng suất của tấm E-FGM ($E_t/E_d = 0{,}1$) có gắn hai lớp PFRC tại hai mặt chịu tải trọng cơ học q_0^t và điện thế phân bố hình sin ($\phi_0^d = 0, \phi_0^t$ thay đổi)

Kết quả	$a/h_c = 10$			$a/h_c = 100$		
	$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$	$\phi_0^t = 0$	$\phi_0^t = 100$	$\phi_0^t = -100$
$\bar{w}$	−8,5468	3213,0193	−3230,1129	−8,1424	23,9101	−40,1950
$\bar{\sigma}_x$	0,3822	−36,7239	37,4883	0,3794	0,0095	0,7494
	−0,0770	41,4229	−41,5769	−0,0768	0,3381	−0,4917
$\bar{\sigma}_y$	0,3750	−170,4463	171,1963	0,3722	−1,3349	2,0793
	−0,0778	28,0506	−28,2061	−0,0775	0,2037	−0,3587
$\bar{\sigma}_{xy}$	−0,2039	55,7766	−56,1843	−0,2024	0,3568	−0,7616
	0,0417	−18,7044	18,7878	0,0416	−0,1459	0,2290

Bảng 3 và Bảng 4 trình bày kết quả độ võng, ứng suất của tấm FGM áp điện dưới tác động đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt trong hai trường hợp $E_t/E_d = 10$ và $E_t/E_d = 0{,}1$. Vì giá trị tối đa của mô đun đàn hồi E đối với tấm có $E_t/E_d = 0{,}1$ nhỏ hơn nhiều so với trường hợp $E_t/E_d = 10$ nên kết quả độ võng và ứng suất của tấm trong Bảng 4 lớn nhiều hơn so với kết quả trong bảng Bảng 3.

Các số liệu cũng cho thấy: Khi lớp PFRC chịu điện thế áp đặt mang dấu dương, nó chống lại các biến dạng gây ra bởi tải cơ học hướng xuống dưới ($q_0^t = -40$ N/m^2) trong khi đối với điện áp âm, lớp PFRC làm tăng biến dạng gây ra bởi tải trọng cơ học ($q_0^t = -40$ N/m^2) này; Khi chiều dày tấm tăng lên (tỷ số a/h giảm) ảnh hưởng của mức điện thế áp đặt đến độ võng và ứng suất của tấm FGM áp điện là lớn hơn.

So sánh hiệu suất của lớp PFRC khi điện thế áp đặt ở bề mặt dưới (Bảng 5 và Bảng 6) so với khi điện thế áp đặt ở bề mặt trên (Bảng 3 và Bảng 4), ta thấy rằng: đối với cả hai tấm FGM dày và mỏng,

Bảng 5. Độ võng và ứng suất của tấm E-FGM ($E_t/E_d = 10$) có gắn hai lớp PFRC tại hai mặt chịu tải trọng cơ học q_0^t và điện thế phân bố hình sin ($\phi_0^t = 0, \phi_0^d$ thay đổi)

Kết quả	$a/h_c = 10$			$a/h_c = 100$		
	$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$	$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$
$\bar{w}$	−0,9476	362,1587	−364,0539	−0,9060	2,7062	−4,5182
$\bar{\sigma}_x$	0,0866	−46,1774	46,3506	0,0863	−0,3762	0,5488
	−0,4168	46,4898	−47,3233	−0,4137	0,0540	−0,8813
$\bar{\sigma}_y$	0,0867	−31,8784	32,0517	0,0864	−0,2331	0,4059
	−0,4159	189,4802	−190,3120	−0,4128	1,4847	−2,3104
$\bar{\sigma}_{xy}$	−0,0467	21,0150	−21,1083	−0,0465	0,1640	−0,2570
	0,2242	−63,5304	63,9787	0,2225	−0,4143	0,8593

Bảng 6. Độ võng và ứng suất của tấm E−FGM ($E_t/E_d = 0{,}1$) có gắn hai lớp PFRC tại hai mặt chịu tải trọng cơ học q_0^t và điện thế phân bố hình sin ($\phi_0^t = 0, \phi_0^d$ thay đổi)

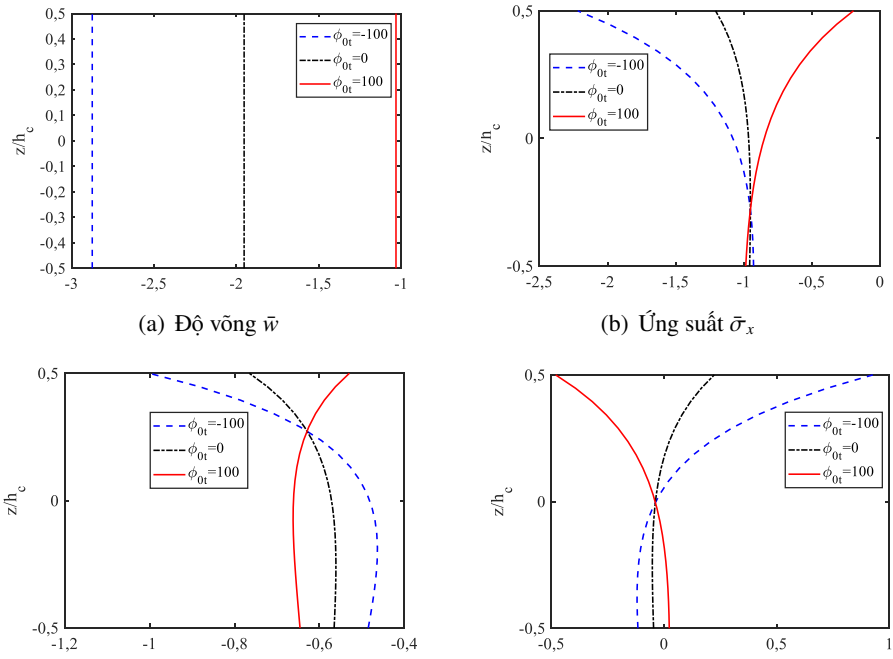
Kết quả	$a/h_c = 10$			$a/h_c = 100$		
	$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$	$\phi_0^d = 0$	$\phi_0^d = 100$	$\phi_0^d = -100$
$\bar{w}$	−8,5468	1706,6711	−1723,7647	−8,1424	8,8275	−25,1123
$\bar{\sigma}_x$	0,3822	−191,2732	192,0376	0,3794	−1,5359	2,2947
	−0,0770	4,7044	−4,8584	−0,0768	−0,0291	−0,1245
$\bar{\sigma}_y$	0,3750	−53,2342	53,9842	0,3722	−0,1626	0,9071
	−0,0778	18,5083	−18,6638	−0,0775	0,1082	−0,2633
$\bar{\sigma}_{xy}$	−0,2039	65,8289	−66,2366	−0,2024	0,4573	−0,8620
	0,0417	−6,2496	6,3329	0,0416	−0,0213	0,1044

lớp PFRC được kích hoạt ($\phi_0 = +100$; $\phi_0 = -100$) sẽ gây ra sự thay đổi lớn về độ võng so với độ trường hợp $\phi_0 = 0$ và sự thay đổi này là thước đo cho khả năng kiểm soát độ võng và ứng suất của lớp PFRC. Do vậy, có thể kết luận rằng nếu lớp PFRC được gắn với bề mặt của tấm FGM có mô đun đàn hồi E nhỏ nhất (độ cứng của vật liệu là tối thiểu) thì lớp PFRC được kích hoạt trở nên hiệu quả nhất trong việc kiểm soát biến dạng đàn hồi của tấm FGM.

Hình 3 biểu diễn sự biến thiên của độ võng $\bar{w}$ và các ứng suất $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_{xy}$ theo chiều dày lớp lõi E – FGM khi tải trọng cơ học và điện thế áp đặt tác dụng lên lớp áp điện PFRC phía trên. Các đường đồ thị cho thấy khi cực tính của điện áp thay đổi từ âm sang dương, lớp áp điện PFRC tạo ra ảnh hưởng đảo ngược lên các chuyển vị và ứng suất của tấm E – FGM.

Khi tải trọng cơ học và điện thế áp đặt tác dụng lên lớp áp điện PFRC phía dưới (Hình 3), giá trị độ võng và các thành phần ứng suất phân bố theo chiều dày tấm thay đổi đáng kể cả về hình dạng đồ thị và giá trị so với khi tải trọng và điện thế áp đặt lên lớp PFRC phía trên (Hình 3). Do lớp áp điện PFRC phía trên gắn tại bề mặt của lớp lõi E – FGM có mô đun đàn hồi E là lớn nhất ($E_t/E_d = 10$) trong khi lớp áp điện PFRC phía dưới gắn tại bề mặt có mô đun đàn hồi E là nhỏ nhất dẫn đến ảnh hưởng của tải trọng cơ học và điện thế áp đặt lên kết cấu tấm trong hai trường hợp này là khác nhau.

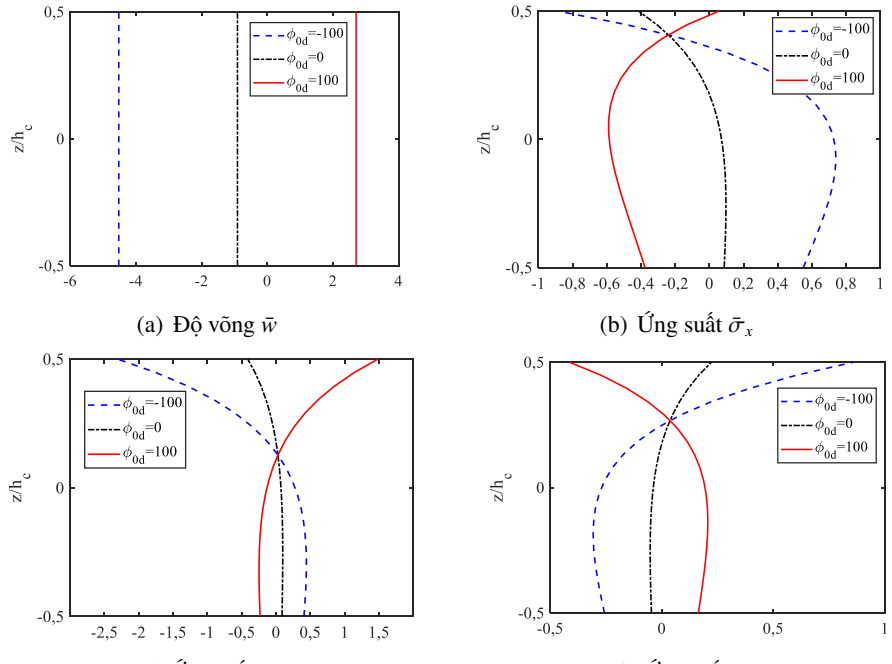
Trường hợp áp đặt lên lớp PFRC phía trên một điện thế phân bố dạng hình sin có cường độ không thay đổi $\phi_0^t = -100$. Khi có tải trọng cơ học ($q_0^t = -40$ N/m^2) và điện thế áp đặt lên lớp áp điện PFRC phía dưới (ϕ_0^d thay đổi), lúc này sẽ xảy ra hiện tượng cộng tác dụng về tải trọng điện dẫn đến biến dạng tấm tăng lên nếu điện thế áp đặt cùng dấu hoặc bị triệt tiêu nếu ngược dấu (Hình 4).



(a) Độ võng $\bar{w}$ (b) Ứng suất $\bar{\sigma}_x$

(c) Ứng suất $\bar{\sigma}_y$ (d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{xy}$

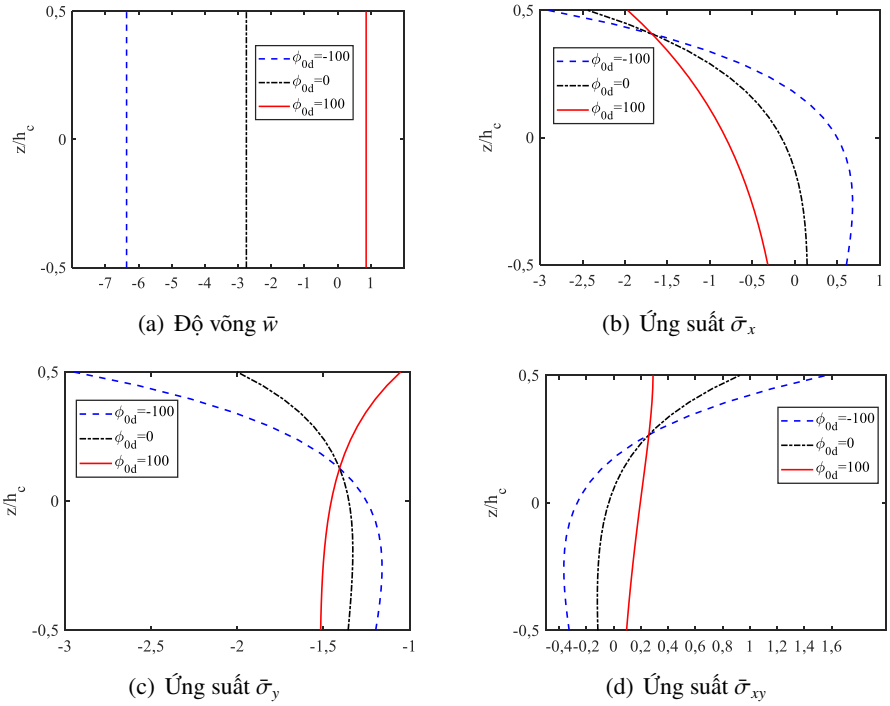
Hình 2. Ảnh hưởng của điện thế áp đặt $\phi^t(\phi^d = 0)$ đến độ võng, sự phân bố ứng suất theo chiều dày tấm E – FGM áp điện hai mặt $(E_t/E_d = 10; a/b = 1; a/h_c = 100)$



(a) Độ võng $\bar{w}$ (b) Ứng suất $\bar{\sigma}_x$

(c) Ứng suất $\bar{\sigma}_y$ (d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{xy}$

Hình 3. Ảnh hưởng của điện thế áp đặt $\phi^d(\phi^t = 0)$ đến độ võng, sự phân bố ứng suất theo chiều dày tấm E – FGM áp điện hai mặt $(E_t/E_d = 10; a/b = 1; a/h_c = 100)$



(a) Độ võng $\bar{w}$ (b) Ứng suất $\bar{\sigma}_x$

(c) Ứng suất $\bar{\sigma}_y$ (d) Ứng suất $\bar{\sigma}_{xy}$

Hình 4. Ảnh hưởng của điện thế áp đặt ϕ^d ($\phi^t = -100$) đến độ võng, sự phân bố ứng suất theo chiều dày tấm E – FGM áp điện hai mặt ($E_t/E_d = 10; a/b = 1; a/h_c = 100$)

4. Kết luận

Trong bài báo này, mô hình giải tích được xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao bốn ẩn chuyển vị để tính toán độ võng và ứng suất của kết cấu tấm E – FGM có gắn lớp composite cốt sợi là vật liệu áp điện (PFRC) tại mặt trên và mặt dưới tấm. Lớp PFRC được xem xét ở đây là một loại vật liệu thông minh mới với các sợi áp điện được định hướng dọc theo chiều dài của tấm. Khi lớp PFRC chịu một điện áp dương, nó chống lại các biến dạng gây ra bởi tải trọng cơ học theo chiều từ trên xuống và ngược lại. Lớp PFRC được kích hoạt ảnh hưởng đáng kể đến sự phân bố của các ứng suất theo bề dày của tấm FGM. Các kết quả số đã chỉ ra rằng hiệu suất của lớp PFRC được kích hoạt trở nên tối đa khi lớp PFRC được gắn với bề mặt mềm nhất của lớp lõi FGM. Các kết quả khảo sát được trình bày trong bài báo này là cơ sở hữu ích cho việc phát triển các kết cấu "thông minh" mới và có thể phục vụ mục đích kiểm chứng các mô hình số.

Tài liệu tham khảo

[1] Shakeri, M., Mirzaeifar, R. (2009). Static and dynamic analysis of thick functionally graded plates with piezoelectric layers using layerwise finite element model. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 16(8):561–575.

[2] Selim, B. A., Zhang, L. W., Liew, K. M. (2016). Active vibration control of FGM plates with piezoelectric layers based on Reddy's higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 155:118–134.

[3] Ray, M. C., Sachade, H. M. (2006). Finite element analysis of smart functionally graded plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18-19):5468–5484.

[4] Rouzegar, J., Abbasi, A. (2017). A refined finite element method for bending of smart functionally graded plates. *Thin-Walled Structures*, 120:386–396.
[5] Ray, M. C., Sachade, H. M. (2006). Exact solutions for the functionally graded plates integrated with a layer of piezoelectric fiber-reinforced composite. *Journal of Applied Mechanics*, 73(4):622–632.
[6] Shiyekar, S., Kant, T. (2010). An electromechanical higher order model for piezoelectric functionally graded plates. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(2):163–174.
[7] Shimpi, R. P., Patel, H. G. (2006). Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5):979–999.
[8] El Meiche, N., Tounsi, A., Ziane, N., Mechab, I. (2011). A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4):237–247.
[9] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2013). A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5):3269–3281.
[10] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2013). A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 96:165–173.
[11] Daouadji, T. H., Tounsi, A. (2013). A new higher order shear deformation model for static behavior of functionally graded plates. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 5(3):351–364.
[12] Rouzegar, J., Abad, F. (2015). Free vibration analysis of FG plate with piezoelectric layers using four-variable refined plate theory. *Thin-Walled Structures*, 89:76–83.
[13] Ngọc, L. K. (2010). *Tính toán tĩnh và dao động của kết cấu tấm composite áp điện*. Luận án tiến sĩ cơ học, Đại học Bách Khoa Hà Nội.
[14] Tú, T. M., Quốc, T. H., Thẩm, V. V. (2018). Phân tích tĩnh tấm composite có lớp áp điện theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Reddy bằng phương pháp giải tích. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 12(4):40–50.
[15] Thẩm, V. V., Quốc, T. H., Tú, T. M. (2019). Phân tích dao động riêng kết cấu tấm composite lớp gia cường ống nano cacbon có gắn lớp vật liệu áp điện. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 13(3V):42–54.
[16] Tham, V. V., Quoc, T. H., Tu, T. M. (2018). Optimal placement and active vibration control of composite plates integrated piezoelectric sensor/actuator pairs. *Vietnam Journal of Science and Technology*, 56(1): 113.
[17] Duc, N. D., Quan, T. Q., Luat, V. D. (2015). Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable piezoelectric FGM double curved shallow shells under damping-thermo-electro-mechanical loads. *Composite Structures*, 125:29–40.
[18] Nguyen-Quang, K., Dang-Trung, H., Ho-Huu, V., Luong-Van, H., Nguyen-Thoi, T. (2017). Analysis and control of FGM plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3). *Composite Structures*, 165:115–129.
[19] Quoc, T. H., Tu, T. M., Tham, V. V. (2019). Free vibration analysis of smart laminated functionally graded CNT reinforced composite plates via new four-variable refined plate theory. *Materials*, 12(22):3675.
[20] Sayyaadi, H., Rahnama, F., Farsangi, M. A. A. (2016). Energy harvesting via shallow cylindrical and spherical piezoelectric panels using higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 147: 155–167.
[21] Shiyekar, S. M., Kant, T. (2011). Higher order shear deformation effects on analysis of laminates with piezoelectric fibre reinforced composite actuators. *Composite Structures*, 93(12):3252–3261.
[22] Zenkour, A. M., Alghanmi, R. A. (2019). Bending of exponentially graded plates integrated with piezoelectric fiber-reinforced composite actuators resting on elastic foundations. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 75:461–471.
[23] Tran, H. Q., Vu, V. T., Tran, M. T., Nguyen-Tri, P. (2020). A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates. *Mechanics of Materials*, 142:103294.