TÍNH TRUYỀN NHIỆT VĨ MÔ CỦA VẬT LIỆU TỔNG HỢP HAI PHA VỚI PHA CỐT SỢI TRỤ ĐƯỢC PHÂN BỐ TUẦN HOÀN

Nguyễn Đình Hải[a,*], Trần Anh Tuấn[b]

[a] *Khoa Kỹ Thuật Xây Dựng, Trường Đại học giao thông vận tải, số 3 đường Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam*
[b] *Khoa Công Trình, Trường Đại học giao thông vận tải, số 3 đường Cầu Giấy, quận Đống Đa, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 30/03/2020, Sửa xong 29/04/2020, Chấp nhận đăng 12/05/2020

Tóm tắt

Nghiên cứu này nhằm xác định tính truyền nhiệt vĩ mô của vật liệu tổng hợp bao gồm các sợi hình trụ tròn phân bố tuần hoàn trong một chất nền. Để tính tới tính tuần hoàn của các sợi thì nghiên cứu đã phát triển phương pháp của Rayleigh để giải bài toán. Với phương pháp này trường nhiệt độ và hệ số dẫn nhiệt có hiệu của vật liệu tổng hợp được xác định với độ chính xác cao. Các kết quả áp dụng số của phương pháp này sẽ được so sánh với các kết quả thu được từ phương pháp phần tử hữu hạn. Phương pháp tính toán thiết lập trong bài báo này có thể được áp dụng trực tiếp cho các bài toán truyền dẫn tương đương như: dẫn điện, khuếch tán, và dòng chảy trong vật liệu rỗng, . . .

Từ khoá: hệ số dẫn nhiệt vĩ mô; phương pháp Rayleigh; phân bố tuần hoàn; phương pháp phần tử hữu hạn.

MACROSCOPIC THERMAL CONDUCTIVITY OF TWO – PHASE COMPOSITE CONSISTING OF PERIODIC ARRAYS OF CIRCULAR CYLINDRICAL FIBERS

Abstract

The purpose of this work is to determine the macroscopic thermal of composites consisting of circular cylinders fiber in a periodic arrangement embedded in a matrix. For accounting the periodic distribution of fiber in matrix in this investigation we extend the Rayleigh method. The temperature field and effective conductivities of composite were calculated to a very high order to achieve a sufficient accuracy. The numerical results of method proposed are finally compared with results given by Finite element method. The method elaborated and results provided by the present work are directly applicable to other physically analogous transport phenomena, such as electric conduction, diffusion and flow in porous media, etc.

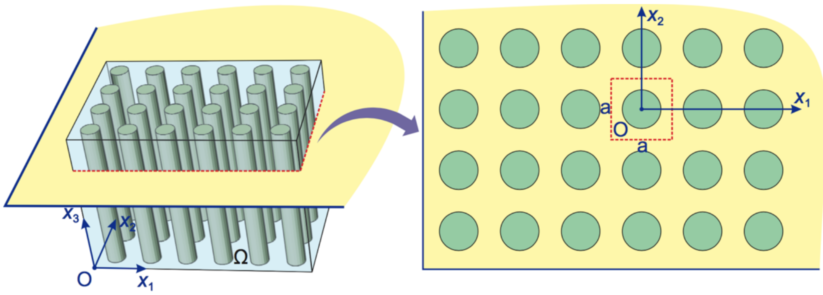
Keywords: macroscopic thermal conductivity; Rayleigh method; periodic arrangement; finite element method.

https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(2V)-07

1. Giới thiệu

Vật liệu tổng hợp được nghiên cứu ngày càng nhiều trong lĩnh vực xây dựng công trình do những lợi ích to lớn mà nó mang lại. Việc nghiên cứu các tính chất của nó là việc hết sức quan trọng để có thể áp dụng các loại vật liệu này vào trong các công trình cụ thể. Nghiên cứu này chú trọng đến việc xác định tính dẫn nhiệt vĩ mô của vật liệu tổng hợp gồm hai pha gồm pha nền và pha sợi, trong đó pha sợi có dạng hình trụ tròn và được phân bố tuần hoàn trong mặt phẳng truyền nhiệt $x_1 0 x_2$ và chạy dọc theo phương x_3 (Hình 1), cả hai pha cấu thành nên vật liệu tổng hợp đều được giả thuyết là truyền nhiệt đẳng hướng.

[*]Tác giả đại diện. *Địa chỉ e-mail:* nguyendinhhai.1986@utc.edu.vn (Hải, N. Đ.)



Hình 1. Vật liệu dẫn nhiệt cốt sợi được bố trí tuần hoàn dọc trục

Để xác định hệ số truyền nhiệt vĩ mô của vật liệu đã có rất nhiều mô hình giải tích được đề xuất dựa trên nghiệm của bài toán Eshelby như mô hình Bão hòa, mô hình Mori-Tanaka, mô hình Tự tương hợp, mô hình Tự tương hợp tổng quát [1–8], ... Tuy nhiên các phương pháp này mới chỉ tính đến tính chất của các pha thành phần, hình dạng các pha, và tỷ lệ thể tích của các pha mà chưa tính đến phân bố tuần hoàn của vật liệu cấu thành. Bên cạnh các mô hình giải tích kể trên thì có thể sử dụng phương pháp số để xác định tính chất vĩ mô của vật liệu tổng hợp như phần tử hữu hạn, phương pháp biến đổi nhanh Fourier [9–12] tuy nhiên các phương pháp này có hạn chế khi gặp phải khối lượng tính toán lớn mà khả năng tính toán của máy tính chưa đáp ứng được. Trong nghiên cứu này sẽ sử dụng phương pháp phát triển từ bài toán Rayleigh [13–16] để xác định hệ số dẫn nhiệt vĩ mô của vật liệu tổng hợp có xét tới phân bố tuần hoàn của vật liệu cấu thành trong bài toán 2D.

Bố cục của bài báo này được trình bày làm bốn phần: Phần 2 trình bày các phương trình cơ bản của bài toán truyền nhiệt, phương pháp xác định ten xơ truyền nhiệt có hiệu của vật liệu tổng hợp có phân bố tuần hoàn dựa trên bài toán Rayleigh sẽ được giới thiệu ở phần 3, các kết quả số thu được phương pháp Rayleigh mới sẽ được so sánh với các kết quả thu được từ phương pháp số sử dụng biến đổi nhanh Fourier và các biên Voigt - Reuss trong phần 4, phần 5 sẽ dành để trình bày một số kết luận và kiến nghị.

2. Các phương trình cơ bản

Vật liệu tổng hợp dẫn nhiệt Ω được xem xét ở nghiên cứu này bao gồm các sợi hình trụ tròn $\Omega^{(1)}$ được phân bố dọc theo phương x_3 và bố trí một cách tuần hoàn theo mặt vuông góc với x_3 trên một chất nền $\Omega^{(2)}$ (Hình 1). Các vật liệu cấu thành nên vật liệu tổng hợp đều được coi là truyền nhiệt đẳng hướng. Phương trình truyền nhiệt trong mỗi pha thành phần của vật liệu tổng hợp được miêu tả bởi định luật Fourier [1, 11, 12, 14–16]:

$$\mathbf{q}^{(i)} = -\mathbf{K}^{(i)}\nabla\theta^{(i)} \tag{1}$$

trong đó $\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{K}^{(i)}$ và $\theta^{(i)}$ lần lượt là vec tơ dòng nhiệt, ten xơ hệ số dẫn nhiệt và nhiệt độ trong vật liệu i với $i = 1, 2$. Trong trường hợp vật liệu là truyền nhiệt đẳng hướng $\mathbf{K}^{(i)} = k_i\mathbf{I}$ với I là ten xơ đơn vị bậc hai $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, vec tơ mật độ nhiệt được định nghĩa bởi công thức:

$$\boldsymbol{e}^{(i)} = \nabla\theta^{(i)} \tag{2}$$

Véc tơ dòng nhiệt $\mathbf{q}^{(i)}$ phải thoả mãn phương trình cân bằng năng lượng:

$$\nabla\cdot\mathbf{q}^{(i)} + P = \rho_c^{(i)}\frac{\partial\theta}{\partial t} \tag{3}$$

với $\rho_c^{(i)}$ là nhiệt dung riêng của vật liệu i có đơn vị là J.K^{-1}.m^{-3} và P là nguồn nhiệt có đơn vị W.m^{-3}.

Khi liên kết giữa pha sợi và pha nền là hoàn hảo thì trường nhiệt độ và thành phần pháp tuyến của vec tơ dòng nhiệt phải liên tục khi đi qua nó, nghĩa là:

$$[\![\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}]\!] = \mathbf{0}, [\![\theta]\!] = 0 \tag{4}$$

trong trường hợp này vec tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}$ trùng với $\mathbf{e}_r$ trong hệ toạ độ trụ.

Trong nghiên cứu này ta xét nhiệt độ ở trạng thái ổn định (nhiệt độ không đổi theo thời gian), không có nguồn phát nhiệt, phương trình cân bằng năng lượng (3) được viết lại như sau:

$$\nabla\cdot\mathbf{q}^{(i)} = 0 \tag{5}$$

Thay phương trình (1) vào (5), trong hệ tọa độ trụ phương trình được viết tường minh như sau

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = 0 \tag{6}$$

Khi mặt phân giới giữa các pha là hoàn hảo, ở cấp độ vĩ mô, vec tơ mật độ nhiệt $\mathbf{E}$ và vec tơ dòng nhiệt $\mathbf{Q}$ được xác định theo công thức dưới đây

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega^{(1)}}\theta^{(1)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{(2)}}\theta^{(2)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \tag{7}$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega^{(1)}}\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{(2)}}\mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) \tag{8}$$

3. Phương pháp Rayleigh cho vật liệu tuần hoàn

Thay vì nghiên cứu toàn bộ miền vật liệu Ω, do vật liệu có tính chất tuần hoàn nên ta chỉ cần nghiên cứu 1 nhân tuần hoàn hình vuông với 1 pha sợi hình tròn phân bố trong pha nền hình vuông với cạnh là a (Hình 1). Tính tuần hoàn của vật liệu thể hiện qua điều kiện dưới đây

$$\theta|_{x_1=-a/2} = \frac{1}{2}Ea, \quad \theta|_{x_1=a/2} = -\frac{1}{2}Ea, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right|_{x_2=\pm a/2} = 0 \tag{9}$$

trong đó $\mathbf{E}$ là mật độ nhiệt vĩ mô theo phương x_1. Tính đối xứng trong mỗi nhân tuần hoàn được miêu tả bởi quan hệ sau:

$$\theta(x_1,x_2) = \theta(x_1,-x_2), \quad \theta(x_1,x_2) - \theta(0,0) = -[\theta(-x_1,x_2) - \theta(0,0)] \tag{10}$$

Nghiệm trường nhiệt của phương trình (6) – phương trình Laplace có dạng chuỗi như sau:

- Trong pha sợi:

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}r^{2n-1}\cos(2n-1)\phi \tag{11}$$

- Trong pha nền:

$$\theta_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{2n-1}r^{2n-1} + B_{2n-1}r^{-2n+1}\right]\cos(2n-1)\phi \tag{12}$$

Thay các nghiệm trường nhiệt trong pha sợi và pha nền vào phương trình (1) ta xác định được vec tơ dòng nhiệt tại pha nền và cốt sợi. Trường nhiệt độ và trường dòng nhiệt pháp tuyến khi đi qua mặt phân giới là liên tục theo phương trình (4) ta nhận được mối quan hệ sau:

$$A_{2n-1} = \frac{k_m + k_i}{k_m - k_i} r_i^{2(1-2n)} B_{2n-1} \tag{13}$$

$$C_{2n-1} = \left(\frac{k_m + k_i}{k_m - k_i} + 1 \right) r_i^{(1-2n)(1+k)} B_{2n-1} \tag{14}$$

Trường nhiệt độ trong cốt sợi (11) và pha nền (12) phải thoả mãn điều kiện tuần hoàn (9), đồng thời áp dụng điều kiện nhất quán đơn vị Rayleigh xem [13] dẫn tới:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\phi = Ex_1 + \sum_{j\neq 0} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} r_j^{-2n+1} \cos(2n-1)\phi_j \tag{15}$$

trong đó chỉ số j là các vòng tròn từ tâm và trừ tâm; r và ϕ là toạ độ cực tính từ tâm O. (r_j, ϕ_j) là toạ độ của điểm O; (r, ϕ) là toạ độ cực cục bộ của hình tròn thứ j. Đồng hoá đạo hàm từng phần lần thứ $2n-1$ theo biến x_1 các thành phần của phương trình (15) tại điểm O ta nhận được:

$$A_{2n-1} + \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} 2m+2n-3 \\ 2n-1 \end{array} \right) \sum_{j\neq 0} \cos(2m+2n-1)\theta_j \right] B_{2m-1} = -E\delta_{n1} \tag{16}$$

Kết hợp ba phương trình (13), (14) và (16) ta rút ra hệ phương trình cho phép xác định B_{2m-1} như sau

$$(\mathbf{U} + \mathbf{V})\mathbf{x} = \mathbf{p} \tag{17}$$

trong đó $\mathbf{U}$ là một ma trận chéo với các thành phần khác không có giá trị là $\dfrac{k_m + k_i}{k_m - k_i}$, $\mathbf{p}$ là một vec tơ có duy nhất một thành phần khác không là $p_1 = \delta_{n1}$, $\mathbf{x}$ là một vec tơ với các thành phần có giá trị là $x_{2m-1} = \dfrac{B_{2m-1}}{Er_i^{2(2m-1)}}$, ma trận $\mathbf{V}$ có các thành phần nhận giá trị như sau $V_{mn} = \dfrac{(2m+2n-3)! \sum_{2m+2n-2} r_i^{2(2m-1)}}{(2m-2)!\,(2n-1)!}$. Giải hệ phương trình (17) ta thu được các giá trị của B_{2m-1} thay vào phương trình (13) và (14) ta lần lượt nhận được các giá trị giải tích của A_{2m-1}, C_{2m-1}. Thế các giá trị A_{2m-1}, B_{2m-1}, C_{2m-1} vào phương trình (13) và (14) ta có được nghiệm giải tích của trường nhiệt độ trong pha sợi và pha nền của vật liệu tổng hợp.

Thay các giá trị trường nhiệt độ trong các pha lần lượt vào phương trình 2 và 1 ta nhận được giá trị trường mật độ nhiệt và trường dòng nhiệt cục bộ tại các pha cấu thành nên vật liệu. Trường mật độ nhiệt và dòng nhiệt ở cấp độ vĩ mô được xác định thông qua tích phân phương trình số (7) và (8). Quan hệ giữa vec tơ mật độ dòng nhiệt và vec tơ dòng nhiệt ở cấp độ vĩ mô:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{eff}\mathbf{E} \tag{18}$$

Ten xơ hệ số dẫn nhiệt được xác định qua công thức sau

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{eff} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}_i}{\partial \boldsymbol{E}_j} \tag{19}$$

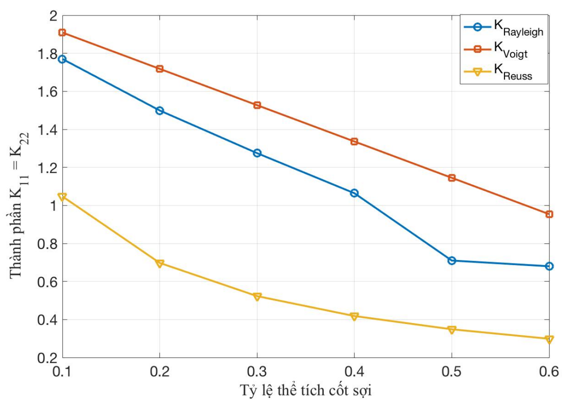
4. Áp dụng số

Xét vật liệu tổng hợp gồm có cốt sợi với hệ số dẫn nhiệt $k_2 = 0{,}19\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ được phân bố tuần hoàn trong pha nền với hệ số dẫn nhiệt $k1 = 2{,}1\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. Tỷ lệ thể tích của pha sợi trong composite biến đổi từ 10 đến 60%, chuỗi giá trị được chọn với $n = m = 20$. Các kết quả số hệ số dẫn nhiệt của vật liệu tổng hợp theo phương x_1 của composite sẽ được so sánh với các biên Voigt–Reuss và trình bày ở Hình 2. Ten sơ hệ số dẫn nhiệt tính theo biên Voigt và Reuss [1, 7, 14, 15] lần lượt được tính như sau:

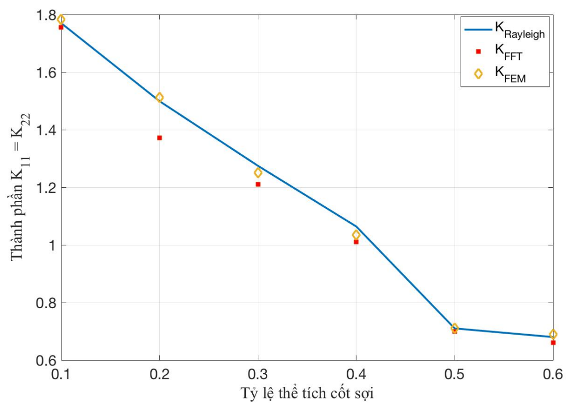
$$\mathbf{K}_{Voigt} = f_1 k_1 \mathbf{I} + f_2 k_2 \mathbf{I} \tag{20}$$

$$\mathbf{K}_{Reuss} = \frac{1}{\left(\frac{f_1}{k_1} + \frac{f_2}{k_2}\right)} \mathbf{I} \tag{21}$$

trong đó f_1, f_2 lần lượt là tỷ lệ thể tích của pha nền và pha sợi; $\mathbf{I}$ là ten xơ đơn vị bậc 2. Các kết quả áp dụng số của phương pháp Rayleigh cũng được so sánh với các kết quả thu được từ phương pháp FFT [9, 10] và phần tử hữu hạn (FEM) được thể hiện trên đồ thị Hình 3.



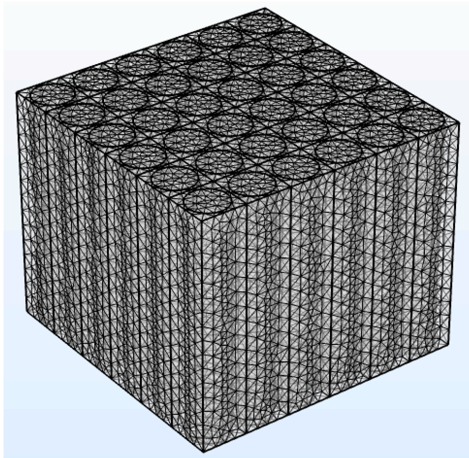
Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích cốt sợi đến hệ số dẫn nhiệt của vật liệu tổng hợp



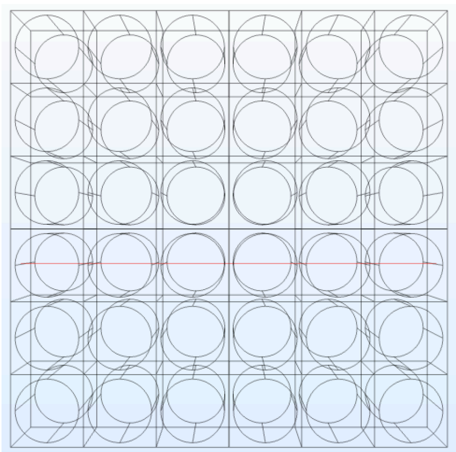
Hình 3. Ảnh hưởng của tỷ lệ thể tích cốt sợi đến hệ số dẫn nhiệt của vật liệu tổng hợp thực hiện với các phương pháp Rayleigh, FFT và FEM

Vật liệu composite được mô phỏng bằng FEM và các mặt cắt cũng như đường cắt thể hiện biến đổi nhiệt độ cũng như dòng nhiệt được thể hiện ở các Hình 4-8 dưới đây trong trường hợp pha sợi chiếm 60% thể tích composite.

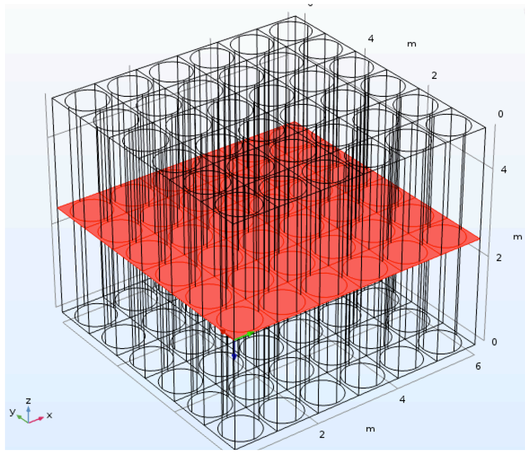
Quan sát biểu đồ Hình 2 nhận thấy rằng các kết quả thu được từ phương pháp Rayleigh cải tiến nằm trong biên Voigt–Reuss cho thấy tính khả dụng của mô hình. Các kết quả tính toán của phương pháp này được so sánh với các phương pháp FFT cũng như FEM (Hình 3) cho kết quả rất sát nhau, đặc biệt khi tính bằng hai phương pháp Rayleigh và FEM thì sai số của hai phương pháp này rất nhỏ, điều đó cho thấy tính chính xác của mô hình này. Các biểu đồ trực quan Hình 7 và 8 cho thấy dòng nhiệt khi đi chạy dọc qua mặt cắt và đường cắt bị gây nhiễu (tuần hoàn) khi đi qua pha sợi, sự truyền nhiệt không còn là tuyến tính nữa.



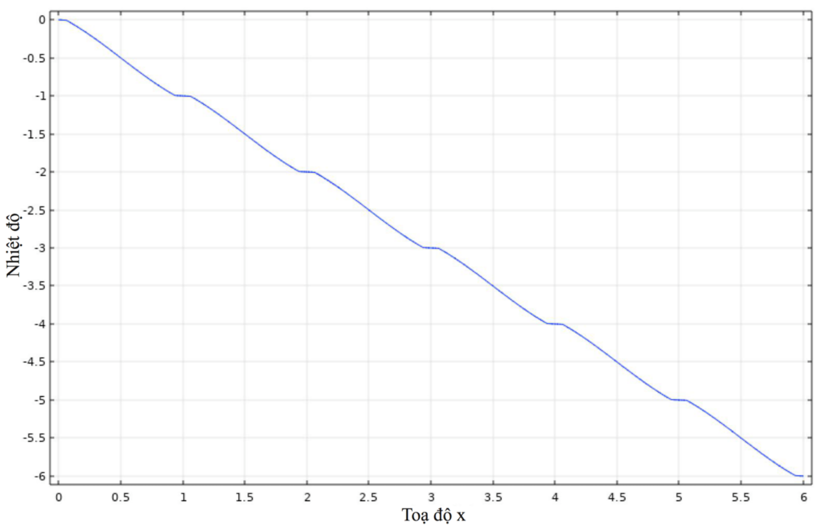
Hình 4. Chia lưới vật liệu composite cốt sợi với FEM



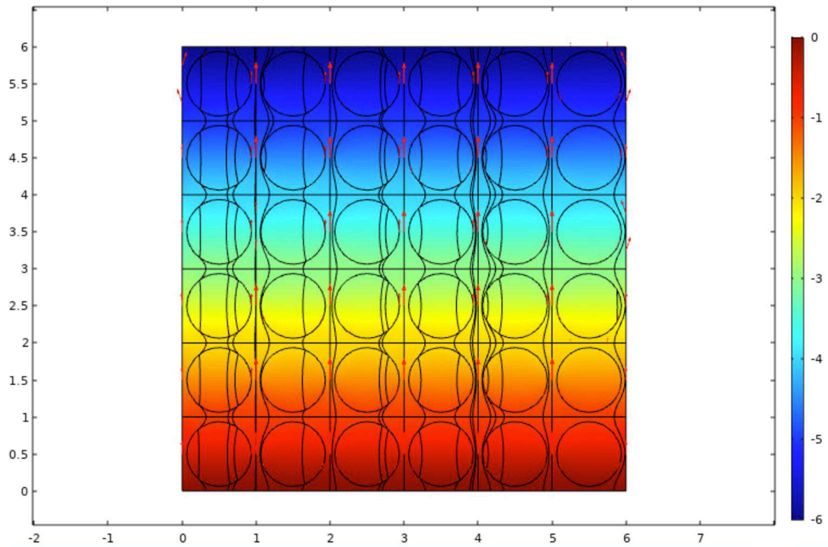
Hình 5. Đường cắt mô phỏng thay đổi nhiệt độ



Hình 6. Mặt cắt mô phỏng dòng nhiệt



Hình 7. Trường nhiệt độ qua đường cắt



Hình 8. Trường nhiệt độ và dòng nhiệt qua mặt cắt

5. Kết luận

Các kết quả của mô phỏng cho thấy phương pháp Rayleigh cải tiến là hoàn toàn phù hợp trong việc dự đoán hệ số dẫn nhiệt có hiệu của vật liệu tổng hợp có phân bố tuần hoàn. Độ chính xác cũng như tốc độ tính toán của phương pháp phụ thuộc vào độ lớn của giá trị n, m được lựa chọn. Trong nghiên cứu này với $n = m = 20$ thì tính toán đạt độ chính xác cao với các kết quả đạt được có độ chênh lệch rất nhỏ so với phương pháp FEM. Phương pháp này có thể được áp dụng cho mọi hàm lượng thể tích sợi biến đổi từ 0 đến 100% trong trường hợp vật liệu có phân bố tuần hoàn với độ chính xác cao khắc phục được các nhược điểm của các mô hình Bão hoà, Mori-Tanaka, ... chỉ chính xác khi hàm lượng cốt sợi nhỏ (dưới 30%). Kết quả của nghiên cứu có thể áp dụng trong các bài toán truyền dẫn tương đương về mặt biểu diễn toán học như dẫn điện, thấm, khuếch tán, ...

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) cho đề tài mã số 107.02-2017.10.

Tài liệu tham khảo

[1] Zaoui, A. (2000). *Matériaux hétérogènes et composites*. Palaiseau : Presses de L'Ecole polytechnique, Paris.

[2] Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 241 (1226):376–396.

[3] Hashin, Z., Shtrikman, S. (1963). A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(2):127–140.

[4] Mori, T., Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571–574.

[5] Nemat-Nasser, S., Hori, M. (1998). *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier.

[6] Hshin, Z. (1972). *Theory of Fiber Reinforced Materials*. NASA Contract Report No CR 1974, 67–383.

[7] Tran, B. V., Nguyen, T. K., Tran, A. T., Nguyen, Đ. H. (2019). *Đồng nhất vật liệu nhiều thành phần - Ứng xử tuyến tính*. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội.

[8] Phương, N. H., Cảnh, L. V., Kiên, N. T. (2019). Xác định đặc trưng hữu hiệu của vật liệu đa tinh thể dị hướng bằng phương pháp đồng nhất hóa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 13 (4V):129–138.

[9] Bonnet, G. (2007). Effective properties of elastic periodic composite media with fibers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(5):881–899.

[10] Tran, A. T., Le Quang, H., He, Q.-C. (2016). Computation of the size-dependent elastic moduli of nano-fibrous and nano-porous composites by FFT. *Composites Science and Technology*, 135:159–171.

[11] Cheng, H., Torquato, S. (1997). Effective conductivity of dispersions of spheres with a superconducting interface. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 453(1961):1331–1344.

[12] Michel, J.-C., Moulinec, H., Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4):109–143.

[13] Rayleigh, L. (1892). *Philos. Mag*, page 481.

[14] Nguyen, D.-H., Le, H.-T., Le Quang, H., He, Q.-C. (2014). Determination of the effective conductive properties of composites with curved oscillating interfaces by a two-scale homogenization procedure. *Computational Materials Science*, 94:150–162.

[15] Nguyen, D. H. (2014). *Analyse asymptotique, modélisation micromécanique et simulation numérique des interfaces courbées rugueuses dans des matériaux hétérogènes*. PhD Thesis, Université Paris – Est, France.

[16] Chen, T., Kuo, H.-Y. (2005). Transport properties of composites consisting of periodic arrays of exponentially graded cylinders with cylindrically orthotropic materials. *Journal of Applied Physics*, 98(3): 033716.