

NGHIÊN CỨU LÝ THUYẾT VÀ THỰC NGHIỆM ỨNG XỬ XOẮN THUẦN TÚY CỦA DẦM BÊ TÔNG CỐT THÉP

Phạm Xuân Đạt^{a,*}

^a*Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 09/12/2019, Sửa xong 15/01/2020, Chấp nhận đăng 21/01/2020

Tóm tắt

Trong kết cấu sàn-dầm nhà bê tông cốt thép, dầm biên thường chịu tác động xoắn gây ra bởi mô men âm của dầm phụ và sàn được đỡ bởi các dầm biên này. Trong hai tiêu chuẩn thiết kế hiện hành ACI 318-19 (Mỹ) và EN 1992-1-1 (Châu Âu), các tính toán dự báo sức kháng xoắn của dầm là tương đối khác nhau. Sự khác nhau này gây ra những khó khăn nhất định cho các kỹ sư thiết kế trong thực hành tính toán. Nghiên cứu này thực hiện so sánh công thức dự báo sức kháng xoắn của hai tiêu chuẩn trên đây, đồng thời so sánh các kết quả dự báo với kết quả thí nghiệm trên 2 mẫu dầm thực chịu tác động xoắn cho đến khi phá hoại hoàn toàn. Dựa trên các so sánh này, các khuyến cáo về quy trình tính toán thiết kế dầm biên chịu mô men xoắn sẽ được thảo luận.

Từ khoá: ứng xử xoắn; dầm bê tông cốt thép; tiêu chuẩn Mỹ ACI 318-19; tiêu chuẩn Châu Âu EN 1992-1-1; thực nghiệm.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL STUDIES ON THE TORSIONAL BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE BEAMS

Abstract

In reinforced concrete (RC) building structures, negative bending moments of secondary beams and slabs may cause the supporting edge beams to twist. In some situations, the torsional moments become critical as they lead to failure at the beam end sections near the column faces. In the current version of two modern design codes of practice, American standard ACI 318-19 and European standard EN 2004, there are some differences in the expressions quantifying the torsional capacity of RC beams that may confuse practitioners and cause them to make incorrect decision. This research aims to clarify these differences. The predictions by the codified formula are compared with each other and with the test data of two RC beams with sectional dimensions of 150 mm × 250 mm loaded to complete torsional failure. Based on the comparisons, recommendations on design and detail of RC edge beams are discussed.

Keywords: torsional behaviour; reinforced concrete edge beam; ACI 318-19; EN 1992-1-1; experimental study.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14\(1V\)-07](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(1V)-07) © 2020 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Dầm biên trong hệ kết cấu dầm-sàn bê tông cốt thép (BTCT) thường chịu xoắn lớn gây ra do mô men âm của dầm phụ và sàn được đỡ bởi các dầm biên này. Hình 1 trình bày hình ảnh phá hoại của hệ dầm sàn chịu tải trọng thẳng đứng dạng phân bố đều từ hệ gia tải trọng có 12 điểm tải [1]. Có thể nhận thấy rằng các dầm biên đều bị xoắn vào trong dưới tác động của sàn, gây ra các vết nứt xiên ở thân dầm và sự phá hoại bê tông chịu nén tại các đầu dầm. Các thí nghiệm dầm sàn chịu biến dạng

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: datpx@nuce.edu.vn (Đạt, P. X.)

lớn cũng cho thấy dạng phá hoại tương tự [2, 3]. Điều này gây ra các lo ngại nhất định cho các nhà tư vấn thiết kế kết cấu khi xem xét đến sức kháng xoắn của dầm biên, đặc biệt là các dầm có tiết diện mỏng, vốn có mô men kháng xoắn tĩnh rất thấp.



Hình 1. Phá hoại xoắn của dầm biên BTCT do mô men âm của sàn và dầm phụ

Trong các phiên bản gần đây nhất của Tiêu chuẩn tính toán thiết kế kết cấu BTCT ACI 318-19 (Mỹ) [4] và EN 1992-1-1 (Châu Âu) [5], thiết kế kháng xoắn được cho phép thực hiện độc lập với các tác động của sàn. Tiết diện được tính toán kiểm tra thường là tại các vị trí có mô men xoắn lớn như tại đầu dầm sát với bề mặt cột, hoặc tại vị trí đỡ dầm phụ. Giá trị mô men xoắn thiết kế có thể lấy trực tiếp thông qua các phần mềm phần tử hữu hạn tuyến tính. Diện tích cốt thép đai và cốt thép dọc yêu cầu được tính toán bằng các công thức bán thực nghiệm trong các tiêu chuẩn này. Trong một số trường hợp mà sự phân phối lại nội lực được phép xảy ra, thiết kế kháng xoắn được đơn giản hóa bằng một số biện pháp cấu tạo và tính toán cụ thể.

Mặc dù hai tiêu chuẩn này có nhiều điểm tương đồng về nguyên lý thiết kế, quy trình cũng như các công thức có một số sự khác biệt nhất định. Điều này dẫn đến sự lúng túng của các kỹ sư thiết kế trong quá trình thực hành tính toán. Bài báo này tập trung phân tích các sự khác biệt kể trên, đồng thời tiến hành so sánh các dự báo này với kết quả thực nghiệm được tiến hành trên hai mẫu dầm chịu xoắn đến khi phá hoại. Dựa trên các phân tích trên đây, các khuyến cáo cụ thể cho công tác tính toán kháng xoắn của dầm biên sẽ được thảo luận.

2. Dự báo sức kháng xoắn của dầm BTCT theo hai tiêu chuẩn ACI 318-19 and EN 1992-1-1

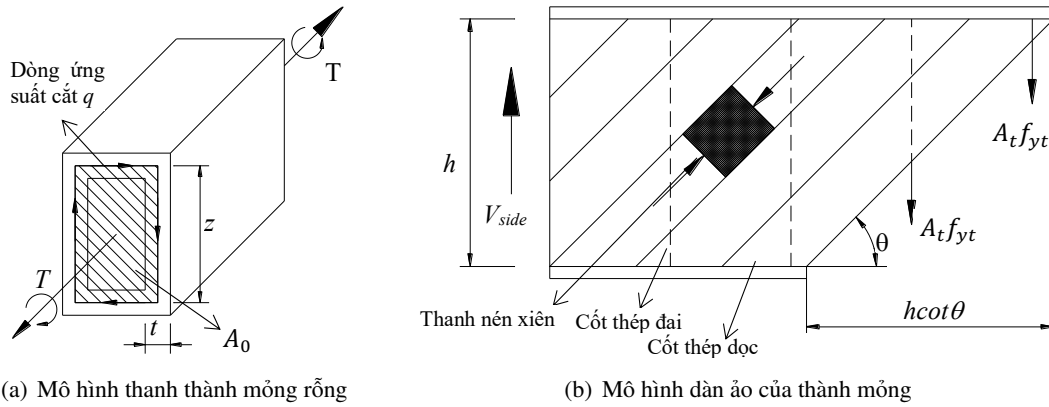
Công thức dự báo sức kháng xoắn trong hai tiêu chuẩn ACI 318-19 và EN 1992-1-1 đều dựa trên một số giả thiết chung như sau. Thứ nhất, cơ chế kháng xoắn của dầm BTCT được mô tả như một tiết diện thanh thành mỏng rỗng và bỏ qua các đóng góp của lõi bê tông. Hình 2(a) trình bày dòng ứng suất cắt q do mô men xoắn T phân bố dọc theo thành của tiết diện rỗng có chiều dày t . Dòng ứng suất cắt q này là hằng số và được tính toán theo biểu thức sau:

$$q = T / (2A_0) \quad (1)$$

trong đó A_0 là diện tích tiết diện được giới hạn bởi chu vi dòng ứng suất cắt q .

Sau khi các vết nứt xiên xuất hiện do mô men xoắn, giả thiết thứ hai được đưa ra là dọc theo trục của dầm BTCT, cơ chế kháng lực cắt gây ra do dòng ứng suất $V_{side} = q \cdot t$ được mô phỏng bằng mô hình đàn ảo như trình bày trong Hình 2(b). Hệ đàn ảo này bao gồm có ba thành tố chính, đó là (i) Các thanh bê tông chịu nén xiên với phương ngang một góc là θ , (ii) Thanh dọc theo trục của dầm mô tả ứng xử kéo/nén trong cốt dọc của dầm, và (iii) các thanh ngang dầm mô tả ứng xử kéo của cốt đai. Trong giai đoạn tính toán này, bê tông được giả thiết bị nứt hoàn toàn dọc theo các thanh nén xiên và không tham gia vào khả năng chịu kéo. Mặt khác, ứng suất chịu kéo trong cốt đai được giả thiết đạt tới ứng suất chảy dẻo f_{yt} .

Cả hai tiêu chuẩn đều quan tâm tới hai kết quả dự báo chính, đó là mô men kháng nứt T_{cr} trong tính toán trạng thái giới hạn thứ hai, và mô men xoắn cực hạn T_n trong trạng thái giới hạn thứ nhất. Tuy nhiên, như đã trình bày ở trên đây, hai tiêu chuẩn đưa ra các giá trị dự báo của các mô men này tương đối khác nhau.



Hình 2. Nguyên lý tính toán sức kháng xoắn của dầm BTCT [4, 5]

Căn cứ trên Hình 2(a), mô men kháng nứt T_{cr} có thể được dự báo khi ứng suất cắt τ đạt đến ứng suất kéo tối hạn của vật liệu bê tông f_t :

$$T_{cr} = 2f_t t A_0 \quad (2)$$

Bảng 1 so sánh công thức tính toán chiều dày thành t , diện tích A_0 và tích số tA_0 dựa trên U_g và diện tích A_g của toàn bộ tiết diện dầm theo tiêu chuẩn ACI-318-19 và EN 1992-1-1. Có thể thấy, do sự khác biệt trong cách tính t và A_0 , tích số tA_0 ở trong tiêu chuẩn EN 1992-1-1 lớn hơn trong ACI 318-19 là (A_g/U_g^3) .

Bảng 1. So sánh biểu thức tính toán t và A_0 theo hai tiêu chuẩn ACI 318 và Eurocode 2

Tiêu chuẩn	Giá trị t	Giá trị A_0	tA_0
Eurocode 2	A_g/U_g	$A_g/2 + (A_g/U_g)^2$	$A_g^2/(2U_g) + (A_g/U_g)^3$
ACI 318	$0,75A_g/U_g$	$2A_g/3$	$A_g^2/(2U_g)$

Khi xem xét trạng thái giới hạn bền, liên hệ giữa lực cắt tác động lên thành dầm V_{side} và mô men xoắn cực hạn T_n được thiết lập bởi công thức sau (từ Hình 2(a) và 2(b)):

$$V_{side} = qz = \frac{T_n}{2A_0}z \quad (3)$$

trong đó z là chiều cao tính toán của dầm ảo (khoảng cách từ thanh cánh thượng tới thanh cánh hạ).

Từ công thức (3) có thể thấy mô men kháng xoắn T_n phụ thuộc vào sức kháng lực cắt V_{side} của thành dầm. Căn cứ vào mô hình dầm ảo trình bày trong Hình 2(b), có thể thấy sức kháng cắt này sẽ được quyết định bởi ba trạng thái phá hoại, đó là phá hoại nén vỡ bê tông của thanh dầm xiên, phá hoại kéo đứt của thanh dầm dọc chịu kéo, và phá hoại kéo đứt của cốt đai. Đối với dầm bê tông thông thường, các nghiên cứu trước đây đã chỉ ra rằng trạng thái phá hoại kéo đứt của cốt đai có tính quyết định nhất trong ba trạng thái kể trên. Theo đó giá trị tới hạn của lực cắt V_{side} được tính toán như sau:

$$V_{side} = \frac{T_n}{2A_0} z = \frac{A_t f_{yt}}{s} z \cot \theta \quad (4)$$

nên

$$T_n = \frac{2A_0 A_t f_{yt}}{s} \cot \theta \quad (5)$$

trong đó A_t là diện tích của 1 thanh cốt đai; s là khoảng cách cốt đai; f_{yt} là cường độ chảy dẻo của cốt đai.

Điểm đáng lưu ý là các công thức bán thực nghiệm trên đây đều được xây dựng và kiểm chứng dựa trên các thí nghiệm xoắn thuần túy đối với dầm BTCT [6–8]. Đối với trạng thái chịu lực đồng thời xoắn-uốn-cắt, tiêu chuẩn ACI-318-19 và EN 1992-1-1 cho phép tính toán diện tích cốt thép chịu lực độc lập cho từng nguyên nhân tác dụng, sau đó thực hiện cộng tác dụng các diện tích cốt thép này cho cấu kiện chịu lực. Tuy nhiên, trạng thái chịu lực phức tạp do các nguyên nhân uốn-xoắn-cắt đồng thời cũng đã được phân tích trong một số công trình nghiên cứu gần đây [9, 10].

3. Chương trình thí nghiệm

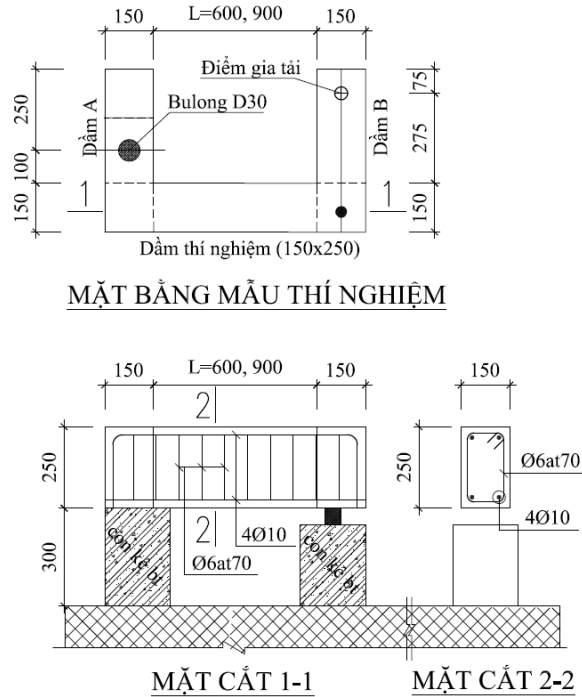
3.1. Thiết kế thí nghiệm

Hình 3 trình bày sơ đồ thí nghiệm dầm BTCT chịu xoắn. Mẫu được thiết kế dạng hình chữ U với dầm A được neo vào sàn công tác của phòng thí nghiệm, dầm B được dùng để làm cánh tay đòn tạo mô men xoắn và dầm thí nghiệm có kích thước tiết diện $150 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$ nối liền hai dầm A và B. Kích thủy lực tạo tải trọng nén cùng thiết bị đo tải trọng được đặt tại đầu dầm B như trong hình vẽ.



Hình 3. Sơ đồ thí nghiệm dầm BTCT chịu xoắn

Hình 4 trình bày chi tiết thiết kế hai mẫu dầm chữ U với cùng tiết diện dầm thí nghiệm $150 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$, bố trí cốt thép dọc $4\Phi 10$, cốt đai $\Phi 6$ đặt ở khoảng cách 70 mm . Cốt thép dọc và cốt thép đai có mác thép tương ứng là CB400-V và CB240-T. Bảng 2 trình bày giá trị cường độ vật liệu sử dụng.



Hình 4. Thiết kế chi tiết của dầm BTCT chịu xoắn (số lượng 02 mẫu)

Bảng 2. Cường độ vật liệu sử dụng

Cốt thép	f_y (MPa)	$f_{fracture}$ (MPa)
Cốt thép dọc D10	328	449
Cốt thép đai D6	320	454
Vật liệu bê tông	$f'_c = 17,7$ MPa	

Chương trình bao gồm 02 mẫu thí nghiệm, Mẫu M1-L900 và M2-L600 có chiều dài dầm thí nghiệm tương ứng là $L = 900$ mm và 600 mm. Điểm gia tải được đặt cách tâm của dầm thí nghiệm một khoảng là cánh tay đòn mô men xoắn $L_{tor} = 275$ mm + 75 mm = 350 mm. Vị trí neo bu lông xuống sàn công tác được định vị như trên Hình 4. Tại tiết diện giao giữa dầm gia tải B và dầm thí nghiệm, mẫu thí nghiệm được đặt trên một quả cầu thép đường kính 20 mm với mục đích để cánh tay đòn xoắn có thể xoay tự do mà không bị cản trở. Kích thủy lực tăng dần giá trị lực P cho đến khi mẫu bị phá hoại hoàn toàn.

Hai thông số đo đặc chính, đó là giá trị lực tác dụng P được đo bằng thiết bị đo lực (loadcell) đặt ngay tại điểm gia tải, và chuyển vị của điểm đặt lực được đo bằng cảm biến LVDT có chu trình chuyển vị 50 mm.

Các mẫu thí nghiệm được gia tải với mỗi bước tăng tải trọng là 500 N cho đến khi mẫu phá hoại hoàn toàn. Các bước tăng tải trọng được thực hiện cách nhau 5 phút để thực hiện các đo đạc dữ liệu bằng 01 Datalogger 30 kênh, đồng thời quan sát hiện tượng thí nghiệm và vẽ các sơ đồ vết nứt. Hình 5 trình bày trạng thái phá hoại sau khi kết thúc thí nghiệm của mẫu M2-L900.



(a) M1-L900

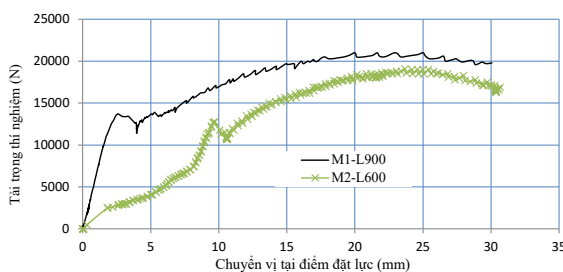


(b) M2-L600

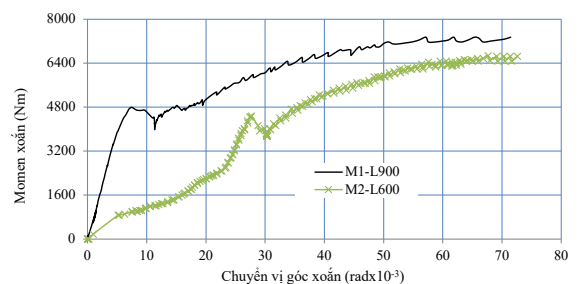
Hình 5. Trạng thái phá hoại của mẫu thí nghiệm

3.2. Kết quả thí nghiệm

Hình 6(a) trình bày đường quan hệ tải trọng P và chuyển vị thẳng đứng tại vị trí đặt tải trọng của hai mẫu thí nghiệm. Hình 6(b) trình bày đường quan hệ giữa mô men gây xoắn ($T = P \cdot L_{tor.}$). Góc xoắn là thương số giữa chuyển vị thẳng và chiều dài cánh tay đòn gây xoắn $L_{tor.}$. Đối với mẫu M1-L900, vết nứt đầu tiên xuất hiện ở cả hai bên hông của dầm thí nghiệm khi lực nén đạt 12000 N. Chuyển vị tại điểm gia tải tương ứng với vết nứt đầu tiên là khoảng 2 mm. Khi tiếp tục tăng tải trọng, số lượng vết nứt nhiều thêm về phía dầm gia tải (Dầm B) và bề rộng vết nứt cũng tăng theo. Tất cả các vết nứt này đều nghiêng so với phương ngang một góc khoảng 45 độ. Khi tải trọng đạt tới giá trị 13700 N ($T = 4780$ Nm) tương ứng với chuyển vị tại điểm đặt lực là 2,6 mm, đường quan hệ lực – chuyển vị có xu hướng đi ngang khi lực tác dụng có xu hướng ít thay đổi theo giá trị tăng của chuyển vị. Khi chuyển vị lớn hơn giá trị 5 mm, tải trọng tác dụng có xu hướng tiếp tục tăng đến khoảng 20490 N ($T = 7170$ Nm) tại thời điểm chuyển vị của điểm đặt lực là 22,9 mm. Tiếp sau đó, tải trọng có xu hướng giảm dần cho đến khi mẫu bị phá hoại hoàn toàn. Ở trạng thái phá hoại cuối cùng, đa phần các vết nứt nghiêng 45 độ có xu hướng nối tiếp nhau trên bề mặt của dầm thí nghiệm và tạo thành hình xoắn ốc như đã được thấy trong Hình 5.



(a) Quan hệ tải trọng thí nghiệm và chuyển vị thẳng đứng tại điểm đặt lực



(b) Quan hệ mô men xoắn và góc xoắn

Hình 6. Quan hệ tải trọng-chuyển vị của các mẫu thí nghiệm

Ứng xử của mẫu M2-L600 tương đối giống với ứng xử của M1-L900 về sự phát triển vết nứt, dạng phá hoại và các giá trị mô men gây nứt và mô men xoắn cực hạn. Điểm khác biệt duy nhất là giá trị chuyển vị khi tải trọng đạt tới giá trị gây nứt như đã được trình bày trên Hình 6. Theo quan sát tại hiện trường, độ vênh chuyển vị này nhiều khả năng gây ra bởi gối tựa bằng con kê bê tông bị xô dịch

trong phạm vi gia tải này. Tuy nhiên, sau khi tải trọng vượt qua giá trị gây nứt, đường cong tải trọng – chuyển vị trở lại dạng cơ bản của mẫu M1-L900.

Bảng 3. Tổng hợp kết quả thí nghiệm

	Tại thời điểm gây nứt		Tại thời điểm phá hoại	
	P_{cr} (N)	M_{cr} (Nm)	P_{ult} (N)	M_{ult} (Nm)
M1-L900	13700	4795	20490	7170
M2-L600	12800	4480	19080	6680

4. So sánh giữa kết quả thực nghiệm và kết quả lý thuyết theo tiêu chuẩn ACI 318-19 và EN 1992-1-1

Bảng 4 và 5 trình bày các kết quả tính toán mô men xoắn gây nứt T_{cr} và mô men xoắn cực hạn T_n theo hai tiêu chuẩn ACI 318-19 và EN 1992-1-1. Đối với mô men gây nứt, giá trị cường độ chịu kéo của bê tông f_t được lấy bằng 1,4 MPa ($f_t = 0,33 \cdot \sqrt{f'_c}$). Đây là giá trị đề xuất bởi tiêu chuẩn ACI 318-19. Đối với mô men xoắn cực hạn T_n , góc nghiêng của vết nứt do xoắn được lấy bằng 45° , là giá trị phù hợp với cả hai tiêu chuẩn, đồng thời cũng là góc nghiêng quan sát được trên mẫu thí nghiệm. Đồng thời, giá trị $A_0 = 0,85A_{oh}$ trong đó A_{oh} là diện tích phần chu vi bê tông được giới hạn bởi cốt thép đai. Như trong Bảng 4 và 5, có thể nhận thấy là giá trị tính toán theo hai tiêu chuẩn không chênh nhau nhiều. Đối với mô men gây nứt T_{cr} , kết quả tính theo EN 1992-1-1 lớn hơn theo ACI 318-19 khoảng 1,1 lần. Trong khi đó, giá trị mô men xoắn cực hạn dự báo bởi tiêu chuẩn ACI 318-19 lại lớn hơn giá trị của EN 1992-1-1 khoảng 1,21 lần.

Bảng 4. Tính toán mô men xoắn gây nứt T_{cr} của dầm thí nghiệm theo ACI 318-19 và EN 1992-1-1

Tiêu chuẩn	A_g (mm ²)	U_g (mm)	tA_0 (mm ³)	f_t (MPa)	T_{cr} (Nm)
ACI 318-19	37500	800	878906	1,4	2461
Eurocode 2			981903		2749

Bảng 5. Tính toán mô men xoắn cực hạn T_n của dầm thí nghiệm ACI 318-19 và EN 1992-1-1

Tiêu chuẩn	A_0 (mm ²)	A_t (mm ²)	f_{yt} (MPa)	s (mm)	$\cot \theta$	T_n (Nm)
ACI 318-19	25415,2	28,23	320	70	1	6354,2
Eurocode 2	20947,5					5237,1

Bảng 6. So sánh giữa kết quả thực nghiệm và tính toán lý thuyết theo hai tiêu chuẩn

Mẫu thí nghiệm	Mô men xoắn gây nứt T_{cr}			Mô men xoắn cực hạn T_n		
	Thí nghiệm T_N	$T_N/T_{cr}(\text{ACI})$	$T_N/T_{cr}(\text{EN 1992-1-1})$	T_N (Nm)	$T_N/T_{cr}(\text{ACI})$	$T_N/T_{cr}(\text{EN 1992-1-1})$
M1-L900	4795	1,71	1,53	7170	1,16	1,40
M2-L600	4480	1,55	1,39	6680	1,05	1,27

Bảng 6 so sánh giữa kết quả thí nghiệm của hai mẫu dầm với kết quả lý thuyết được tính toán theo ACI 318-19 và EN 1992-1-1. Nhìn chung, cả hai tiêu chuẩn có kết quả dự báo thấp hơn kết quả thực nghiệm, đặc biệt là giá trị mô men gây nứt T_{cr} . Theo đó, giá trị tính toán theo lý thuyết của mô men gây nứt lớn hơn so với kết quả thực nghiệm từ 1,39 lần đến 1,71 lần. Trong khi đó, giá trị dự báo của mô men xoắn cực hạn T_n có độ chênh so với kết quả thực nghiệm thấp hơn, từ 1,05 lần đến 1,4 lần.

5. Kết luận

Trong kết cấu sàn-dầm nhà bê tông cốt thép, dầm biên thường chịu tác động xoắn gây ra bởi mô men âm của dầm phụ và sàn được đỡ bởi các dầm biên này. Hiện nay tính toán kháng xoắn cho dầm biên thường được thực hiện theo hai tiêu chuẩn hiện hành ACI 318-19 (Mỹ) và EN 1992-1-1 (Châu Âu). Tuy nhiên các công thức và các chỉ dẫn thực hiện tính toán của hai tiêu chuẩn là tương đối khác nhau, điều này gây ra một số khó khăn nhất định cho các kỹ sư thực hành.

Nghiên cứu này đã chỉ ra rằng mặc dù có sự khác nhau như đã nói ở trên, tính toán kháng xoắn của hai tiêu chuẩn này đều được dựa trên hai giả thiết tính toán chung, đó là mô hình thanh thành mỏng rỗng cho tính toán mô men xoắn gây nứt T_{cr} , và mô hình đàn ảo đối với sức kháng xoắn cực hạn T_n . Quan trọng hơn là công thức dự báo ở trong cả hai tiêu chuẩn đều cho kết quả thiên về an toàn, đặc biệt là mô men xoắn gây nứt T_{cr} . Khuyến nghị của nghiên cứu này là sự áp dụng quy trình tính toán của tiêu chuẩn ACI 318-19 vào thực hành tính toán thiết kế vì sự tường minh và khả năng dự báo tương đối sát so với kết quả thực nghiệm của các công thức trong tiêu chuẩn.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) cho đề tài mã số 107.01-2016.07.

Tài liệu tham khảo

- [1] Dat, P. X., Tan, K. H. (2013). [Experimental study of beam-slab substructures subjected to a penultimate-internal column loss](#). *Engineering Structures*, 55:2–15.
- [2] Pham, A. T., Pham, X. D., Tan, K. H. (2019). [Slab corner effect on torsional behaviour of perimeter beams under missing column scenario](#). *Magazine of Concrete Research*, 71(12):611–623.
- [3] Trung, H. N., Truong, T. N., Xuan, D. P. (2019). [Effects of reinforcement discontinuity on the collapse behavior of reinforced concrete beam-slab structures subjected to column removal](#). *Journal of Structural Engineering*, 145(11):04019132.
- [4] ACI 318-14. *Building code requirements for structural concrete*. American Concrete Institute, Detroit.
- [5] EN 1992-1-1:2004. *Eurocode 2: Design of concrete structures - General rules and rules for buildings*. European Committee for Standardization, Brussels.
- [6] Hsu, T. T. C. (1968). Torsion of structural concrete-behavior of reinforced concrete rectangular members. *Special Publication*, 18:261–306.
- [7] Mitchell, D., Collins, M. P. (1974). *The behaviour of structural concrete beams in pure torsion*. PhD thesis, University of Toronto, Department of Civil Engineering.
- [8] Collins, M. P., Lampert, P. (1973). Redistribution of moments at cracking-the key to simpler torsion design? *Special Publication*, 35:343–384.
- [9] Ewida, A. A., McMullen, A. E. (1981). [Torsion-shear-flexure interaction in reinforced concrete members](#). *Magazine of Concrete Research*, 33(115):113–122.
- [10] Rahal, K. L., Collins, M. P. (1995). [Analysis of sections subjected to combined shear and torsion-a theoretical model](#). *ACI Structural Journal*, 92:459–459.