Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng NUCE 2019. 13 (4V): 139–150

PHẦN TỬ MITC3+ ĐƯỢC LÀM TRƠN TRÊN CẠNH DÙNG PHÂN TÍCH TĨNH TẤM REISSNER-MINDLIN

Châu Đình Thành[a,*], Trần Văn Chơn[b], Tôn Thất Hoàng Lân[a]

[a]*Khoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh, Số 01 đường Võ Văn Ngân, quận Thủ Đức, Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam*
[b]*Công ty Quản lý Dự án Shin Yeong, Tòa nhà SFC, Tầng 4, 146E Nguyễn Đình Chín, quận Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh, Việt Nam*

Nhận ngày 09/08/2019, Sửa xong 06/09/2019, Chấp nhận đăng 09/09/2019

Tóm tắt

Trong bài báo này, công thức phần tử hữu hạn tấm tam giác 3 nút mới được đề xuất. So với phần tử tấm tam giác 3 nút truyền thống, xấp xỉ chuyển vị của phần tử đề xuất được bổ sung thêm hàm dạng nổi bậc ba (cubic bubble shape function) tại nút nổi (bubble node) ở vị trí trọng tâm phần tử. Biến dạng uốn của phần tử được làm trơn trên trên miền chung cạnh (ES) xác định bởi các đoạn thẳng nối nút nổi của 2 phần tử chung cạnh với 2 nút của cạnh chung này. Nhờ vào kỹ thuật làm trơn trên cạnh, tích phân trên miền làm trơn của độ cứng uốn được chuyển sang tích phân trên biên của miền làm trơn và sẽ ít bị ảnh hưởng bởi hình dạng phần tử. Để khử hiện tượng khóa cắt khi phân tích tấm mỏng, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng của phần tử được xấp xỉ lại theo kỹ thuật khử khóa cắt MITC3+. Phần tử đề xuất, gọi là ES-MITC3+, được sử dụng để phân tích tĩnh một số bài toán tấm điển hình nhằm đánh giá mức độ chính xác và hội tụ. Thông qua các kết quả số đạt được, phần tử ES-MITC3+ có khả năng phân tích tĩnh cho cả tấm mỏng và tấm dày với độ chính xác tương đương hoặc tốt hơn một số loại phần tử khác.

Từ khoá: tấm Reissner-Mindlin; khử khóa cắt MITC3+; phần tử hữu hạn trơn trên cạnh (ES-FEM); phân tích tĩnh.

AN EDGE-BASED SMOOTHED MITC3+ ELEMENT FOR STATIC ANALYSIS OF REISSNER-MINDLIN PLATES

Abstract

In this paper, a novel formula of 3-node triangular plate finite element is proposed. In comparison with the traditional 3-node triangular plate finite elements, the displacements of the proposed element are added the cubic bubble shape function at the bubble node located at the centroid of the element. The bending strains of the suggested element are averaged on edge-based smoothed (ES) domains which are determined by straight lines connecting 2 bubble nodes of 2 adjacent elements with 2 common nodes of them. Thanks to the edge-based smoothed technique, the integration of the bending stiffness is transformed from the smoothed domain into its boundary and thus reduces errors due to element shapes. To remove the shear-locking phenomenon, the transverse shear strains are separately interpolated by using the MITC3+ technique. The proposed element, namely ES-MITC3+, is employed to statically analyze some benchmark plates for evaluation of the accuracy and robustness. Numerical results show that the ES-MITC3+ element can analyze both thin and thick plates in good agreement, or better than other reference elements.

Keywords: Reissner-Mindlin plates; shear-locking removal MITC3+; edge-based smoothed FEM; static analysis.

https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(4V)-13 © 2019 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

[*]Tác giả chính. *Địa chỉ e-mail:* chdthanh@hcmute.edu.vn (Thành, C. Đ.)

1. Giới thiệu

Kết cấu tấm là một trong những kết cấu phổ biến được ứng dụng vào nhiều bộ phận công trình xây dựng như: sàn, mái, tường, vách, ... do đặc trưng mỏng, nhẹ, khả năng chịu uốn, vượt nhịp lớn. Ứng xử tấm đồng nhất được tính toán dựa trên (1) lý thuyết tấm mỏng Kirchhoff-Love hoặc (2) lý thuyết tấm dày Reissner-Mindlin [1]. Ứng xử kết cấu tấm có thể được phân tích bằng các phương pháp giải tích hoặc các phương pháp số. Các phương pháp giải tích [1–3] cho lời giải có độ chính xác cao, là kết quả để so sánh đánh giá các nghiên cứu bằng phương pháp số nhưng chỉ áp dụng cho các kết cấu tấm có hình học, điều kiện biên và tải trọng đơn giản. Vì vậy, để phân tích ứng xử các kết cấu tấm bất kỳ, các phương pháp số đã và đang được nghiên cứu phát triển nhằm cải thiện độ chính xác, tốc độ hội tụ và thời gian tính toán. Trong đó, các phương pháp số dựa trên tiếp cận phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Với giả thuyết bỏ qua biến dạng cắt ngoài mặt phẳng, lý thuyết Kirchhoff-Love đòi hỏi xấp xỉ chuyển vị của phương pháp PTHH có đạo hàm cấp 1 liên tục, tức là dạng C^1. Trong khi đó, xấp xỉ chuyển vị dạng C^0 đủ để thiết lập công thức PTHH tấm theo lý thuyết tấm dày Reissner-Mindlin. Việc xây dựng hàm xấp xỉ chuyển vị dạng C^0, đặc biệt là đối với các phần tử đẳng tham số, dễ hơn rất nhiều so với xây dựng hàm xấp xỉ chuyển vị dạng C^1. Tuy nhiên, xấp xỉ chuyển vị dạng C^0 thuần túy sẽ không loại bỏ được biến dạng cắt ngoài mặt phẳng khi phân tích tấm mỏng và dẫn đến kết quả chuyển vị giảm khi chiều dày tấm giảm, hay còn gọi là hiện tượng khóa cắt. Cùng với khả năng chia lưới dễ dàng của phần tử tam giác so với phần tử tứ giác, một số nghiên cứu tập trung vào phát triển phần tử tấm tam giác 3 nút dựa trên lý thuyết tấm dày Reissner-Mindlin sử dụng xấp xỉ chuyển vị dạng C^0 kết hợp với các kỹ thuật khử khóa cắt như các phần tử MIN3 [4], DSG3 [5] hoặc MITC3 [6]. Các loại phần tử này có biến dạng uốn là hằng số trên phần tử và biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được xấp xỉ lại để có thể phân tích ứng xử tấm dày và mỏng. Bằng cách sử dụng thêm hàm nổi bậc 3 ứng với nút nổi đặt tại trọng tâm phần tử tam giác 3 nút trong xấp xỉ chuyển vị, phần tử MITC3+ [7] có biến dạng uốn tuyến tính trên phần tử. Do đó, phần tử MITC3+ có độ chính xác và hội tụ tốt hơn phần tử MITC3 [6].

Để giảm chênh lệch biến dạng giữa các phần tử trong kết cấu tấm phân tích bằng các loại phần tử tam giác 3 nút, các kỹ thuật xấp xỉ lại biến dạng bằng cách trung bình biến dạng giữa các phần tử có chung cạnh hoặc chung nút, hay còn gọi là phương pháp PTHH trơn, đã được đề xuất [8]. Kỹ thuật làm trơn trên cạnh (ES) hoặc làm trơn trên nút (NS) đã được áp dụng cho các phần tử DSG3 hoặc MITC3 để phân tích tấm Reissner-Mindlin [9–12]. Trong các phần tử tấm ES-DSG3 [9], ES-MITC3 [11], NS-DSG3 [10], NS-MITC3 [12], các biến dạng được tính trên miền chung cạnh hoặc chung nút phần tử là trung bình các biến dạng của các phần tử này. Nhờ đó, biến dạng chênh lệch giữa các phần tử được làm trơn trên miền nhiều phần tử. Kết quả, các phần tử làm trơn ES-DSG3, ES-MITC3, NS-DSG3, NS-MITC3 cải thiện được khả năng tính toán so với các phần tử không làm trơn DSG3, MITC3, DSG3, MITC3.

Trong nghiên cứu này, kỹ thuật làm trơn trên cạnh sẽ được phát triển cho phần tử tấm tam giác 3 nút MITC3+. Với tên gọi ES-MITC3+, phần tử đề xuất có biến dạng uốn được trung bình trên miền xác định bởi các đoạn thẳng nối nút nổi của 2 phần tử chung cạnh với 2 nút của cạnh chung này, và biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được xấp xỉ theo kỹ thuật khử khóa cắt MITC3+ [7]. Khác với các phần tử ES-DSG3 và ES-MITC3, biến dạng uốn của phần tử đề xuất không là hằng số trên miền phần tử nên tích phân trên miền làm trơn của biến dạng uốn được chuyển thành tích phân trên đường biên của miền làm trơn bằng cách áp dụng định lý phân kỳ Gauss-Ostrogradsky. Nhờ đó, phần tử ES-MITC3+ có thể giảm được sai số do tính tích phân Gauss, đặc biệt trong các trường hợp lưới phần tử không đều. Trong phần tiếp theo, công thức phần tử ES-MITC3+ được thiết lập. Độ chính xác và tính hiệu quả của phần tử đề xuất được trình bày ở phần 3 thông qua đánh giá kết quả phân tích chuyển vị và

mô-men của một số kết cấu tấm điển hình. Cuối cùng, một số kết luận được tổng kết ở phần 4.

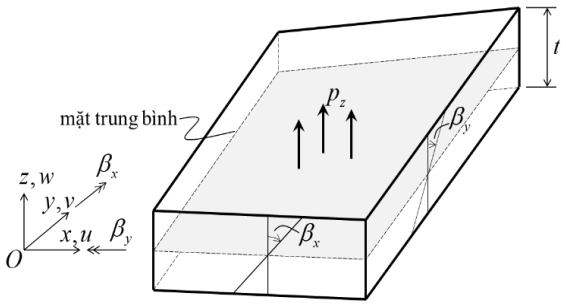
2. Công thức phần tử tấm Reissner-Mindlin ES-MITC3+

2.1. Công thức phần tử tấm MITC3+

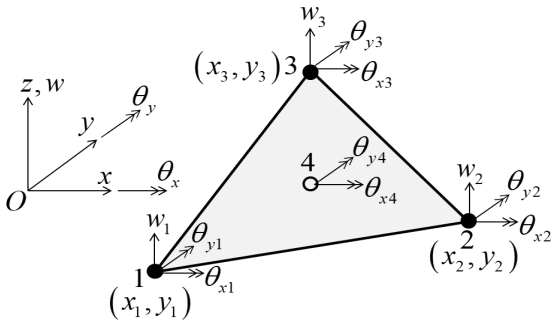
Xét tấm có diện tích mặt trung bình Ω chịu uốn bởi lực p_z tác dụng vuông góc với mặt trung bình Ω như Hình 1. Các chuyển vị thẳng u, v, w tương ứng các phương x, y, z của tấm được xác định bởi [1]

$$u(x,y,z) = z\beta_x(x,y)\,;\, v(x,y,z) = z\beta_y(x,y)\,;\, w(x,y,z) = w_0(x,y) \tag{1}$$

trong đó w_0, β_x, β_y lần lượt là chuyển vị thẳng theo phương z và góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y và trục x với chiều dương qui ước như Hình 1.



Hình 1. Tấm chịu uốn và định nghĩa các chuyển vị của tấm và của mặt trung bình



Hình 2. Phần tử tấm 3 nút với nút nổi và chiều dương qui ước

Mặt trung bình Ω của tấm được rời rạc bằng N_e phần tử tấm tam giác 3 nút có diện tích Ω_e. Trường chuyển vị của phần tử tấm tam giác được xấp xỉ như sau [7]

$$w_0 = \sum_{i=1}^{3} N_i w_i; \quad \beta_x = \sum_{i=1}^{4} N_i \theta_{yi}; \quad \beta_y = -\sum_{i=1}^{4} N_i \theta_{xi} \tag{2}$$

trong đó $wi, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ lần lượt là chuyển vị thẳng và góc xoay quanh trục x và trục y của nút i với chiều dương qui ước được định nghĩa trong Hình 2. N_i là các hàm dạng trong hệ tọa độ tự nhiên (ξ, η) được xác định ứng với các nút đỉnh $(i = 1, 2, 3)$ và nút nổi $(i = 4)$ đặt tại trọng tâm phần tử như sau

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta - 9\xi\eta(1 - \xi - \eta)\,;\; N_2 = \xi - 9\xi\eta(1 - \xi - \eta) \\ N_3 &= \eta - 9\xi\eta(1 - \xi - \eta)\,;\; N_4 = 27\xi\eta(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \tag{3}$$

Từ (1) và (2), quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút phần tử được thiết lập

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \underbrace{\begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}}_{\kappa} = z \sum_{i=1}^{4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & -N_{i,y} & 0 \\ 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{bi}} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{d}_{ei}} = z \sum_{i=1}^{4} \mathbf{B}_{bi}\mathbf{d}_{ei} \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} N_{i,x} & 0 & N_i \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \end{array} \right]}_{\mathbf{B}_{si}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right\}}_{\mathbf{d}_{ei}} = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{B}_{si}\mathbf{d}_{ei} \tag{5}$$

Do xấp xỉ (2) không sử dụng độ võng tại nút nổi ($i = 4$) nên trong các công thức (4) và (5) $w_4 = 0$. Trong bài báo này ký hiệu $\square$, $\blacklozenge$ là đạo hàm của hàm $\square$ đối với biến $\blacklozenge$.

Vì biến dạng cắt ngoài mặt phẳng xấp xỉ bởi (5) không thể tiến đến 0, nghĩa là khi phân tích tấm mỏng mỏng biến dạng cắt ngoài mặt phẳng vẫn tồn tại. Điều này không phù hợp với ứng xử thực tế của tấm mỏng và dẫn đến kết quả, tấm càng mỏng thì độ võng càng lớn. Đây chính là hiện tượng khóa cắt xảy ra với các phần tử dùng hàm xấp xỉ chuyển vị bậc thấp. Do đó, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được xấp xỉ lại theo kỹ thuật nội suy các thành phần ten-xơ hỗn hợp MITC3+ [7]. Cụ thể, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ tự nhiên được xấp xỉ lại như sau

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{\xi\zeta} &= \frac{2}{3}\left(\gamma^B_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\gamma^B_{\eta\zeta}\right) + \frac{1}{3}\left(\gamma^C_{\xi\zeta} + \gamma^C_{\eta\zeta}\right) + \frac{1}{3}\hat{c}(3\eta - 1) \\ \hat{\gamma}_{\eta\zeta} &= \frac{2}{3}\left(\gamma^A_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}\gamma^A_{\eta\zeta}\right) + \frac{1}{3}\left(\gamma^C_{\xi\zeta} + \gamma^C_{\eta\zeta}\right) + \frac{1}{3}\hat{c}(3\xi - 1) \end{aligned} \tag{6}$$

với $\hat{c} = \left(\gamma^F_{\xi\zeta} - \gamma^D_{\xi\zeta}\right) - \left(\gamma^F_{\eta\zeta} + \gamma^E_{\eta\zeta}\right)$. Ở đây, $\gamma^I_{\xi\zeta}, \gamma^I_{\eta\zeta}$ là các giá trị của biến dạng cắt ngoài mặt phẳng tính tại các điểm buộc $I = A, B, C, D, E, F$ có tọa độ cho trong Bảng 1.

Bảng 1. Tọa độ các điểm buộc của kỹ thuật khử khóa cắt MITC3+ với $d = 1/10000$

Điểm buộc	ξ	η
A	$1/6$	$2/3$
B	$2/3$	$1/6$
C	$1/6$	$1/6$
D	$1/3 + d$	$1/3 - 2d$
E	$1/3 - 2d$	$1/3 + d$
F	$1/3 + d$	$1/3 + d$

Từ các tọa độ điểm buộc cho trong Bảng 1, các giá trị biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ (x, y) được xác định theo (5). Sử dụng công thức biến đổi biến dạng cắt ngoài mặt phẳng từ hệ tọa độ (x, y) sang hệ tọa độ (ξ, η) và thế vào xấp xỉ biến dạng cắt cho bởi (6), ta có thể thiết lập được quan hệ giữa biến dạng cắt ngoài mặt phẳng và chuyển vị nút phần tử theo kỹ thuật khử khóa cắt MITC3+ như sau

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\gamma}_{xz} \\ \hat{\gamma}_{yz} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\mathbf{B}}_{si}\mathbf{d}_{ei} \tag{7}$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của tấm đồng nhất đẳng hướng xác định

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{array} \right] \sum_{i=1}^{4} \mathbf{B}_{bi}\mathbf{d}_{ei} \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{c} \hat{\gamma}_{xz} \\ \hat{\gamma}_{yz} \end{array} \right\} = \frac{E}{2(1-\nu)} \sum_{i=1}^{4} \hat{\mathbf{B}}_{si}\mathbf{d}_{ei} \tag{9}$$

trong đó E là mô-đun đàn hồi và ν là hệ số Poisson của vật liệu.

Nguyên lý công ảo của tấm có diện tích mặt trung bình Ω chịu tải trọng p_z tác dụng vuông góc với mặt trung bình [13]

$$\int_{\Omega}\int_{-t/2}^{t/2}\left[\delta\varepsilon_x\delta\varepsilon_y\delta\gamma_{xy}\right]\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{array}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}\Omega+\frac{kt^2}{t^2+\alpha h_e^2}\int_{\Omega}\int_{-t/2}^{t/2}\left[\delta\hat{\gamma}_{xz}\delta\hat{\gamma}_{yz}\right]\left\{\begin{array}{c}\tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{array}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\delta w p_z\mathrm{d}\Omega \quad (10)$$

trong đó δ chỉ đại lượng ảo, $k = 5/6$ là hằng số hiệu chỉnh kể đến sự phân bố không đều theo chiều dày của các ứng suất cắt ngoài mặt phẳng $\tau_{xz}, \tau_{yz}, h_e$ là cạnh dài nhất của phần tử và $\alpha = 0{,}1$ là hệ số ổn định [14].

Thế các quan hệ giữa ứng suất – biến dạng (8), (9) vào (10), ta có

$$\sum_{e=1}^{N_e}\delta\mathbf{d}_e^T\left(\int_{\Omega_e}\mathrm{B}_b^T\mathbf{D}_b\mathbf{B}_b\mathrm{d}\Omega\right)\mathbf{d}_e+\sum_{e=1}^{N_e}\delta\mathbf{d}_e^T\left(\int_{\Omega_e}\hat{\mathrm{B}}_s^T\mathbf{D}_s\hat{\mathbf{B}}_s\mathrm{d}\Omega\right)\mathbf{d}_e=\sum_{e=1}^{N_e}\delta\mathbf{d}_e^T\int_{\Omega_e}\mathbf{N}p_z\mathrm{d}\Omega \quad (11)$$

trong đó $\mathbf{B}_b = [\mathbf{B}_{b1}\ \mathbf{B}_{b2}\ \mathbf{B}_{b3}\ \mathbf{B}_{b4}], \mathbf{B}_s = [\mathbf{B}_{s1}\ \mathbf{B}_{s2}\ \mathbf{B}_{s3}\mathbf{B}_{s4}], \mathbf{d}_e = [\mathbf{d}_{e1}^T\ \mathbf{d}_{e2}^T\ \mathbf{d}_{e3}^T\ \mathbf{d}_{e4}^T]^T$, $\mathbf{N} = [N_1\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ N_4\ 0\ 0]^T$ và

$$\mathbf{D}_b = D\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix} \quad \text{với} \quad D=\frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{kEt^3}{\left(t^2+\alpha h_e^2\right)2(1+\nu)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (13)$$

Từ (11), phương trình cân bằng rời rạc PTHH của tấm chịu tải trọng tĩnh p_z được viết dưới dạng

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (14)$$

trong đó $\mathbf{d}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ lần lượt là véc-tơ chuyển vị, ma trận độ cứng và véc-tơ tải trọng của tấm. Ma trận $\mathbf{K}$ và véc-tơ $\mathbf{F}$ tương ứng được lắp ghép từ các ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ và véc-tơ tải trọng $\mathbf{f}_e$ của phần tử có công thức như sau

$$\mathbf{k}_e = \int_{\Omega_e}\mathrm{B}_b^T\mathbf{D}_b\mathbf{B}_b\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega_e}\hat{\mathrm{B}}_s^T\mathbf{D}_s\hat{\mathbf{B}}_s\mathrm{d}\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e}\mathbf{N}p_z\mathrm{d}\Omega \quad (16)$$

2.2. Công thức phần tử tấm ES-MITC3+

Trong nghiên cứu này, biến dạng uốn sẽ được trung bình trên miền làm trơn có diện tích Ω_k được giới hạn bởi các đoạn thẳng nối 2 nút nổi của 2 phần tử chung cạnh với 2 nút đỉnh của cạnh chung này như Hình 3.

Do đó, biến dạng uốn được xấp xỉ lại như sau

$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{\varepsilon}_x\\ \tilde{\varepsilon}_y\\ \tilde{\gamma}_{xy}\end{array}\right\} = \frac{1}{\Omega_k}\int_{\Omega_k}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}\mathrm{d}\Omega \tag{17}$$

Thế (4) vào (17) ta được quan hệ giữa biến dạng trơn và chuyển vị nút phần tử

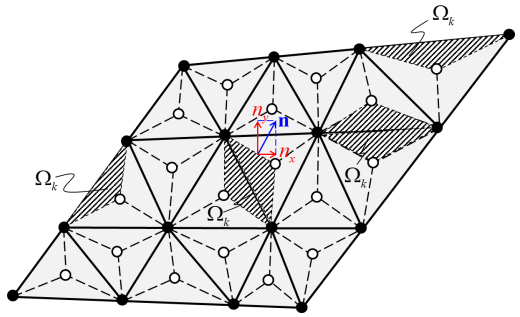
$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{\varepsilon}_x\\ \tilde{\varepsilon}_y\\ \tilde{\gamma}_{xy}\end{array}\right\} = z\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\Omega_k}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc}0 & 0 & \int_{\Omega_k}N_{i,x}\mathrm{d}\Omega\\ 0 & -\int_{\Omega_k}N_{i,y}\mathrm{d}\Omega & 0\\ 0 & -\int_{\Omega_k}N_{i,x}\mathrm{d}\Omega & \int_{\Omega_k}N_{i,y}\mathrm{d}\Omega\end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{B}}_{bi}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{array}\right\}}_{\mathbf{d}_{ei}} = z\sum_{i=1}^{4}\tilde{\mathbf{B}}_{bi}\mathbf{d}_{ei} \tag{18}$$

Áp dụng định lý phân kỳ Gauss-Ostrogradsky, tích phân trên miền làm trơn Ω_k của các đạo hàm hàm dạng trong (18) sẽ được chuyển thành tích phân trên đường biên Γ_k của Ω_k như sau

$$\int_{\Omega_k}N_{i,x}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_k}N_i n_x\mathrm{d}\Gamma;\quad \int_{\Omega_k}N_{i,y}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_k}N_i n_y\mathrm{d}\Gamma \tag{19}$$

trong đó n_x và n_y lần lượt là hình chiếu theo phương x và y của véc-tơ $\mathbf{n}$ pháp tuyến với biên Γ_k như biểu diễn ở Hình 3.

Với các hàm dạng cho bởi (3), tích phân đường ở (19) được tính chính xác bằng cách sử dụng 2 điểm Gauss trên mỗi đoạn thẳng của biên Γ_k. Do đó, tích phân ở (19) có thể được tính như sau



Hình 3. Miền làm trơn trên cạnh (ES) cho biến dạng uốn của các phần tử ES-MITC3+ và định nghĩa véc-tơ pháp tuyến của biên miền làm trơn

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_k}N_{i,x}\mathrm{d}\Omega &= \int_{\Gamma_k}N_i n_x\mathrm{d}\Gamma = \sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2}N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_x^{ed}\\ \int_{\Omega_k}N_{i,y}\mathrm{d}\Omega &= \int_{\Gamma_k}N_i n_y\mathrm{d}\Gamma = \sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2}N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_y^{ed}\end{aligned} \tag{20}$$

trong đó $N_{ed}=3$ đối với miền Ω_k nằm ở biên tấm và $N_{ed}=4$ đối với miền Ω_k không nằm ở biên tấm. $\xi_{gp}^{ed}, \eta_{gp}^{ed}, w_{gp}^{ed}, n_x^{ed}, n_y^{ed}$ lần lượt là tọa độ tự nhiên, trọng số của điểm Gauss và thành phần của véc-tơ pháp tuyến $\mathbf{n}$ trên cạnh ed của biên Γ_k.

Vì vậy, biến dạng uốn sau khi được làm trơn có thể được xác định bởi

$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{\varepsilon}_x\\ \tilde{\varepsilon}_y\\ \tilde{\gamma}_{xy}\end{array}\right\} = z\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\Omega_k}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2} N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_x^{ed}\\ 0 & -\sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2} N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_y^{ed} & 0\\ 0 & -\sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2} N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_x^{ed} & \sum_{ed=1}^{N_{ed}}\sum_{gp=1}^{2} N_i\left(\xi_{gp}^{ed},\eta_{gp}^{ed}\right)w_{gp}^{ed}n_y^{ed}\end{array}\right]}_{\tilde{\mathbf{B}}_{bi}}\underbrace{\left\{\begin{array}{c}w_i\\ \theta_{xi}\\ \theta_{yi}\end{array}\right\}}_{\mathbf{d}_{ei}}$$

$$= z\sum_{i=1}^{4}\tilde{\mathbf{B}}_{bi}\mathbf{d}_{ei} \tag{21}$$

Thế biến dạng uốn được xấp xỉ lại theo kỹ thuật làm trơn trên cạnh cho bởi (21) vào nguyên lý công ảo (10), phương trình cân bằng rời rạc PTHH của tấm chịu uốn được viết lại

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{d} = \mathbf{F} \tag{22}$$

trong đó $\tilde{\mathbf{K}}$ được lắp ghép từ các ma trận độ cứng phần tử ES-MITC3+ có biến dạng uốn được làm trơn trên cạnh

$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \int_{\Omega_e}\tilde{\mathrm{B}}_b^T\mathbf{D}_b\tilde{\mathbf{B}}_b\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e}\hat{\mathrm{B}}_s^T\mathbf{D}_s\hat{\mathbf{B}}_s\mathrm{d}\Omega \tag{23}$$

trong đó $\tilde{\mathbf{B}}_b = \left[\tilde{\mathbf{B}}_{b1}\ \ \tilde{\mathbf{B}}_{b2}\ \ \tilde{\mathbf{B}}_{b3}\ \ \tilde{\mathbf{B}}_{b4}\right]$.

Theo cách tính $\tilde{\mathbf{B}}_{bi}$ cho bởi (21) thì $\tilde{\mathbf{B}}_{bi}$ hay $\tilde{\mathbf{B}}_b$ là hằng số. Do đó, công thức tính ma trận độ cứng phần tử ES-MITC3+ có thể được viết lại

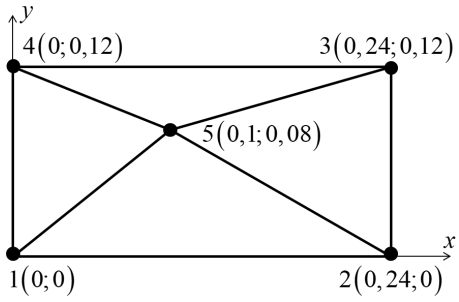
$$\tilde{\mathbf{k}}_e = \tilde{\mathrm{B}}_b^T\mathbf{D}_b\tilde{\mathbf{B}}_b\Omega_k + \int_{\Omega_e}\hat{\mathrm{B}}_s^T\mathbf{D}_s\hat{\mathbf{B}}_s\mathrm{d}\Omega \tag{24}$$

3. Ví dụ số

3.1. Bài toán patch test

Để kiểm tra khả năng xấp xỉ trường biến dạng và ứng suất của phần tử ES-MITC3+, xét tấm chữ nhật dày $t = 0{,}01$ m có tọa độ nút và lưới phần tử như Hình 4. Tấm làm bằng vật liệu có mô-đun đàn hồi $E = 107$ kN/m và hệ số Poisson $\nu = 0{,}25$. Tấm chịu độ võng cưỡng bức $w = (1 + x + 2y + x^2 + xy + y^2)/200$ m [9].

Theo lý thuyết tấm mỏng, bỏ qua biến dạng cắt ngoài mặt phẳng, từ độ võng w tính được góc xoay quanh trục x, y tương ứng $\theta_x = \partial w/\partial y$, $\theta_y = \partial w/\partial x$, và các thành phần biến dạng, ứng suất hoặc



Hình 4. Tọa độ nút phần tử của bài toán patch test (đơn vị m)

Bảng 2. Kết quả độ võng và mô-men tại nút 5 của bài toán patch test

Lời giải	w_5 ($\times 10^{-2}$ m)	θ_{x5} ($\times 10^{-2}$ rad.)	θ_{y5} ($\times 10^{-2}$ rad.)	M_{x5} (kNm/m)	M_{y5} (kNm/m)	M_{xy5} (kNm/m)
ES-MITC3+	0,6422	1,1300	−0,6400	−0,0111	−0,0111	−0,0033
Chính xác	0,6422	1,1300	−0,6400	−0,0111	−0,0111	−0,0033

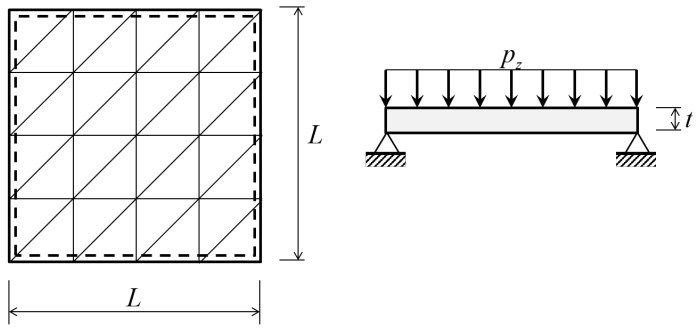
mô-men. Kết quả tính toán chuyển vị và nội lực tại nút 5 có tọa độ $x = 0{,}1$ m và $y = 0{,}08$ m bằng lời giải lý thuyết tấm mỏng và phần tử ES-MITC3+ được cho trong Bảng 2.

Với kết quả độ võng và mô-men của phần tử ES-MITC3+ hoàn toàn trùng với lời giải chính xác, phần tử ES-MITC3+ đã vượt qua điều kiện patch test vì có khả năng biểu diễn chính xác trường chuyển vị và biến dạng, ứng suất hoặc nội lực.

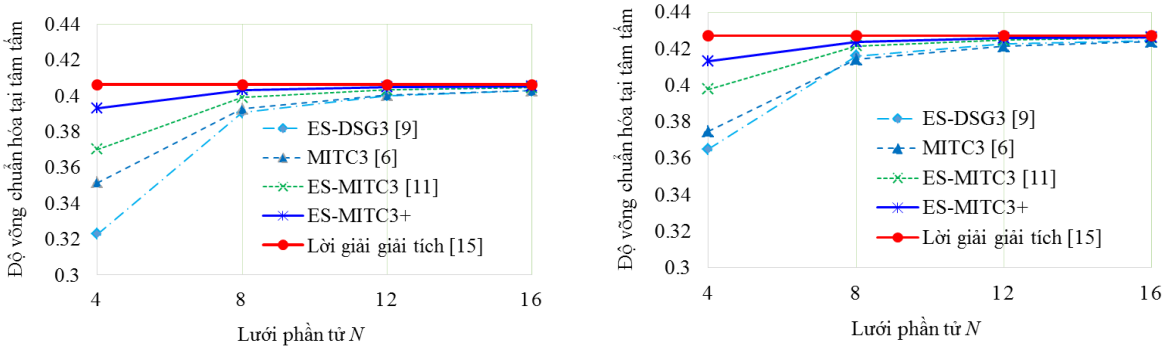
3.2. Tấm hình vuông tựa đơn 4 cạnh chịu tải phân bố đều

Xét tấm vuông cạnh L, dày t với tỉ số $t/L = 0{,}001$ hoặc $t/L = 0{,}1$. Tấm tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng phân bố đều $p_z = 1$ kN/m^2 như Hình 5. Vật liệu làm tấm có $E = 1092000$ kN/m^2 và $\nu = 0{,}3$. Để so sánh với kết quả tham khảo, độ võng w_c và mô-men M_c tại tâm tấm được chuẩn hóa như sau

$$\bar{w}_c = w_c \frac{100D}{p_z L^4}; \quad \bar{M}_c = M_c \frac{10}{p_z L^2} \tag{25}$$



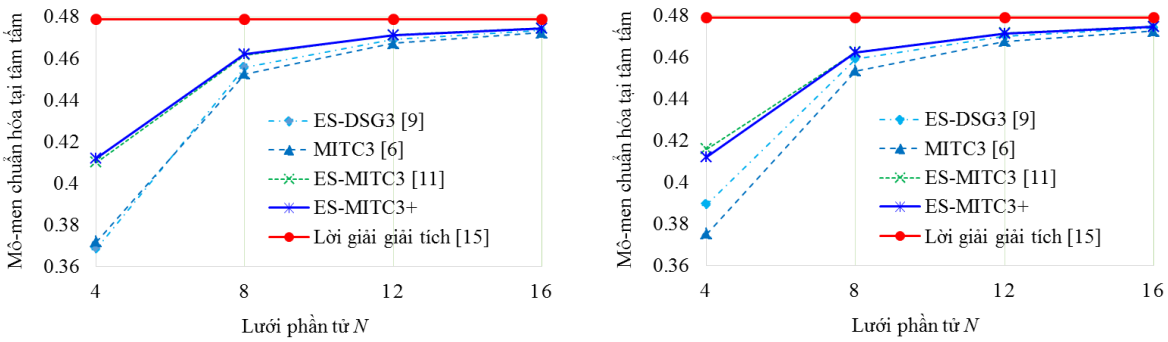
Hình 5. Tấm vuông tựa đơn 4 cạnh chịu tải phân bố đều và chia lưới đều với $N = 4$



(a) $t/L = 0{,}001$ (b) $t/L = 0{,}1$

Hình 6. Độ võng chuẩn hóa $\bar{w}_c$ tại tâm tấm vuông tựa đơn 4 cạnh chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử $N = 4, 8, 12, 16$

Tấm được chia lưới bằng 2×N×N phần tử tam giác 3 nút như Hình 5. Trong đó, $N = 4, 8, 12$ và 16 là số phần tử trên mỗi cạnh của tấm. Kết quả tính toán độ võng $\bar{w}_c$ và mô-men $\bar{M}_c$ chuẩn hóa tại tâm tấm bằng phần tử ES-MITC3+ ứng với các loại lưới khác nhau được biểu diễn tương ứng trong Hình 6 và Hình 7 cho trường hợp tấm mỏng $t/L = 0{,}001$ hoặc tấm dày $t/L = 0{,}1$.



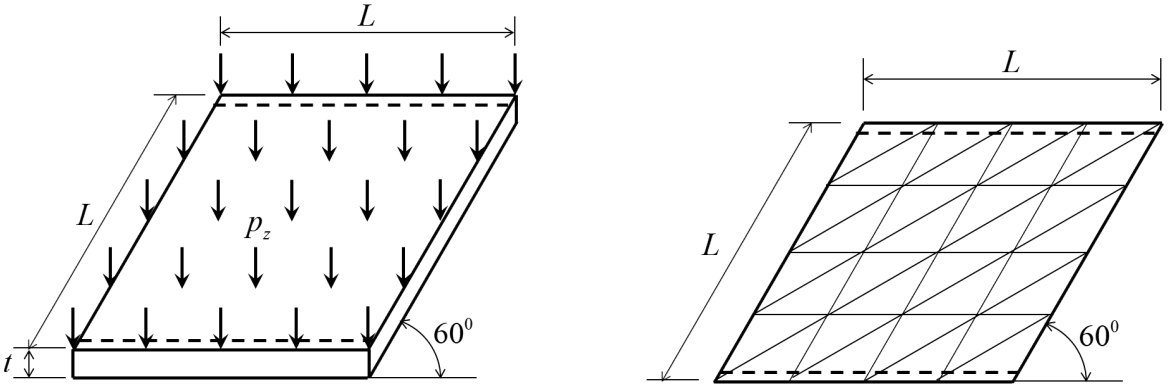
(a) $t/L = 0{,}001$ (b) $t/L = 0{,}1$

Hình 7. Mô-men chuẩn hóa $\bar{M}_c$ tại tâm tấm vuông tựa đơn 4 cạnh chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử $N = 4, 8, 12, 16$

Hình 6 cho thấy, đối với tấm mỏng và tấm dày phần tử ES-MITC3+ cho kết quả giá trị độ võng tại tâm tấm hội tụ đến lời giải giải tích [15] tốt hơn kết quả cho bởi các phần tử MITC3 [6], ES-MITC3 [11] và ES-DSG3 [9]. Đối với mô-men tại tâm tấm, Hình 7 cũng cho thấy, phần tử ES-MITC3+ cho kết quả tốt nhất so với các phần tử khác trong trường hợp tấm mỏng và tấm dày.

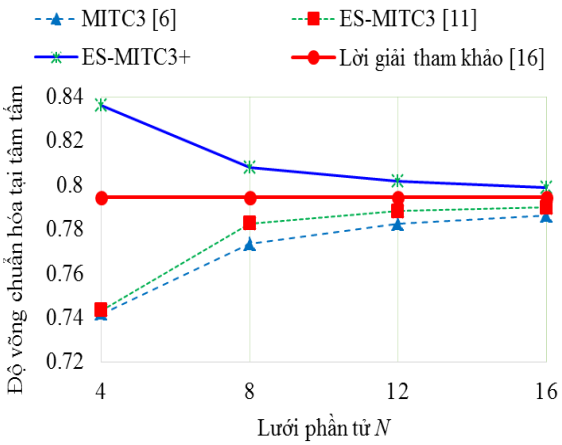
3.3. Tấm hình thoi Razzaque chịu tải phân bố đều

Cho tấm hình thoi Razzaque có mỗi cạnh dài L, dày t và tỉ số $t/L = 0{,}001$. Tấm có cạnh dưới, cạnh trên tựa đơn và 2 cạnh bên tự do, nghiêng 1 góc $\beta = 60^\circ$ so với cạnh dưới như Hình 8(a). Tấm chịu tải trọng phân bố đều $p_z = 1$ kN/m^2. Đặc trưng vật liệu làm tấm có mô-đun đàn hồi $E = 1092000$ kN/m^2 và hệ số Poisson $\nu = 0{,}3$.

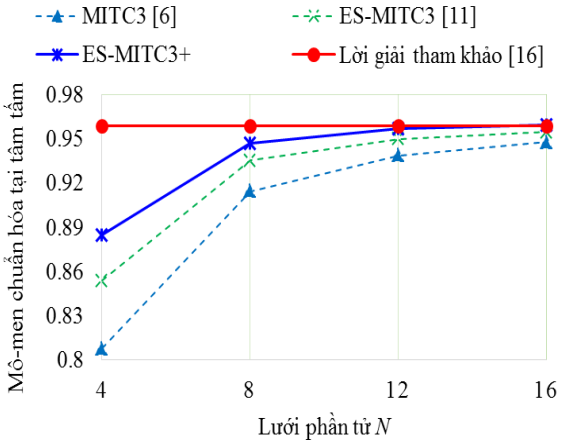


(a) (b)

Hình 8. Tấm hình thoi Razzaque (a) Tựa đơn 2 cạnh và tự do 2 cạnh, chịu tải phân bố đều, (b) chia lưới đều với $N = 4$



Hình 9. Độ võng chuẩn hóa $\bar{w}_c$ tại tâm tấm hình thoi Razzaque chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử $N = 4, 8, 12, 16$

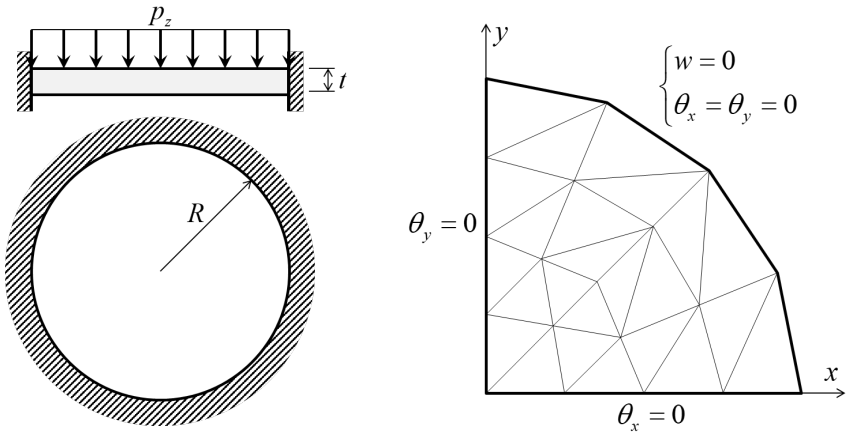


Hình 10. Mô-men chuẩn hóa $\bar{M}_c$ tại tâm tấm hình thoi Razzaque chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử $N = 4, 8, 12, 16$

Tấm được chia lưới 2×N×N phần tử tam giác 3 nút đều như Hình 8(b). Trong đó, $N = 4, 8, 12$ và 16 là số phần tử trên mỗi cạnh của tấm. Sự hội tụ của độ võng $\bar{w}_c$ và mô-men $\bar{M}_c$ tại tâm tấm chuẩn hóa theo (25) cho bởi phần tử ES-MITC3+ và các phần tử MITC3 [6], ES-MITC3 [11] khi N tăng dần từ 4 đến 16 được thể hiện trong Hình 9 và Hình 10. Hình 9 và Hình 10 cho thấy trong trường hợp này khi tấm hình thoi phải chia lưới bằng các phần tử không phải tam giác vuông cân như ở ví dụ 3.2, độ võng và mô-men chuẩn hóa cho bởi phần tử ES-MITC3+ hội tụ đến lời giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn [16] với sai số ít hơn kết quả của các phần tử MITC3 [6], ES-MITC3 [11]. Đặc biệt, phần tử ES-MITC3+ đã cải thiện đáng kể độ chính xác của mô-men tại tâm tấm so với phần tử MITC3.

3.4. Tấm hình tròn biên ngàm chịu tải phân bố đều

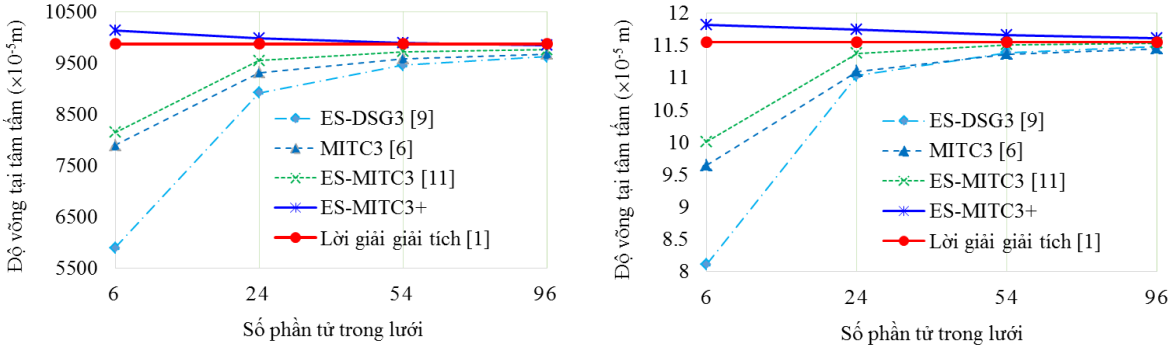
Cho tấm tròn bán kính $R = 5$ m, dày t với $t/R = 0{,}02$ hoặc 0,2. Tấm ngàm theo chu vi và chịu tải trọng phân bố đều $p_z = 1$ kN/m^2 như Hình 11(a). Vật liệu của tấm có $E = 1092000$ kN/m^2, $\nu = 0{,}3$.



(a) (b)

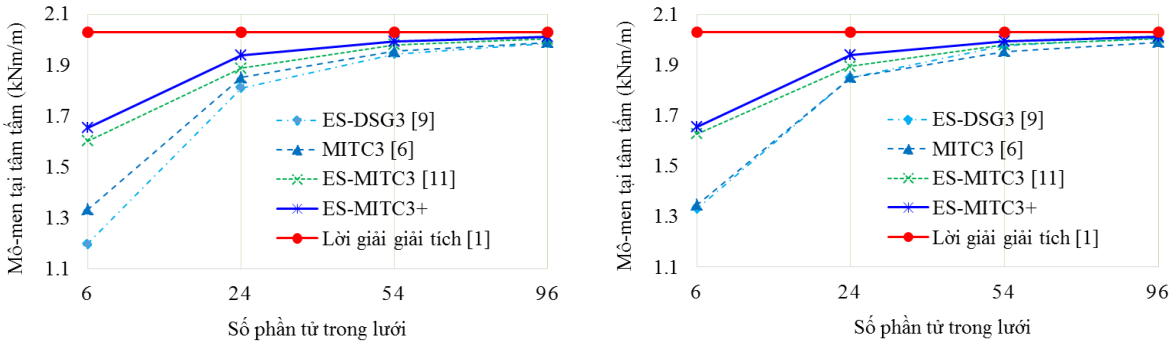
Hình 11. Tấm hình tròn (a) biên ngàm, chịu tải phân bố đều, (b) chia lưới 24 phần tử với các điều kiện biên ngàm và đối xứng

Sử dụng tính chất đối xứng, 1/4 tấm tròn được mô phỏng với các lưới tam giác có 6, 24, 54 hoặc 96 phần tử như Hình 11(b). Kết quả tính toán độ võng w_c và mô-men M_c tại tâm tấm bằng phần tử ES-MITC3+ ứng với các loại lưới khác nhau được biểu diễn trong Hình 12 và Hình 13. Từ biểu đồ Hình 12 và Hình 13 cho thấy, so sánh với lời giải giải tích [1], cả 2 trường hợp tấm mỏng ($t/R = 0{,}02$) và tấm dày ($t/R = 0{,}2$) từ lưới thô đến lưới mịn phần tử ES-MITC3+ đều cho ra kết quả giá trị độ võng $\bar{w}_c$ và mô-men M_c tại tâm tấm rất tốt. Với lưới mịn nhất (96 phần tử), độ võng và mô-men cho bởi phần tử ES-MITC3+ tốt hơn kết quả của các phần tử tam giác 3 nút ES-DSG3 [9], MITC3 [6] và tương đương với kết quả giải bằng phần tử ES-MITC3 [11].



(a) $t/R = 0{,}02$ (b) $t/R = 0{,}2$

Hình 12. Độ võng w_c tại tâm tấm tròn ngàm 4 cạnh chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử có số phần tử bằng 6, 24, 54, 96



(a) $t/R = 0{,}02$ (b) $t/R = 0{,}2$

Hình 13. Mô-men M_c tại tâm tấm tròn ngàm 4 cạnh chịu tải phân bố đều ứng với các lưới phần tử có số phần tử bằng 6, 24, 54, 96

4. Kết luận

Nghiên cứu này đã trình bày công thức phần tử ES-MITC3+ có biến dạng uốn được làm trơn trên cạnh (ES) và xấp xỉ biến dạng cắt bằng kỹ thuật khử khóa cắt MITC3+. Phần tử ES-MITC3+ có sử dụng nút nổi để tăng bậc xấp xỉ của góc xoay. Nhờ kỹ thuật làm trơn, tích phân trong công thức ma trận độ cứng uốn của phần tử đề xuất đã được chuyển từ tích phân mặt của phần tử sang tích phân

đường của biên miền làm trơn nên có khả năng tăng độ chính xác tính toán phần tử không đều. Phần tử ES-MITC3+ có khả năng biểu diễn chính xác trường chuyển vị, biến dạng, ứng suất hoặc nội lực của bài toán patch test.

Phần tử đề xuất ES-MITC3+ được sử dụng để phân tích một số bài toán tấm hình vuông, hình thoi và hình tròn chịu tải trọng phân bố đều. Tương tự các phần tử tam giác 3 nút có làm trơn cùng loại như ES-DSG3, ES-MITC3, kết quả cho bởi phần tử ES-MITC3+ hội tụ đến lời giải giải tích. Do có sử dụng nút nổi trong xấp xỉ góc xoay nên trong các ví dụ khảo sát phần tử ES-MITC3+ cho kết quả tính toán mô-men tốt hơn các phần tử MITC3, ES-MITC3, ES-DSG3.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2017.304.

Tài liệu tham khảo

[1] Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.

[2] Hải, L. T., Tú, T. M., Huỳnh, L. X. (2018). Phân tích dao động riêng của tấm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 12(7):9–19.

[3] Tú, T. M., Quốc, T. H., Thẩm, V. V. (2018). Phân tích tĩnh tấm composite có lớp áp điện theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Reddy bằng phương pháp giải tích. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXD*, 12(4):40–50.

[4] Tessler, A., Hughes, T. J. R. (1985). A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(1):71–101.

[5] Bletzinger, K.-U., Bischoff, M., Ramm, E. (2000). A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 75(3):321–334.

[6] Lee, P.-S., Bathe, K.-J. (2004). Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 82(11-12):945–962.

[7] Lee, Y., Lee, P.-S., Bathe, K.-J. (2014). The MITC3+ shell element and its performance. *Computers & Structures*, 138:12–23.

[8] Liu, G.-R., Nguyen-Thoi, T. (2010). *Smoothed finite element methods*. CRC Press.

[9] Nguyen-Xuan, H., Liu, G. R., Thai-Hoang, C., Nguyen-Thoi, T. (2010). An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):471–489.

[10] Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Thoi, T., Bordas, S. (2010). A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates. *Computational Mechanics*, 46(5):679–701.

[11] Chau-Dinh, T., Nguyen-Duy, Q., Nguyen-Xuan, H. (2017). Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis. *Acta Mechanica*, 228(6):2141–2163.

[12] Chau Dinh, T., Nguyen Van, D. (2016). Phân tích tĩnh và dao động riêng tấm composite nhiều lớp bằng phần tử MITC3 có biến dạng được trung bình trên miền nút phần tử (NS-MITC3). *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc Vật liệu và Kết cấu Composite: Cơ học, Công nghệ và Ứng dụng, Nha Trang*, 613–620.

[13] Bathe, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall International, Inc.

[14] Lyly, M., Stenberg, R., Vihinen, T. (1993). A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110(3-4):343–357.

[15] Taylor, R. L., Auricchio, F. (1993). Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II—A simple triangle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(18):3057–3066.

[16] Razzaque, A. (1973). Program for triangular bending elements with derivative smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6(3):333–343.