

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG KẾT CẤU TẦM COMPOSITE LỚP GIA CƯỜNG ỐNG NANO CACBON CÓ GẮN LỚP VẬT LIỆU ÁP ĐIỆN

Vũ Văn Thắm^{a,*}, Trần Hữu Quốc^a, Trần Minh Tú^a

^a*Khoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 24/06/2019, Sửa xong 23/07/2019, Chấp nhận đăng 29/07/2019

Tóm tắt

Bài báo sử dụng lý thuyết bậc cao bốn ẩn chuyển vị cải tiến (HSDT-4) và dạng nghiệm Navier (chuỗi Fourier kép) để phân tích dao động riêng của tấm composite lớp gia cường bằng ống nano carbon đơn vách (single-walled carbon nanotube - SWNT), tích hợp lớp vật liệu áp điện. Các phương trình cân bằng động cho tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp được thiết lập từ nguyên lý Hamilton và phương trình Maxwell. Độ tin cậy của thuật toán và chương trình tính được kiểm chứng qua so sánh với các kết quả đã công bố. Các khảo sát số được trình bày để đánh giá sự ảnh hưởng của đặc trưng vật liệu, kích thước tấm và độ dày lớp áp điện đến tần số dao động riêng của kết cấu tấm tổng thể xét cho cả trường hợp mở mạch và ngắn mạch.

Từ khóa: lý thuyết bốn ẩn chuyển vị; phân tích dao động riêng; vật liệu áp điện; ống nano carbon; composite lớp.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF SMART LAMINATED FUNCTIONALLY GRADED CARBON NANOTUBE REINFORCED COMPOSITE PLATES USING FOUR-VARIABLE REFINED PLATE THEORY

Abstract

In this paper, a four-variable refined plate theory (HSDT4) and Navier solution are used to analyze the free vibration characteristics of functionally graded carbon nanotube reinforced laminated composite plates integrated with piezoelectric. Equations of motion are derived by using both the Maxwell's equation and Hamilton's principle. Comparison studies have been carried out to verify accuracy of present model. New parametric studies regarding the influence of volume fraction of CNTs, distribution type of CNTs, number of layers, CNT fiber orientation and piezoelectric layer's thickness on the natural frequency are performed in detail with two types of electrical boundary conditions, namely, closed circuit and opened circuit.

Keywords: four-variable refined plate theory; free vibration; piezoelectric material; carbon nanotube; composite.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13\(3V\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2019-13(3V)-05) © 2019 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Ống nano carbon (Carbon NanoTube - CNT) được phát hiện vào năm 1991 bởi Iijima [1]. Với cấu trúc tinh thể đặc biệt và các tính chất cơ học nổi trội như có độ bền, độ cứng riêng cao (cứng hơn cả kim cương và gấp khoảng 200 lần thép) trong khi khối lượng riêng nhỏ, tính dẫn điện, dẫn nhiệt tốt, do đó ống nano carbon ngày càng được quan tâm nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và công nghệ.

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: vuthamxd@gmail.com (Thắm, V. V.)

Vật liệu có cơ tính biến thiên được gia cường bởi các ống nano (functionally graded carbon nanotube reinforced composites carbon FG-CNTRC) là một loại composite thể hệ mới lần đầu tiên được đề xuất bởi Shen [1]. Loại vật liệu composite này có các ống nano carbon phân bố trên nền là vật liệu đẳng hướng theo một quy luật nhất định dọc theo các hướng nhất định nhằm cải thiện các tính chất cơ học mong muốn. Sau nghiên cứu này, hàng loạt các khảo sát về dầm, tấm và vỏ gia cường CNT đã được nghiên cứu. Zhu [2] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích tĩnh và dao động riêng của tấm composite đơn lớp được gia cường bởi CNT bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Lei và cs. [3] đã nghiên cứu bài toán ổn định của tấm composite được gia cường CNT chịu các tải trọng cơ học khác nhau bằng phương pháp kp-Ritz. Theo hướng tiếp cận giải tích, Huang và cs. [4] đã tiến hành phân tích tĩnh và dao động riêng của kết cấu tấm composite nhiều lớp gia cường CNT theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản.

Vật liệu áp điện là loại vật liệu có khả năng tự thay đổi hình dạng, kích thước khi đặt chúng dưới tác động của điện trường (trạng thái kích thích - actuator) hoặc tự sinh ra điện trường khi chúng bị biến dạng (trạng thái cảm biến - sensor) [5]. Kết cấu composite có gắn lớp áp điện là một dạng kết cấu "thông minh" được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp hàng không, giao thông vận tải và nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác. Các công bố về phân tích dao động riêng kết cấu composite áp điện gia cường ống nano carbon đã được một số tác giả công bố trong thời gian gần đây. Kiani [6] sử dụng phương pháp Ritz với hàm dạng đa thức Chebyshev để phân tích dao động tự do của tấm FG-CNTRC có gắn các lớp áp điện. Selim [7] và các cộng sự nghiên cứu và kiểm soát dao động của kết cấu tấm composite áp điện gia cường CNT sử dụng phương pháp phần tử tự do IMLS-Ritz mới dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba Reddy. Trong nghiên cứu của Nguyen và cs. [8] đã sử dụng phương pháp đẳng hình học, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để nghiên cứu đáp ứng động của các tấm FG-CNTRC nhiều lớp có gắn các lớp áp điện.

Việc phát triển và hoàn thiện các mô hình tấm luôn là mục tiêu của các nhà nghiên cứu. Lý thuyết tấm cổ điển chấp nhận giả thiết Kirchhoff, bỏ qua biến dạng cắt ngang, do vậy chỉ phù hợp với tấm mỏng. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có kể đến biến dạng cắt ngang, phù hợp với tấm có chiều dày trung bình nhưng phải sử dụng đến hệ số hiệu chỉnh cắt. Để sát hơn quy luật phân bố của ứng suất cắt ngang dọc theo chiều dày tấm, các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đã được đề xuất, tuy nhiên việc sử dụng các lý thuyết này dẫn đến lời giải cồng kềnh, phức tạp do số ẩn chuyển vị lớn.

Nghiên cứu để xây dựng được mô hình tính toán chính xác và hiệu quả cho các kết cấu nói chung và kết cấu tấm vỏ composite nói riêng luôn thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học. Lý thuyết tấm với bốn ẩn số chuyển vị (HSDT-4) được phát triển trên cơ sở phân tích độ võng làm hai thành phần: thành phần độ võng do mô men uốn và thành phần độ võng do lực cắt gây nên. Lý thuyết này có các ưu điểm như ít ẩn số, không cần sử dụng đến hệ số hiệu chỉnh cắt và thỏa mãn điều kiện triệt tiêu ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới tấm. Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả sử dụng lý thuyết bốn ẩn cải tiến của Shimpi và Patel [9] với nghiệm giải tích dạng chuỗi Fourier kép để phân tích dao động tự do của các tấm composite nhiều lớp gia cường ống CNT có gắn các lớp áp điện tại mặt trên và dưới tấm.

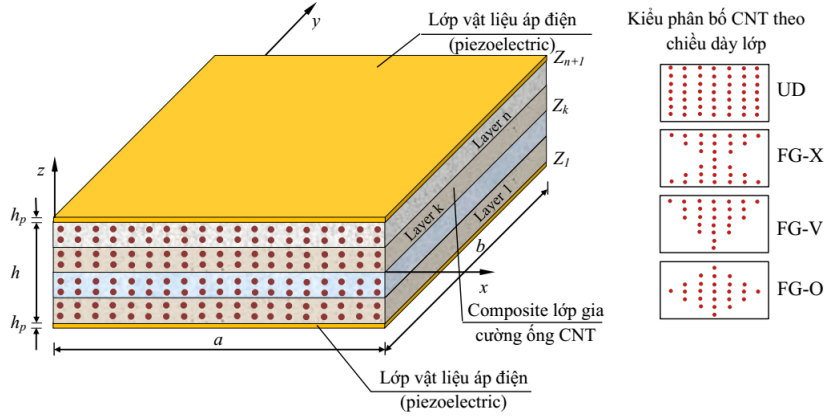
2. Các công thức lý thuyết

2.1. Tấm composite lớp áp điện gia cường ống nano carbon

Xét tấm composite lớp có chiều dài a , chiều rộng b , độ dày h (Hình 1). Các lớp áp điện được gắn tại mặt trên và dưới của tấm, chiều dày của mỗi lớp áp điện là h_p . Mỗi lớp là vật liệu FG-CNTRC với bốn kiểu phân bố CNT theo phương chiều dày của từng lớp composite (UD, FG-X, FG-V, FG-O). Tỷ

phần thể tích xác định theo [2]:

$$\begin{aligned} UD : V_{CNT} &= V_{CNT}^* ; FG - V : V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^* ; FG - X : V_{CNT}(z) = \frac{4|z|}{h} V_{CNT}^* ; \\ FG - O : V_{CNT}(z) &= \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{CNT}^* ; V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho^{CNT}/\rho^m) - (\rho^{CNT}/\rho^m) w_{CNT}} \end{aligned} \quad (1)$$



Hình 1. Tấm composite lớp áp điện gia cường ống nano carbon

Các tính chất hiệu dụng của vật liệu composite gia cường ống nano carbon đơn vách (SWCNT) trong từng lớp được tính như sau [2]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \eta_1 V_{CNT} E_{11}^{CNT} + V_m E_m ; \quad \frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{E_m} ; \quad \frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_m}{G_m} ; \\ \nu_{12} &= V_{CNT}^* \nu_{12}^{CNT} + V_m \nu^m ; \quad \rho = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó E_{11}^{CNT} , E_{22}^{CNT} và G_{12}^{CNT} là mô đun đàn hồi Young và mô đun đàn hồi trượt của CNT; E_m và G_m là mô đun đàn hồi Young và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu nền đẳng hướng; η_1 , η_2 và η_3 là các tham số hiệu chỉnh của CNT; V_{CNT} và V_m lần lượt là tỷ phần thể tích của CNT và của vật liệu nền ($V_{CNT} + V_m = 1$); ν_{12}^{CNT} , ρ^{CNT} và ν^m , ρ^m là hệ số Poisson và khối lượng riêng lần lượt của CNT và của vật liệu nền.

2.2. Lý thuyết bốn ẩn chuyển vị

Theo Shimpi và Patel [9], trường chuyển vị được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} u(x, y, x, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} ; \\ v(x, y, x, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial y} ; \\ w(x, y, x, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

trong đó u_0 , v_0 lần lượt là các thành phần chuyển vị màng của điểm bất kỳ trên mặt trung bình theo phương x, y ; w_b và w_s là các thành phần độ võng do mômen uốn và do lực cắt gây ra; $f(z)$ là hàm

đặc trưng cho quy luật biến thiên của ứng suất cắt ngang theo chiều dày tấm. Theo [9] hàm: $f(z) = z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h_t} \right)^2 \right]$ thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt ngang tại mặt trên và dưới của tấm bằng không.

Trường biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z)\kappa_x^s \\ f(z)\kappa_y^s \\ f(z)\kappa_{xy}^s \\ g(z)\gamma_{yz}^s \\ g(z)\gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (4)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \kappa_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}; \kappa_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}; g(z) = [1 - f'(z)]; \\ \kappa_x^s &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}; \kappa_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}; \kappa_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}; \kappa_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}; \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}; \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng của lớp vật liệu composite thứ k [8]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

trong đó các hằng số vật liệu trong hệ tọa độ tấm ($\bar{Q}_{ij}$) được xác định theo [10]. Với mỗi lớp áp điện thứ k , quan hệ ứng suất - biến dạng trong hệ trục tọa độ tấm (x, y, z) được biểu diễn [11]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{15} & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (7)$$

trong đó quan hệ giữa điện tích xuất hiện với biến dạng và điện trường áp đặt [11]:

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó $[\bar{C}_{ij}]$ là ma trận các hằng số đàn hồi của lớp áp điện, $[e_{ij}]$ là ma trận các hệ số ứng suất áp điện, $[p_{ij}]$ là ma trận các hệ số điện môi, $\{E\}$ là véc tơ cường độ điện trường, $\{D\}$ là véc tơ chuyển dịch điện tích trong lớp áp điện.

Các hằng số đàn hồi cho lớp áp điện được xác định theo:

$$\bar{C}_{11} = C_{11} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}; \bar{C}_{12} = C_{12} - \frac{(C_{13})^2}{C_{33}}; \bar{C}_{55} = C_{55}; \bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33}; \bar{p}_{33} = p_{33} + \frac{e_{33}^2}{C_{33}} \quad (9)$$

Để thỏa mãn phương trình Maxwell (8) và các điều kiện biên về điện thế bề mặt, sự biến đổi của điện thế theo hướng chiều dày của lớp áp điện được giả thiết là sự kết hợp của hàm bậc hai và hàm tuyến tính. Giả thiết này được đề xuất lần đầu tiên bởi Wu [12] có dạng:

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \phi(x, y, t) \left[1 - \left(\frac{z - h/2 - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] + A(x, y, t)z + B(x, y, t) & h/2 \leq z \leq h/2 + h_p \\ \phi(x, y, t) \left[1 - \left(\frac{-z - h/2 - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 \right] + A'(x, y, t)z + B'(x, y, t) & -h/2 - h_p \leq z \leq -h/2 \end{cases} \quad (10)$$

trong đó các ẩn số A, A', B và B' sẽ được xác định để đáp ứng các điều kiện biên điện thế trên bề mặt tấm. Trường hợp ngắt mạch (Close – circuit), điện thế ở cả bề mặt trên và dưới đều bằng không, do đó:

$$\Phi(z = \pm h/2) = 0; \quad \Phi(z = \pm(h/2 + h_p)) = 0 \quad (11)$$

Trường hợp mở mạch (Open – circuit), điện thế tại bề mặt tiếp xúc với kết cấu của lớp áp điện bằng không, trong khi bề mặt tiếp xúc với môi trường có độ thấm thấp như chân không hoặc không khí, không có sự dịch chuyển điện tích lên bề mặt. Do đó, đối với một điều kiện mở mạch, nó có thể được viết:

$$\Phi(z = \pm h/2) = 0; \quad D_z(z = \pm(h/2 + h_p)) = 0 \quad (12)$$

trong đó D_z là sự dịch chuyển điện tương ứng dọc theo hướng z . Hơn nữa, quan hệ giữa điện trường và điện thế như sau:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{hay} \quad E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (13)$$

Thay thế các mối quan hệ (8) và (10) vào các điều kiện biên điện thế (11), (12) mang lại sự biến đổi của điện thế theo hướng chiều dày được biểu diễn theo:

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \phi(x, y, t) \left[1 - \left(\frac{z - h/2 - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 + \frac{4(z - h/2)}{h_p} \right] + C \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{p}_{33}} [u_{0,x} + v_{0,y} - (h/2 + h_p)(w_{b,xx} + w_{b,yy} + f(z)(w_{s,xx} + w_{s,yy}))](z - h/2) & h/2 \leq z \leq h/2 + h_p \\ \phi(x, y, t) \left[1 - \left(\frac{-z - h/2 - h_p/2}{h_p/2} \right)^2 + \frac{-4(z + h/2)}{h_p} \right] + C \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{p}_{33}} [u_{0,x} + v_{0,y} + (h/2 + h_p)(w_{b,xx} + w_{b,yy} + f(z)(w_{s,xx} + w_{s,yy}))](z + h/2) & -h/2 - h_p \leq z \leq -h/2 \end{cases} \quad (14)$$

trong đó hệ số $C = 0$ với trường hợp ngắt mạch và $C = 1$ trong trường hợp mở mạch.

2.3. Phương trình chuyển động

Hệ phương trình chuyển động được thiết lập nhờ nguyên lý Hamilton và có dạng như sau [13]:

$$\begin{aligned}\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x}; \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v} - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y}; \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s; \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s\end{aligned}\quad (15)$$

trong đó (N_x, N_y, N_{xy}) và $(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b, M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$ là các thành phần lực màng và mô men uốn, xoắn của kết cấu tấm tổng thể. Các giá trị nội lực này được tính theo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \\ D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \\ H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{matrix} \right] \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^b \\ \kappa_y^b \\ \kappa_{xy}^b \\ \kappa_x^s \\ \kappa_y^s \\ \kappa_{xy}^s \end{pmatrix} \right\} - \left\{ \begin{pmatrix} N_x^p \\ N_y^p \\ N_{xy}^p \\ M_x^{pb} \\ M_y^{pb} \\ M_{xy}^{pb} \\ M_x^{ps} \\ M_y^{ps} \\ M_{xy}^{ps} \end{pmatrix} \right\} \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{pmatrix} \right\} = \left[\begin{matrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{matrix} \right] \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{pmatrix} \right\} - \left\{ \begin{pmatrix} Q_{yz}^p \\ Q_{xz}^p \end{pmatrix} \right\} \quad (17)$$

với các số hạng ma trận và nội lực sinh ra do hiệu ứng áp điện tính theo (18) và (19):

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) (\bar{Q}_{ij})_k dz; i, j = 1, 2, 6 \quad (18)$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} [1 - f'(z)]^2 (\bar{Q}_{ij})_k dz; i, j = 4, 5$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} N_x^p \\ N_y^p \\ N_{xy}^p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M_x^{pb} \\ M_y^{pb} \\ M_{xy}^{pb} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M_x^{ps} \\ M_y^{ps} \\ M_{xy}^{ps} \end{pmatrix} \right\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}^{(k)} (1, z, f(z)) dz \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} Q_{yz}^p \\ Q_{xz}^p \end{pmatrix} \right\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}^{(k)} [1 - f'(z)] dz;$$

các mô men quán tính $(I_0; I_1; J_1; I_2; J_2; K_2)$ của lớp vật liệu thứ k :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho^{(k)} dz \quad (20)$$

trong đó $\rho^{(k)}$ là khối lượng riêng lớp vật liệu thứ k .

Điện thế trong lớp áp điện thỏa mãn phương trình Maxwell ở dạng tích phân sau [11]:

$$\int_h^{h+h_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dz + \int_{-h-h_p}^{-h} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dz = \int_h^{h+h_p} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz + \int_{-h-h_p}^{-h} (D_{x,x} + D_{y,y} + D_{z,z}) dz = 0 \quad (21)$$

trong đó điện tích cảm ứng D được xác định theo (8).

2.4. Lời giải giải tích – nghiệm Navier

a. Tấm composite FG-CNTR cấu hình phản xứng vuông góc

Điều kiện biên khớp thứ nhất (SS-1) [10] của tấm composite có góc phương ống CNT đặt phản xứng vuông góc với nhau có dạng:

$$\text{- Tại } x = 0 \text{ và } x = a: v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (22a)$$

$$\text{- Tại } y = 0 \text{ và } y = b: u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad (22b)$$

Các nghiệm chuyển vị tại mặt trung bình của tấm (u_0, v_0, w_s, w_b) và nghiệm điện thế ϕ được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên SS-1:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y; v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y; \\ w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^b e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^s e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y; \\ \phi(x, y, t) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \phi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (23)$$

trong đó $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ và $u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}, \phi_{mn}$ là các hệ số cần xác định.

Thay (23) vào hệ các phương trình cân bằng động (15) và (21), ta thu được phương trình để giải, biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$[S]_{5 \times 5} - \omega^2 [M]_{5 \times 5} \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}^b, w_{mn}^s, \phi_{mn}\}^T = \{0\} \quad (24)$$

b. Tấm composite nhiều lớp CNT cấu hình phản xứng xiên góc

Điều kiện biên khớp thứ hai (SS-2) [10] cho tấm composite có góc phương ống CNT đặt phản xứng xiên góc với nhau có dạng:

$$\text{- Tại } x = 0 \text{ và } x = a: u_0 = w_b = w_s = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (25a)$$

$$\text{- Tại } y = 0 \text{ và } y = b: v_0 = w_b = w_s = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad (25b)$$

Các nghiệm chuyển vị tại mặt trung bình của tấm (u_0, v_0, w_s, w_b) và nghiệm điện thế ϕ được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên SS-2:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y; v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y; \\ w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^b \sin \alpha x \sin \beta y; w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^s \sin \alpha x \sin \beta y; \\ \phi(x, y, t) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \phi_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (26)$$

trong đó $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ và $u_{mn}, v_{mn}, w_{bmn}, w_{smn}, \phi_{mn}$ là các hệ số cần xác định.

Thay (26) vào hệ các phương trình cân bằng động (15) và (21), ta được phương trình để giải, biểu diễn dưới dạng ma trận tương tự như (24). Trong đó các hệ số ma trận s_{ij} và m_{ij} tương ứng với hai loại điều kiện biên khớp SS-1 và SS-2 được biểu diễn trong phụ lục.

3. Kết quả số và thảo luận

3.1. Kết quả kiểm chứng

Xét tấm composite lớp FG-CNTR có gắn lớp áp điện tại mặt trên và mặt dưới của tấm (Hình 1). Kích thước tấm $a \times b \times h = 0,4 \times 0,4 \times 0,1$ (m), các thuộc tính vật liệu được tham khảo theo nghiên cứu [8]. Vật liệu nền có: $E^m = (3,52 - 0,0034T)$ GPa, $\nu_m = 0,34$ và $\rho_m = 1,15$ g/cm³ tại nhiệt độ phòng 300°K. Vật liệu gia cường CNT có: $E_{11}^{CNT} = 5,64$ TPa, $E_{22}^{CNT} = 7,0800$ TPa, $G_{12}^{CNT} = 1,9455$ TPa, ν_{112}^{CNT}

Bảng 1. Tần số dao động riêng đầu tiên ω (Hz) của tấm vuông composite áp điện gia cường ống nano carbon với $b/h = 20$

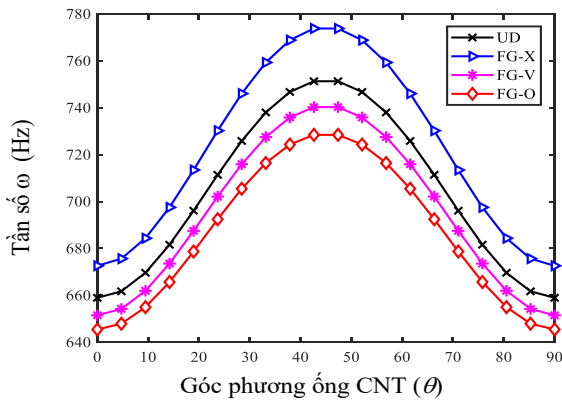
V_{CNT}^*	Kiểu phân bố CNT	Trạng thái mạch	Cấu hình composite					
			Đơn lớp ([p/0°/p])		[p/0°/90°/0°/p]		[p/[-45°/45°] ₃ /p]	
			Bài báo	[8]	Bài báo	[8]	Bài báo	[8]
0,12	UD	Ngắt	585,662	583,199	585,662	583,510	660,393	656,538
		Mở	620,147	627,416	626,752	627,716	690,219	695,085
	FG-X	Ngắt	624,801	622,009	590,429	588,372	662,498	658,696
		Mở	656,740	662,982	624,611	632,184	692,219	697,103
	FG-V	Ngắt	562,387	560,042	583,894	581,714	640,732	655,606
		Mở	598,644	606,518	618,597	626,205	701,425	694,272
	FG-O	Ngắt	542,966	540,558	580,992	578,737	658,425	654,510
		Mở	580,569	588,764	615,783	623,343	688,357	693,196
0,17	UD	Ngắt	626,947	623,946	626,947	624,543	725,136	720,800
		Mở	658,970	665,032	658,970	665,615	751,892	755,388
	FG-X	Ngắt	679,709	675,814	633,580	631,317	728,051	723,781
		Mở	708,739	713,079	665,242	671,913	754,695	758,217
	FG-V	Ngắt	593,790	591,216	624,368	621,914	720,494	719,594
		Mở	628,068	635,182	656,674	663,359	745,022	754,324
	FG-O	Ngắt	568,082	565,533	620,691	618,126	722,688	718,247
		Mở	603,987	611,599	653,084	659,687	749,563	752,995
0,28	UD	Ngắt	690,027	685,587	690,027	686,852	825,372	821,713
		Mở	718,318	721,919	718,318	723,150	847,721	850,524
	FG-X	Ngắt	764,565	757,950	700,165	697,260	830,078	826,415
		Mở	789,346	789,814	728,032	732,991	852,331	855,093
	FG-V	Ngắt	640,523	637,353	686,268	682,974	822,548	820,463
		Mở	671,734	677,399	714,944	719,788	844,538	849,465
	FG-O	Ngắt	604,001	601,032	681,486	677,986	822,723	818,750
		Mở	637,275	643,745	710,238	714,904	845,224	847,767

$= 0,175$ và $\rho^{CNT} = 1,4 \text{ g/cm}^3$. Với ba tỷ phần thể tích CNT, các tham số: $\eta_1 = 0,137$, $\eta_2 = 1,022$ và $\eta_3 = 0,7\eta_2$ cho trường hợp $V_{CNT}^* = 12\%$; $\eta_1 = 0,142$, $\eta_2 = 1,626$ và $\eta_3 = 0,7\eta_2$ khi $V_{CNT}^* = 17\%$; và $\eta_1 = 0,141$, $\eta_2 = 1,585$, $\eta_3 = 0,7\eta_2$ cho trường hợp $V_{CNT}^* = 28\%$. Mô đun cắt: $G_{13} = G_{12}$; $G_{23} = 1,2G_{12}$. Các lớp áp điện được làm từ PZT-5A với các đặc tính vật liệu [6]: $E = 63 \text{ GPa}$, $G = 23,3 \text{ GPa}$, $\nu = 0,35$, $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$, $e_{31} = e_{32} = -7,209 \text{ C/m}^2$, $e_{33} = 15,12 \text{ C/m}^2$, $e_{15} = e_{24} = 12,322 \text{ C/m}^2$, $p_{11} = p_{22} = 1,53 \times 10^{-8} \text{ F/m}$ và $p_{33} = 1,5 \times 10^{-8} \text{ F/m}$. Kết quả tính toán trình bày trong Bảng 1 được so sánh với kết quả của Nguyen và cs. [8] sử dụng phương pháp đẳng hình học, lý thuyết tấm bậc cao 5 ẩn chuyển vị.

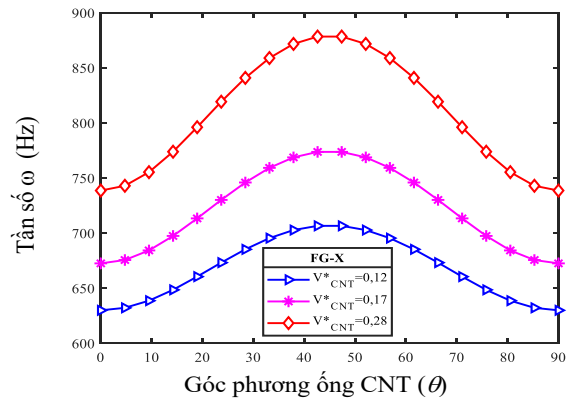
Kết quả tính toán trong Bảng 1 cho thấy sự sai khác so với nghiên cứu trong [8] là nhỏ (sai khác lớn nhất $\delta = (\omega_{\text{bài báo}} - \omega_{[7]})/\omega_{[7]} = 2,269\%$ cho trường hợp tấm cầu hình $[p/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_{as}$, FG-V, $V_{CNT}^* = 0,12$, trạng thái mạch ngắt), điều này khẳng định độ tin cậy của lý thuyết HSDT-4 và chương trình tính mà nhóm tác giả đã thiết lập. Với các thông số vật liệu như trong mục 3.1, các khảo sát số sẽ được thực hiện để đánh giá sự ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số kích thước tấm và độ dày lớp áp điện đến tần số dao động riêng của kết cấu tổng thể xét cho cả trường hợp điều kiện biên điện thế là mở mạch và ngắt mạch.

3.2. Khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố CNT

Kết quả khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố CNT đến tần số dao động riêng của tấm vuông FG-CNTR nhiều lớp có gắn lớp composite áp điện $[p/\theta^\circ/-\theta^\circ/p]$, tỷ số $a/h = 20$, $V_{CNT}^* = 17\%$ với các góc phương ống ($\theta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 90^\circ$) được thể hiện trong Hình 2. Xét bốn kiểu phân bố CNT theo chiều dày lớp composite (UD, FG-X, FG-V, FG-O), có thể thấy rằng các tấm FG-X có giá trị tần số cao nhất (tấm cứng nhất) và các tấm FG-O có giá trị tần số thấp nhất (tấm mềm nhất). Điều này có thể rút ra kết luận khi ống nano carbon được gia cường với mật độ nhiều hơn tại mặt trên và mặt dưới của các lớp sẽ làm cho tấm có độ cứng lớn hơn so với khi ống nano carbon được gia cường nhiều ở mặt giữa mỗi lớp. Trên đồ thị Hình 2 cũng cho thấy rằng khi thay đổi các giá trị của góc θ thì khi $\theta = 45^\circ$ tần số dao động riêng của tấm là lớn nhất.



Hình 2. Tần số ω theo góc phương ống CNT (θ) khi kiểu phân bố CNT thay đổi



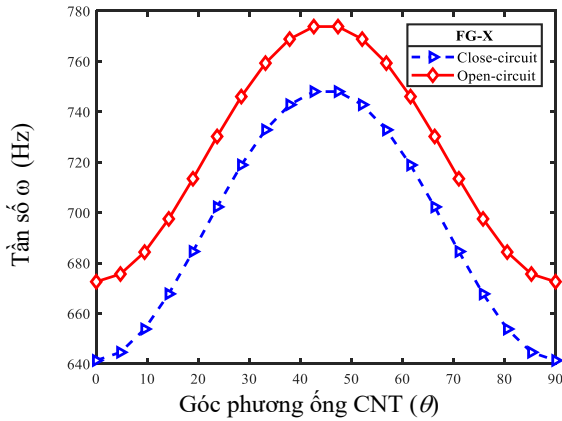
Hình 3. Tần số ω theo góc phương ống CNT (θ) khi V_{CNT}^* thay đổi

3.3. Khảo sát ảnh hưởng của sự phân bố CNT

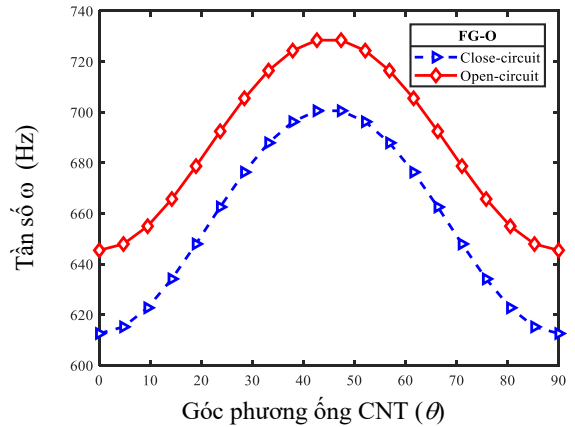
Hình 3 biểu diễn sự ảnh hưởng của tỷ phần thể tích (V_{CNT}^*) đến tần số dao động riêng của tấm composite áp điện gia cường CNT cấu hình $[p/\theta^\circ/-\theta^\circ/p]$, tỷ số $a/h = 20$. Với ba giá trị của V_{CNT}^* , đường đồ thị thể hiện khi V_{CNT}^* tăng lên thì tần số dao động của tấm tăng theo (tấm cứng hơn).

3.4. Khảo sát ảnh hưởng của trạng thái mạch

Đồ thị các Hình 4 và Hình 5 biểu diễn tần số dao động riêng của tấm composite áp điện gia cường CNT các kiểu phân bố FG-X (tấm cứng nhất) và FG-O (tấm mềm nhất) trong hai trường hợp mở mạch và ngắn mạch ($V_{CNT}^* = 17\%$). Kết quả cho thấy khi mở mạch (Open – circuit) tần số dao động riêng của tấm lớn hơn khi ngắn mạch (Close – circuit). Về ý nghĩa vật lý, do có hiệu ứng áp điện nên khi mở mạch, năng lượng điện được chuyển hóa thành năng lượng cơ học nên tấm có độ cứng lớn hơn (tần số lớn hơn), trong khi với mạch ngắn thì điện thế đã bị trung hòa do nối đất nên không xảy ra hiện tượng chuyển hóa điện năng thành cơ năng.



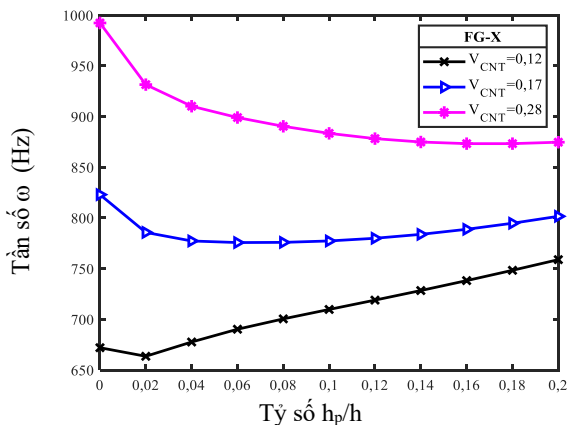
Hình 4. Tần số ω theo θ của tấm cấu hình FG-X khi trạng thái mạch thay đổi



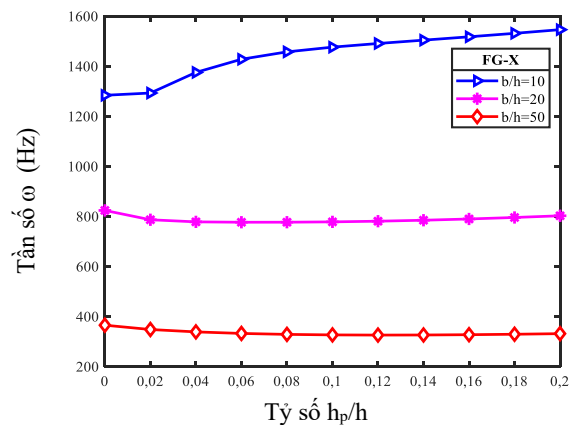
Hình 5. Tần số ω theo θ của tấm cấu hình FG-O khi trạng thái mạch thay đổi

3.5. Khảo sát ảnh hưởng của chiều dày lớp áp điện

Đồ thị các Hình 6 và Hình 7 biểu diễn ảnh hưởng của tỷ số h_p/h đến tần số dao động riêng của tấm (FG-X) với ba giá trị khác nhau của V_{CNT}^* và mạch ở trạng thái mở (Open – circuit). Đường đồ thị cho thấy có thể tìm được điểm cực tiểu của tần số khi h_p/h thay đổi và sau giá trị cực tiểu đó nếu tăng tỷ số h_p/h



Hình 6. Tần số ω của tấm [p/45°/-45°/p] theo tỷ số h_p/h khi V_{CNT}^* thay đổi



Hình 7. Tần số ω của tấm [p/45°/-45°/p] theo tỷ số h_p/h khi b/h thay đổi

thì tần số dao động của tấm tăng dần. Trong trường hợp mở mạch, với tấm dày $b/h = 10$ (Hình 7) khi tăng chiều dày lớp áp điện (tăng tỷ số h_p/h) sẽ làm tần số dao động riêng của kết cấu tổng thể tăng lên, ngược lại với tấm mỏng, do khối lượng riêng của vật liệu áp điện lớn nên việc gắn thêm các lớp vật liệu này có thể làm giảm tần số dao động của tấm.

4. Kết luận

Bài báo xây dựng lời giải giải tích theo lý thuyết bốn ẩn chuyển vị tính toán tần số dao động riêng của kết cấu tấm composite lớp gia cường bởi ống nano carbon có gắn các lớp áp điện tại mặt trên và mặt dưới. Nghiên cứu so sánh cho thấy lý thuyết bốn ẩn chuyển vị là đơn giản và hiệu quả trong phân tích dao động của kết cấu tấm. Kết quả số cũng chỉ ra ảnh hưởng của tỷ phần thể tích, kiểu phân bố ống nano carbon, góc đặt ống nano carbon, chiều dày lớp áp điện và điều kiện biên về điện tích ảnh hưởng đáng kể đến tần số hay độ cứng của tấm composite lớp gia cường bằng ống nano carbon có gắn các lớp áp điện. Cụ thể, tấm FG-X CNTRC có tần số dao động lớn nhất trong khi tấm FG-O CNTRC có tần số dao động nhỏ nhất. Khi góc đặt ống nano carbon bằng 45° cho kết quả tần số dao động lớn nhất. Do có sự chuyển hóa từ năng lượng điện sang năng lượng cơ học nên trường hợp mạch mở cho tần số lớn hơn trường hợp mạch ngắn.

Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của Đề tài thuộc chương trình khoa học và công nghệ cấp Bộ Giáo dục và đào tạo “Nghiên cứu giải pháp ứng dụng vật liệu thông minh, thân thiện môi trường trong kết cấu công trình thích ứng bối cảnh cuộc cách mạng công nghiệp 4.0”, mã số: CT.2019.03.04.

Tài liệu tham khảo

- [1] Shen, H.-S. (2009). [Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments](#). *Composite Structures*, 91(1):9–19.
- [2] Zhu, P., Lei, Z. X., Liew, K. M. (2012). [Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory](#). *Composite Structures*, 94(4):1450–1460.
- [3] Lei, Z. X., Liew, K. M., Yu, J. L. (2013). [Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Composite Structures*, 98:160–168.
- [4] Huang, B., Guo, Y., Wang, J., Du, J., Qian, Z., Ma, T., Yi, L. (2017). [Bending and free vibration analyses of antisymmetrically laminated carbon nanotube-reinforced functionally graded plates](#). *Journal of Composite Materials*, 51(22):3111–3125.
- [5] Tú, T. M., Quốc, T. H., Thẩm, V. V. (2018). [Phân tích tĩnh tấm composite có lớp áp điện theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao Reddy bằng phương pháp giải tích](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐH XD*, 12(4):40–50.
- [6] Kiani, Y. (2016). [Free vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers](#). *Computers & Mathematics with Applications*, 72(9):2433–2449.
- [7] Selim, B. A., Zhang, L. W., Liew, K. M. (2017). [Active vibration control of CNT-reinforced composite plates with piezoelectric layers based on Reddy's higher-order shear deformation theory](#). *Composite Structures*, 163:350–364.
- [8] Nguyen-Quang, K., Vo-Duy, T., Dang-Trung, H., Nguyen-Thoi, T. (2018). [An isogeometric approach for dynamic response of laminated FG-CNT reinforced composite plates integrated with piezoelectric layers](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332:25–46.

- [9] Shimpi, R. P., Patel, H. G. (2006). [Free vibrations of plate using two variable refined plate theory](#). *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5):979–999.
- [10] Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC Press.
- [11] Farsangi, M. A. A., Saidi, A. R. (2012). [Levy type solution for free vibration analysis of functionally graded rectangular plates with piezoelectric layers](#). *Smart Materials and Structures*, 21(9):094017.
- [12] Wu, N., Wang, Q., Quek, S. T. (2010). [Free vibration analysis of piezoelectric coupled circular plate with open circuit](#). *Journal of Sound and Vibration*, 329(8):1126–1136.
- [13] Thai, H.-T., Vo, T. P. (2013). A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates. *Applied mathematical modelling*, 37(5):3269–3281.

Phụ lục

Các hệ số s_{ij} và m_{ij} :

+ TH1: SS-1; ngắt mạch (closed circuit):

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= -2\bar{C}_{11}h_p\alpha^2 - (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12})h_p\beta^2 - A_{11}\alpha^2 - A_{66}\beta^2; s_{12} = -(\bar{C}_{11} + \bar{C}_{12})\alpha\beta h_p - (A_{12} + A_{66})\alpha\beta; \\
 s_{13} &= B_{11}\alpha^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2; s_{14} = 2\bar{C}_{11}\alpha^3 f(z)h_p + 2\bar{C}_{11}\alpha\beta^2 f(z)h_p + B_{11}^s\alpha^3 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha\beta^2; \\
 s_{15} &= 0; s_{22} = -(\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12})\alpha^2 h_p - 2\bar{C}_{11}\beta^2 h_p - A_{66}\alpha^2 - A_{22}\beta^2; s_{23} = B_{22}\beta^3 + (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta; \\
 s_{24} &= 2\bar{C}_{11}\alpha^2\beta f(z)h_p + 2\bar{C}_{11}\beta^3 f(z)h_p + B_{22}^s\beta^3 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha^2\beta; s_{25} = 0; \\
 s_{33} &= -D_{11}\alpha^4 - D_{22}\beta^4 - (2D_{12} + 4D_{66})\alpha^2\beta^2 - \left(2/3(h_p)^3 + h_c(h_p)^2 + 1/2(h_c)^2 h_p\right)\bar{C}_{11}\alpha^4 \\
 &\quad - \left(2/3(h_p)^3 - 1/2(h_c)^2 h_p - h_c(h_p)^2\right)\bar{C}_{11}\beta^4 - (4/3(h_p)^3 + 2h_c(h_p)^2 + (h_c)^2 h_p)\bar{C}_{11}\alpha^2\beta^2; \\
 s_{34} &= -D_{11}^s\alpha^4 - (2D_{12}^s + 4D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 - D_{22}^s\beta^4; s_{35} = 4/3\bar{e}_{31}h_p\alpha^2 + 4/3\bar{e}_{31}h_p\beta^2; \\
 s_{44} &= -2\bar{C}_{11}\alpha^4(f(z))^2 h_p - 4\bar{C}_{11}\alpha^2\beta^2(f(z))^2 h_p - 2\bar{C}_{11}\beta^4(f(z))^2 h_p - 2C_{55}\alpha^2 g(z)h_p - 2C_{55}\beta^2 g(z)h_p \\
 &\quad - H_{11}^s\alpha^4 - 2H_{12}^s\alpha^2\beta^2 - H_{22}^s\beta^4 - 4H_{66}^s\alpha^2\beta^2 - A_{44}^s\beta^2 - A_{55}^s\alpha^2; \\
 s_{45} &= 0; s_{21} = s_{12}; s_{31} = s_{13}; s_{32} = s_{23}; s_{41} = s_{14}; s_{42} = s_{24}; s_{43} = s_{34}; s_{51} = s_{15}; \\
 s_{52} &= s_{25}; s_{53} = s_{35}; s_{54} = s_{45}; s_{55} = 4/3h_p p_{11}\alpha^2 + 4/3h_p p_{22}\beta^2 + 16\frac{\bar{p}_{33}}{h_p}; \\
 m_{11} &= m_{22} = I_1; m_{13} = -I_2\alpha; m_{14} = -I_4\alpha; m_{23} = -I_2\beta; m_{24} = -I_4\beta; m_{31} = m_{13}; m_{32} = m_{23}; \\
 m_{33} &= I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2); m_{34} = I_1 + I_5(\alpha^2 + \beta^2); m_{41} = m_{14}; m_{42} = m_{24}; m_{43} = m_{34}; \\
 m_{44} &= I_1 + I_6(\alpha^2 + \beta^2); m_{12} = m_{21} = m_{15} = m_{51} = 0; m_{25} = m_{52} = m_{35} = m_{53} = m_{45} = m_{54} = 0.
 \end{aligned}$$

+ TH2: SS-2; ngắt mạch: (chỉ đưa ra các giá trị s_{ij} và m_{ij} thay đổi so với TH1: SS-1, ngắt mạch)

$$\begin{aligned}
 s_{13} &= 3B_{16}^s\alpha^2\beta + B_{26}\beta^3; s_{14} = 3B_{16}^s\alpha^2\beta + B_{26}^s\beta^3; \\
 s_{23} &= B_{16}\alpha^3 + 3B_{26}\alpha\beta^2; s_{24} = B_{16}^s\alpha^3 + 3B_{26}^s\alpha\beta^2 \\
 s_{25} &= 0; m_{13} = m_{14} = m_{23} = m_{24} = 0;
 \end{aligned}$$

+ TH3: SS-1; mở mạch (opened circuit): (chỉ đưa ra các giá trị s_{ij} và m_{ij} thay đổi so với TH1: SS-1, ngắt mạch)

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= h_p(\bar{C}_{12} - C_{11})\beta^2 - 2h_p(C_{11} + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{p_{33}})\alpha^2 - A_{66}\beta^2 - A_{11}\alpha^2; \\
 s_{12} &= -(A_{12} + A_{66})\alpha\beta - \left(\bar{C}_{11} + \bar{C}_{12} - 2\frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}}\right)\alpha\beta h_p;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{14} &= B_{11}^s \alpha^3 + B_{12}^s \alpha \beta^2 + 2B_{66}^s \alpha \beta^2 + 2\bar{C}_{11} \alpha^3 f(z) h_p \\
 &+ 2 \frac{\alpha^3 (\bar{e}_{31})^2 f(z) h_p}{\bar{p}_{33}} + 2\bar{C}_{11} \alpha \beta^2 f(z) h_p + 2 \frac{\alpha \beta^2 (\bar{e}_{31})^2 f(z) h_p}{\bar{p}_{33}}; \\
 s_{22} &= (\bar{C}_{12} - \bar{C}_{11}) \alpha^2 h_p - \left(\bar{C}_{11} + \frac{\beta^2 (\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) 2h_p \beta^2 - A_{66} \alpha^2 - A_{22} \beta^2; s_{24} = B_{22}^s \beta^3 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \alpha^2 \beta \\
 &+ 2 \left(\bar{C}_{11} + 2 \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) \beta^3 f(z) h_p + 2 \left(\bar{C}_{11} + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) \alpha^2 \beta f(z) h_p; \\
 s_{33} &= -D_{11} \alpha^4 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 - D_{22} \beta^4 - \left(2/3 \bar{C}_{11} (h_p)^3 + \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_p)^3}{\bar{p}_{33}} + \bar{C}_{11} h_c (h_p)^2 \right. \\
 &+ 1/2 \bar{C}_{11} (h_c)^2 h_p + 3/2 \frac{(\bar{e}_{31})^2 h_c (h_p)^2}{\bar{p}_{33}} + 1/2 \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_c)^2 h_p}{\bar{p}_{33}} \left. \right) \alpha^4 \\
 &- \left(4/3 \bar{C}_{11} (h_p)^3 + 2 \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_p)^3}{\bar{p}_{33}} + 2\bar{C}_{11} h_c (h_p)^2 + \bar{C}_{11} (h_c)^2 h_p + 3 \frac{(\bar{e}_{31})^2 h_c (h_p)^2}{\bar{p}_{33}} + \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_c)^2 h_p}{\bar{p}_{33}} \right) \alpha^2 \beta^2 \\
 &- \left(2/3 \bar{C}_{11} (h_p)^3 + \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_p)^3}{\bar{p}_{33}} + \bar{C}_{11} h_c (h_p)^2 + 1/2 \bar{C}_{11} (h_c)^2 h_p + 3/2 \frac{(\bar{e}_{31})^2 h_c (h_p)^2}{\bar{p}_{33}} + 1/2 \frac{(\bar{e}_{31})^2 (h_c)^2 h_p}{\bar{p}_{33}} \right) \beta^4; \\
 s_{35} &= -(\bar{e}_{31} h_c + 4/3 \bar{e}_{31} h_p) 4\alpha^2 - (\bar{e}_{31} h_c + 4/3 \bar{e}_{31} h_p) 4\beta^2; \\
 s_{44} &= -H_{11}^s \alpha^4 - H_{22}^s \beta^4 - (H_{12}^s + 2H_{66}^s) 2\alpha^2 \beta^2 - A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 \\
 &- \left(\bar{C}_{11} + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) 2(f(z))^2 h_p \alpha^4 - \left(\bar{C}_{11} + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) 2(f(z))^2 h_p \beta^4 \\
 &- \left(\bar{C}_{11} + \frac{(\bar{e}_{31})^2}{\bar{p}_{33}} \right) 4h_p (f(z))^2 \alpha^2 \beta^2 - 2C_{55} g(z) h_p \alpha^2 - 2C_{55} g(z) h_p \beta^2; \\
 s_{55} &= 16/3 h_p p_{11} \alpha^2 + 16/3 h_p p_{22} \beta^2 + 16 \frac{\bar{p}_{33}}{h_p}
 \end{aligned}$$

+ TH4: SS-2; mở mạch: (chỉ đưa ra các giá trị s_{ij} và m_{ij} thay đổi so với TH3: SS-1, mở mạch)

$$\begin{aligned}
 s_{13} &= 3B_{16}^s \alpha^2 \beta + B_{26} \beta^3; s_{14} = 3B_{16}^s \alpha^2 \beta + B_{26}^s \beta^3; \\
 s_{23} &= B_{16} \alpha^3 + 3B_{26} \alpha \beta^2; s_{24} = B_{16}^s \alpha^3 + 3B_{26}^s \alpha \beta^2; \\
 s_{25} &= 0; m_{13} = m_{14} = m_{23} = m_{24} = 0;
 \end{aligned}$$