

PHÂN TÍCH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA VỎ TRỤ TRÒN LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN CÓ GÂN GIA CƯỜNG

Nguyễn Văn Lợi^{a,*}, Trần Bình Định^a, Chu Thanh Bình^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Nhận ngày 29/06/2018, Sửa xong 18/07/2018, Chấp nhận đăng 28/09/2018

Tóm tắt

Bài báo này trình bày lời giải giải tích cho bài toán dao động riêng của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) có gân gia cường trực giao, có biên tựa khớp ở hai đầu vỏ. Trong đó, tính chất vật liệu được giả thiết là biến thiên theo phương chiều dày của vỏ theo quy luật hàm lũy thừa. Mục đích chính của nghiên cứu này là trình bày một phương pháp đơn giản để giải bài toán dao động riêng vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường. Hơn nữa, mặc dù kết cấu này có tính ứng dụng cao, tuy nhiên có rất ít nghiên cứu liên quan đến dao động riêng của vỏ trụ tròn có gân gia cường trực giao, do đó nghiên cứu về loại kết cấu này là cần thiết. Dựa trên lý thuyết vỏ Love, kỹ thuật san đều tác dụng gân, cùng với việc áp dụng nguyên lý Hamilton, phương trình chuyển động của vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường được thiết lập. Kế tiếp, lời giải Navier được sử dụng để giải bài toán dao động tự do của vỏ trụ tròn FGM có gia cường biên tựa khớp. Ngoài ra, trong bài báo, một số ảnh hưởng của các tham số như chỉ số tỷ lệ thể tích vật liệu, kích thước gân, tỷ số chiều dài trên bán kính vỏ và tỷ số chiều dày trên bán kính vỏ cũng đã được khảo sát. Cuối cùng, một số nhận xét hữu ích cho các chủ đề liên quan đến kết cấu vỏ trụ tròn FGM gia cường cũng đã được đưa ra.

Từ khoá: phân tích dao động riêng; vỏ trụ tròn FGM có gân; lý thuyết vỏ Love.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELL WITH STIFFENERS

Abstract

In this study, an analytical solution for the free vibration of orthogonally stiffened functionally graded circular cylindrical shell with the simply supported boundary conditions at both of ends is presented. Here, the material properties are assumed to be graded in the thickness direction of shell according to the simple power-law distribution. The purpose of this study is to show a simple approach in solving the problem on free vibration of the stiffened FG cylindrical shell. Moreover, despite the high applicability of this structure, there are also very few researches related to the stiffened FG cylindrical shell with orthogonal stiffeners, so the study on this type of structure is essential. Based on Love's shell theory, the smearing stiffener technique, by applying the Hamilton's principle, the motion equation of stiffened FG cylindrical shell is developed. Next, Navier's solution is also used to solve the problem on the free vibration of simply supported stiffened FG cylindrical shell. Besides, in this paper, the influences of parameters such as power-law index, the dimension of stiffeners, the shell's length – to – radius ratio and the shell's height – to – radius ratio on the natural fundamental frequency of stiffened FG circular cylindrical shell are investigated. Finally, some useful comments for the relevant subjects on the stiffened FG circular cylindrical shells are also given.

Keywords: free vibration analysis; stiffened FG cylindrical shell, Love's shell theory.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12\(6\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12(6)-03) © 2018 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: loinv@nuce.edu.vn (Lợi, N. V.)

1. Giới thiệu

Kết cấu dạng tấm, vỏ là một trong những dạng kết cấu quan trọng trong kỹ thuật, đặc biệt trong các lĩnh vực như: công trình dân dụng, công nghiệp, hàng không, vũ trụ, đóng tàu, ... Tính toán kết cấu dạng này luôn chiếm được nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Cho đến nay đã có nhiều nghiên cứu về dao động của tấm và vỏ đã được công bố. Các nghiên cứu chuyên sâu về dao động vỏ bằng vật liệu đẳng hướng, được tìm thấy trong các tài liệu [1, 2]. Có thể thấy, một loạt các nghiên cứu về dao động vỏ trụ không gân gia cường đã được nhiều tác giả công bố, chẳng hạn như trong các công trình nghiên cứu [3–6].

Các nghiên cứu về vỏ trụ tròn đẳng hướng có gân gia cường có thể tìm thấy trong các công bố [7–11]. Ở giai đoạn sau, khi vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được ứng dụng, dao động vỏ trụ tròn làm bằng loại vật liệu FGM tiếp tục dành được sự quan tâm lớn của các nhà nghiên cứu. Đáng chú ý là các tác giả [12, 13], họ đã công bố các công trình nghiên cứu về vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu FGM khá sớm.

Những năm gần đây, có một số tác giả đã công bố các bài báo về vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu FGM có gân gia cường vòng như các tác giả [14, 15]. Một hướng nữa là phân tích dao động vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường và quay như trong các nghiên cứu [16–18]. Trong bài báo này, tác giả tập trung vào phân tích dao động của vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường trục giao (cả gân vòng và dọc) bằng việc sử dụng kỹ thuật san đều tác dụng gân Lekhnitskii, và áp dụng lời giải Navier cho bài toán vỏ trụ tròn có biên tựa khớp tại hai đầu. Trên cơ sở đó, tác giả so sánh kết quả bài báo với một số công bố khác và ngoài ra tác giả cũng tiến hành khảo sát các ảnh hưởng của chỉ số thể tích vật liệu cũng như một số tham số kích thước vỏ, gân đến tần số dao động của vỏ.

2. Cơ sở lý thuyết

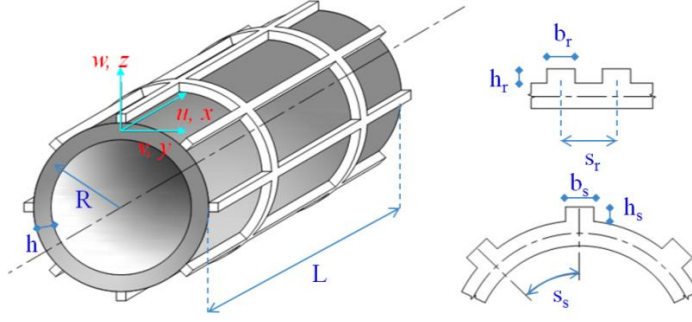
Xét vỏ trụ tròn có bán kính R , chiều dày h , chiều dài L với hệ tọa độ trụ (x, θ, z) làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên được gia cường bởi các gân vòng và gân dọc như Hình 1. Kích thước và khoảng cách giữa các gân dọc được ký hiệu bởi chỉ số s , của các gân vòng được ký hiệu bởi chỉ số r . Chiều cao và bề rộng gân dọc (hoặc vòng) được ký hiệu là h_s (hoặc h_r) và b_s (hoặc b_r). Khoảng cách giữa các gân dọc và giữa các gân vòng lần lượt là s_s và s_r . Mô đun đàn hồi, khối lượng riêng, hệ số Poisson của vỏ FGM giả thiết biến thiên theo qui luật hàm lũy thừa như sau [13]:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_1 - E_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_2 \\ \rho(z) &= (\rho_1 - \rho_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_2 \\ \nu(z) &= (\nu_1 - \nu_2) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \nu_2 \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó p là chỉ số tỉ lệ thể tích; E_1, ρ_1, ν_1 : là mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson của vật liệu ở mặt ngoài của vỏ. E_2, ρ_2, ν_2 : là mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson của vật liệu ở mặt trong của vỏ.

Theo lý thuyết vỏ Love, tài liệu [6], trường biến dạng như sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (2)$$



Hình 1. Hệ tọa độ và dạng hình học của vỏ trụ tròn FGM có gân gia cường

trong đó $\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$; $\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$; $\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0 \right)$; $\kappa_\theta = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)$; $\gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}$; $\kappa_{x\theta} = \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$; với u_0, v_0, w_0 là chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của vỏ.

Đối với vật liệu FGM, ta có quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

trong đó $Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}$; $Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}$; $Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu^2(z)}$; $Q_{66} = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} = G(z)$.

Dựa trên kỹ thuật san đều tác dụng gân Lekhnitskii, bỏ qua thành phần xoắn của gân, ta đạt được biểu thức của các thành phần ứng lực của vỏ trụ tròn có gân gia cường như sau, theo [16, 19, 20]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & 0 \\ A'_{12} & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & 0 \\ B'_{12} & B'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & 0 \\ B'_{12} & B'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & 0 \\ D'_{12} & D'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

trong đó

$$\begin{aligned} A'_{11} &= A_{11} + \frac{E_s A_s}{s_s}; & B'_{11} &= B_{11} + \frac{E_s A_s z_s}{s_s}; & D'_{11} &= D_{11} + \frac{E_s I_s}{s_s} \\ A'_{12} &= A_{12}; & B'_{12} &= B_{12}; & D'_{12} &= D_{12} \\ A'_{22} &= A_{22} + \frac{E_r A_r}{s_r}; & B'_{22} &= B_{22} + \frac{E_r A_r z_r}{s_r}; & D'_{22} &= D_{22} + \frac{E_r I_r}{s_r} \\ A'_{66} &= A_{66}; & B'_{66} &= B_{66}; & D'_{66} &= D_{66} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} dz; & B_{11} = B_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} z dz; & D_{11} = D_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} z^2 dz \\
 A_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu^2(z)} dz; & B_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu^2(z)} z dz; & D_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu^2(z)} z^2 dz \\
 A_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} dz; & B_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} z dz; & D_{66} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} z^2 dz \\
 I_s &= \frac{b_s h_s^3}{12} + A_s z_s^2; & I_r &= \frac{b_r h_r^3}{12} + A_r z_r^2; & z_s &= \pm \frac{h_s + h}{2}; & z_r &= \pm \frac{h_r + h}{2}
 \end{aligned}$$

ở đây, khoảng cách từ mặt trung bình của vỏ đến trọng tâm của gân dọc và gân vòng tương ứng là z_s và z_r . Diện tích mặt cắt ngang của gân dọc và gân vòng tương ứng là A_s và A_r . Mô đun đàn hồi, mô đun đàn hồi trượt của gân dọc và của gân vòng lần lượt là E_s, G_s và E_r, G_r .

Phương trình chuyển động của vỏ trụ tròn biểu diễn theo các thành phần ứng lực, theo [6], có dạng:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} &= J_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= J_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} &= J_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

trong đó, mô men quán tính $J_0 = \left(\rho_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{p + 1} \right) h + \frac{\rho_s A_s}{s_s} + \frac{\rho_r A_r}{s_r}$.

3. Lời giải giải tích

Thế phương trình (4)–(5) với biểu thức của phương trình (2)–(3) vào phương trình (6) ta được phương trình chuyển động của vỏ viết theo các thành phần chuyển vị:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

ở đây, các toán tử L_{ij} là toán tử vi phân của các biến x, θ, t .

Trong bài báo này, tác giả chỉ tiến hành phân tích dao động của vỏ trụ tròn có biên tựa khớp tại hai đầu, điều kiện biên có dạng:

$$v = w = N_x = M_x = 0|_{x=0,L} \tag{8}$$

Để phân tích dao động của vỏ trụ tròn thỏa mãn điều kiện biên (8) nêu trên, theo [12], ta chọn trường chuyển vị có dạng:

$$\begin{aligned}
 u(x, \theta, t) &= A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\
 v(x, \theta, t) &= B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\
 w(x, \theta, t) &= C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{9}$$

trong đó A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} là biên độ chuyển vị theo mỗi phương; m và n là số nguyên và tương ứng là số sóng theo phương dọc trục và phương vòng.

Để giải ra tần số dao động của vỏ trụ tròn, ta thế trường chuyển vị (9) vào phương trình (7), kết quả đạt được có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$([K]_{3 \times 3} - \omega^2 [M]_{3 \times 3}) \{\Delta\}_{3 \times 1} = \{0\} \quad (10)$$

trong đó $\{\Delta\}_{3 \times 1} = \{u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}\}^T$, các hệ số K_{ij} và M_{ij} được xác định bằng phần mềm MATLAB. Giải bài toán trị riêng của hệ (10) ta tìm được tần số dao động riêng ω_{mn} và dạng dao động tương ứng $\{\Delta\}$.

4. Kết quả số và thảo luận

Trong các ví dụ kiểm chứng và khảo sát sau đây, các kích thước hình học và thuộc tính vật liệu của vỏ và gân được cho theo Bảng 1.

Bảng 1. Thông số vật liệu và kích thước hình học vỏ trụ tròn có gân gia cường

Thuộc tính	Kích thước					
	Loại gân	Gân dọc	Gân vòng	Gân dọc	Gân vòng/dọc	Không gân gia cường
Mô hình		M1	M2	M3	M4	M5
Số gân		60	19	04	13/20	05/05 (15/15)
Bán kính vỏ (m)		0,242	0,49759	0,1945	0,203	1
Chiều dày vỏ (m)		6,50E-04	1,65E-03	4,64E-04	2,04E-03	0,05
Chiều dài vỏ (m)		0,6096	0,3945	0,9868	0,813	20
Chiều cao gân (m)		0,00702	0,005334	0,0101	0,006/0,006	0,006/0,006
Bề rộng gân (m)		0,002554	0,003175	0,00104	0,004/0,008	0,002/0,002
E (N/m ²)		6,9E+10	6,9E+10	2,00E+11	2,07E+11	2,00E+11
ν		0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
ρ (kg/m ³)		2714	2762	7770	7430	5700
E_1 (N/m ²)						2,07788E+11
ν_1						0,317756
ρ_1 (kg/m ³)						8166
E_2 (N/m ²)						2,05098E+11
ν_2						0,31
ρ_2 (kg/m ³)						8900
Kiểu gia cường		Gân ngoài	Gân ngoài	Gân trong	Gân trong	Gân ngoài

4.1. Kiểm chứng kết quả

Thứ nhất, để kiểm chứng vỏ trụ tròn đẳng hướng có gân, tác giả tiến hành so sánh kết quả bài báo với kết quả của nhóm tác giả [10] với các thông số vật liệu là mô hình M1, M2, M3 và M4 theo Bảng 1. Kết quả so sánh này được trình bày trong Bảng 2, ta thấy sai lệch lớn nhất về tần số dao động riêng giữa kết quả bài báo với nhóm tác giả [10] chỉ là 1,97% ở mô hình M3 với $(m, n) = (1, 4)$.

Bảng 2. Tần số dao động của vỏ trụ tròn đẳng hướng có gân gia cường

Số mode		Tần số dao động riêng (Hz)											
		M1 (gân dọc)			M2 (gân vòng)			M3 (gân dọc)			M4 (gân trực giao)		
<i>m</i>	<i>n</i>	[10]	Tác giả	Sai số %	[10]	Tác giả	Sai số %	[10]	Tác giả	Sai số %	[10]	Tác giả	Sai số %
1	1	1141	1143,1	0,19	1204	1225,4	1,78	778	778,1	0,01	942	936,3	0,61
	2	674	672,3	0,25	1587	1596,7	0,61	317	317,2	0,07	439	436,8	0,50
	3	427	425,3	0,39	4462	4476,2	0,32	159	159,3	0,20	337	331,0	1,79
	4	296	294,5	0,50	8559	8593,7	0,41	99,6	101,6	1,97	482	477,5	0,94
	5	225	223,3	0,77	13780	13874,3	0,68	91,5	91,4	0,14	740	739,7	0,03

Tiếp theo, tác giả so sánh tần số của vỏ trụ tròn không gân gia cường làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên FGM, mô hình M5, với kết quả của nhóm tác giả [12]. Kết quả đạt được là khá tốt (sai số lớn nhất chỉ là 0,27%, ở trường hợp $p = 30$), được thể hiện trong Bảng 3.

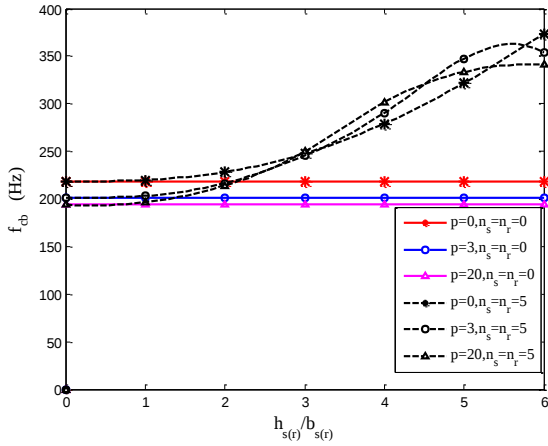
Bảng 3. Tần số dao động của vỏ trụ tròn FGM không gân

Số mode		Tần số dao động riêng (Hz)								
		$p = 0$			$p = 1$			$p = 30$		
<i>m</i>	<i>n</i>	[12]	Tác giả	Sai số %	[12]	Tác giả	Sai số %	[12]	Tác giả	Sai số %
1	1	13,572	13,548	0,17	13,235	13,212	0,17	12,937	12,915	0,17
	2	33,296	33,268	0,08	32,430	32,402	0,08	31,730	31,645	0,27
	3	93,001	92,985	0,02	90,553	90,538	0,02	88,614	88,438	0,20
	4	178,06	178,04	0,01	173,36	173,35	0,01	169,66	169,33	0,19
	5	287,79	287,77	0,01	280,20	280,18	0,01	274,21	273,69	0,19

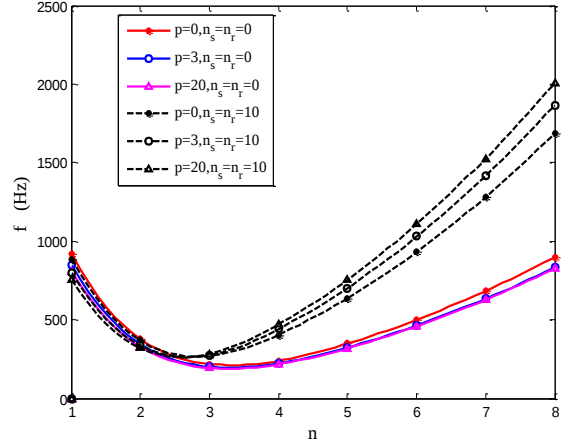
Từ các kết quả kiểm chứng ở trên, ta có thể thấy rằng sai lệch tương đối bé khi so sánh với các tác giả khác [10, 12]. Như vậy, chương trình tính toán là đáng tin cậy.

4.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số

Các khảo sát về tần số đều được thực hiện cho vỏ trụ tròn có các thông số vật liệu và kích thước vỏ như mô hình M6, Bảng 1. Hình 2 thể hiện sự thay đổi của tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn theo tỷ số chiều cao gân/bề rộng gân $h_{s(r)}/b_{s(r)}$, vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên với chỉ số thể tích $p = 0$, $p = 3$ và $p = 20$; kích thước vỏ là $h = 0,002$ m, $R/h = 100$, $L/R = 5$, các số liệu khác như trong Bảng 1, mô hình M6. Trên hình cũng thể hiện kết quả cho hai trường hợp là vỏ không gân và vỏ trụ tròn có 5 gân vòng/5 gân dọc trực giao. Từ kết quả Hình 2, ta thấy ở trường hợp vỏ không có gân gia cường, khi chỉ số thể tích $p = 0$ thì vỏ có tần số lớn nhất. Trong khi đó, ở trường hợp vỏ có gân gia cường, khi tăng tỷ số chiều cao gân ta thấy có sự biến động về tần số cơ bản, tần số không còn lớn nhất khi $p = 0$.

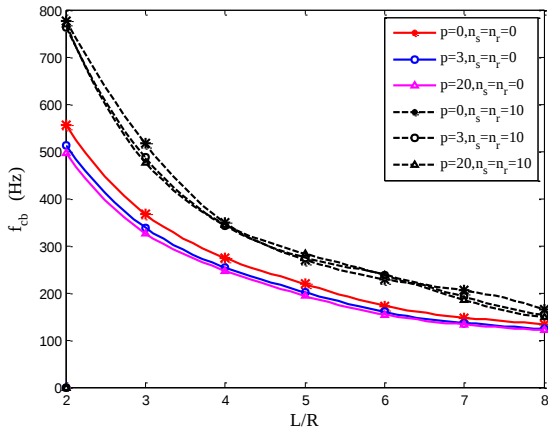


Hình 2. Ảnh hưởng của tỷ số $h_{s(r)}/b_{s(r)}$ đến tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn

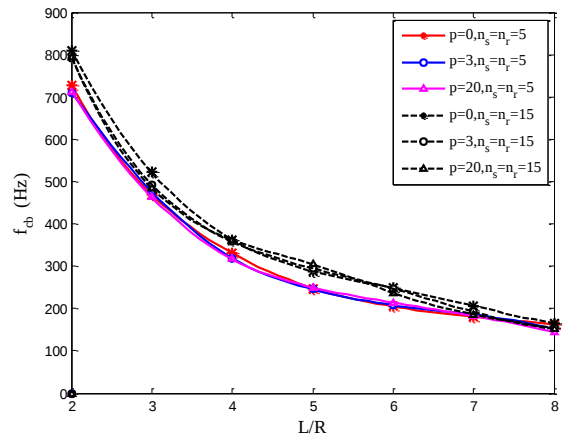


Hình 3. Biến thiên tần số dao động riêng của vỏ theo số sóng phương vòng n

Hình 3 thể hiện sự thay đổi của tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn có gân gia cường theo số sóng phương vòng n , vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biên thiên với chỉ số thể tích $p = 0, p = 3$ và $p = 20$. Từ kết quả Hình 3, ta thấy ở trường hợp này, đa phần là tần số dao động của vỏ có gân hơn sẽ cao hơn tần số của vỏ không gân gia cường, tuy nhiên không phải là trên toàn bộ miền khảo sát.



(a) $n_s = n_r = 0; 10$



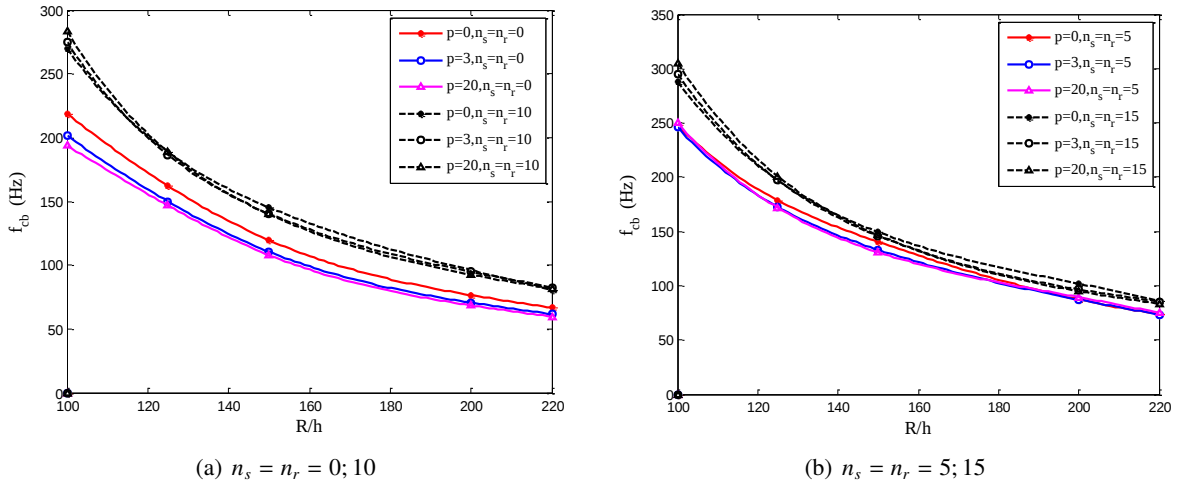
(b) $n_s = n_r = 5; 15$

Hình 4. Ảnh hưởng của tỷ số L/R đến tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn

Hình 4 thể hiện sự thay đổi của tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn có gân gia cường theo tỷ số chiều dài/bán kính của vỏ L/R , vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biên thiên với chỉ số thể tích $p = 0, p = 3$ và $p = 20$; có kích thước vỏ $h = 0,002$ m, $R/h = 100$, các số liệu khác như trong Bảng 1, mô hình M6. Trên Hình 4 cũng thể hiện kết quả cho trường hợp không gân gia cường và các trường hợp vỏ có gân gia cường trực giao.

Hình 5 thể hiện sự thay đổi của tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn có gân gia cường trực giao theo tỷ số bán kính/chiều dày của vỏ R/h , vỏ làm bằng vật liệu có cơ tính biên thiên với chỉ số thể tích $p = 0, p = 3$ và $p = 20$; có kích thước vỏ $h = 0,002$ m, $L/R = 5$.

Từ kết quả Hình 4(a) và 5(a) cho thấy, mô hình M6, vỏ trụ tròn không gân, thì tần số dao động cơ



Hình 5. Ảnh hưởng của tỷ số R/h đến tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn

bản của trường hợp $p = 0$ là lớn nhất, chỉ số thể tích lớn hơn thì có tần số bé hơn, điều này ổn định trên miền khảo sát. Tuy nhiên ở Hình 4(a) và 5(a), Hình 4(b) và 5(b), cũng cho thấy rằng khi khảo sát theo tỷ số L/R (R/h) thì ở trường hợp có gân gia cường kết quả tần số cơ bản của vỏ trụ tròn có nhiều biến động, không ổn định.

5. Kết luận

Bài báo đã xây dựng lời giải giải tích để tính toán tần số dao động riêng của vỏ trụ tròn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên FGM có gân gia cường. Qua các khảo sát ở trên, ta có thể thấy:

- Ảnh hưởng của kích thước vỏ trụ tròn và gân gia cường mạnh hơn ảnh hưởng chỉ số thể tích vật liệu đến tần số dao động cơ bản của vỏ trụ tròn;
- Tần số dao động cơ bản của vỏ FGM có gân gia cường thường không ổn định so với vỏ trụ tròn FGM không gân. Do đó, việc tăng số lượng gân, chiều cao gân không phải lúc nào cũng đạt được sự hiệu quả trong việc tăng tần số, độ cứng của vỏ trụ tròn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Leissa, A. W. (1973). *Vibration of shells*. Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration Washington.
- [2] Soedel, W. (2004). *Vibrations of shells and plates*. CRC Press.
- [3] Arnold, R. N., Warburton, G. B. (1949). [Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends](#). *Proc. R. Soc. Lond. A*, 197(1049):238–256.
- [4] Chung, H. (1981). [Free vibration analysis of circular cylindrical shells](#). *Journal of Sound and Vibration*, 74(3):331–350.
- [5] Soldatos, K. P., Hadjigeorgiou, V. P. (1990). [Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels](#). *Journal of Sound and Vibration*, 137(3):369–384.
- [6] Loy, C. T., Lam, K. Y., Shu, C. (1997). [Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature](#). *Shock and Vibration*, 4(3):193–198.
- [7] Hoppmann, W. H. (1958). [Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells](#). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(1):77–82.
- [8] Egle, D. M., Sewall, J. L. (1968). [An analysis of free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells with stiffeners treated as discrete elements](#). *AIAA Journal*, 6(3):518–526.

- [9] Rinehart, S. A., Wang, J. T. S. (1972). [Vibration of simply supported cylindrical shells with longitudinal stiffeners](#). *Journal of Sound and Vibration*, 24(2):151–163.
- [10] Mustafa, B. A. J., Ali, R. (1989). [An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells](#). *Computers & Structures*, 32(2):355–363.
- [11] Tú, T. M., Lợi, N. V. (2015). [Phân tích dao động riêng của panel trụ và vỏ trụ tròn bằng phương pháp giải tích](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng*, 9(3):31–36.
- [12] Loy, C. T., Lam, K. Y., Reddy, J. N. (1999). [Vibration of functionally graded cylindrical shells](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 41(3):309–324.
- [13] Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., Reddy, J. N. (2000). [Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions](#). *Applied Acoustics*, 61(1):111–129.
- [14] Sheng, G. G., Wang, X. (2007). [Effects of thermal loading on the buckling and vibration of ring-stiffened functionally graded shell](#). *Journal of Thermal Stresses*, 30(12):1249–1267.
- [15] Naeem, M. N., Kanwal, S., Shah, A. G., Arshad, S. H., Mahmood, T. (2012). [Vibration characteristics of ring-stiffened functionally graded circular cylindrical shells](#). *ISRN Mechanical Engineering*, 2012:1–13.
- [16] Tú, T. M., Lợi, N. V. (2016). [Vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells with orthogonal stiffeners](#). *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(15):2952–2969.
- [17] Tú, T. M., Lợi, N. V. (2017). [Free vibration of rotating functionally graded material cylindrical shells with orthogonal stiffeners](#). *Design, Manufacturing and Applications of Composites*, 212–219.
- [18] Talebitooti, M., Daneshjou, K., Talebitooti, R. (2013). [Vibration and critical speed of orthogonally stiffened rotating FG cylindrical shell under thermo-mechanical loads using differential quadrature method](#). *Journal of Thermal Stresses*, 36(2):160–188.
- [19] Bich, D. H., Dung, D. V., Nam, V. H. (2012). [Nonlinear dynamical analysis of eccentrically stiffened functionally graded cylindrical panels](#). *Composite Structures*, 94(8):2465–2473.
- [20] Najafizadeh, M. M., Hasani, A., Khazaeinejad, P. (2009). [Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells](#). *Applied Mathematical Modelling*, 33(2):1151–1157.