

PHÂN TÍCH TĨNH TÂM COMPOSITE CÓ LỚP ÁP ĐIỆN THEO LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO REDDY BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Trần Minh Tú^{a,*}, Trần Hữu Quốc^a, Vũ Văn Thắm^a

^a*Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng,
55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam*

Lịch sử bài viết:

Nhận ngày 5/12/2017, Sửa xong 11/5/2018, Chấp nhận đăng 30/5/2018

Tóm tắt

Bài báo thiết lập lời giải giải tích phân tích tĩnh tâm composite lớp cấu hình phản xứng vuông góc có gắn lớp kích thích áp điện, chịu tác dụng đồng thời của tải cơ học và điện trường. Lý thuyết tâm biến dạng cắt bậc cao của Reddy được sử dụng để khảo sát ứng xử uốn của tấm composite áp điện. Điện thế áp đặt được giả thiết biến đổi tuyến tính theo chiều dày của lớp áp điện. Kết quả được so sánh với lý thuyết bậc cao 12 ẩn chuyển vị và với lời giải chính xác và cho thấy sự tương đồng với kết quả của các tác giả khác đã công bố.

Từ khóa: tấm composite lớp; áp điện; phân tích tĩnh; lý thuyết tâm Reddy; phương pháp giải tích.

ANALYTICAL SOLUTIONS FOR THE STATIC ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES WITH PIEZOELECTRIC LAYERS BASED ON REDDY'S HIGHER-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Abstract

An analytical solution for static analysis of cross-ply composite laminates integrated with piezoelectric fiber-reinforced composite (PFRC) actuators under electro-mechanical loadings is presented in this paper. Reddy's higher-order shear deformation theory is used to analyze the bending behavior of the hybrid laminates. The electro-static potential is assumed to be linear through the thickness of PFRC. Results are compared with 12-unknown higher-order shear deformation theory and exact solution. It is found that there is good agreement among the present results with those obtained by other authors.

Keywords: composite plate; piezoelectric; TSDT theory; PFRC actuator; electromechanical loading; analytical solution.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12\(4\)-05](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2018-12(4)-05) © 2018 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

1. Giới thiệu

Vật liệu áp điện là loại vật liệu có khả năng tự thay đổi hình dạng, kích thước khi đặt chúng dưới tác động của điện trường (trạng thái kích) hoặc tự sinh ra điện trường khi chúng bị biến dạng (trạng thái cảm biến). Tính tương tác giữa trường biến dạng và trường điện sẽ tạo nên hiệu ứng cảm biến hoặc hiệu ứng kích thích tùy thuộc mục đích điều khiển của người sử dụng. Kết cấu composite lớp có gắn lớp áp điện được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp hàng không, giao thông vận tải và nhiều lĩnh vực kỹ thuật khác, thường chịu tác dụng đồng thời của điện trường, nhiệt độ và tải trọng cơ học.

*Tác giả chính. Địa chỉ e-mail: tpnt2002@yahoo.com (Tú, T. M.)

Các nghiên cứu về kết cấu composite có gắn lớp áp điện thường sử dụng các tiếp cận theo: lý thuyết đơn lớp tương đương, lý thuyết nhiều lớp liên tiếp, lý thuyết zigzag, lý thuyết lớp rời rạc. Lời giải giải tích về phân tích tĩnh và động các kết cấu composite lớp hỗn hợp này đã được khá nhiều tác giả công bố trong thời gian gần đây. Lee [1] tính toán biến dạng uốn và xoắn của tấm composite áp điện dưới tác dụng của trường điện theo lý thuyết tấm cổ điển (CLPT). Wang và Rogers [2] thiết lập lời giải giải tích cho tấm mỏng composite có lớp bề mặt là vật liệu áp điện. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Jonnalagadda và cs. [3] phân tích tĩnh tấm composite có lớp áp điện dưới tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt-điện. Mitchell và Reddy [4] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao tính toán độ võng do tải cơ học của tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp. Shiyekar và Kant trong [5] đã tính toán kết cấu tấm composite có gắn lớp áp điện theo lý thuyết tấm bậc cao 12 ẩn số, kết quả số được so sánh với nghiệm chính xác [6]. Các kết quả nghiên cứu trong nước về kết cấu tấm, vỏ composite có lớp áp điện chủ yếu sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn [7–9].

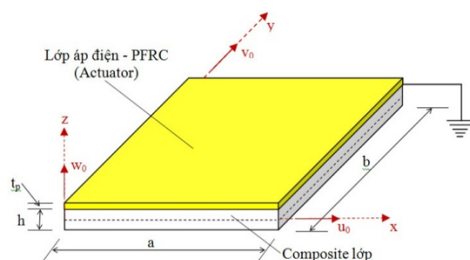
Lý thuyết tấm cổ điển chỉ phù hợp với tấm mỏng, với tấm dày các lý thuyết biến dạng cắt đã được phát triển theo nhiều giả thiết khác nhau. Nhược điểm chung của các lý thuyết này là không thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp theo phương chiều dày bằng không tại mặt trên và dưới của tấm. Để khắc phục nhược điểm này Reddy [10] đã đề xuất lý thuyết biến dạng cắt bậc ba dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao không đầy đủ với 9 ẩn số chuyển vị đồng thời thỏa mãn điều kiện ứng suất tiếp triệt tiêu tại mặt trên và dưới của tấm. Lý thuyết này đã được nhiều tác giả sử dụng để tính toán kết cấu composite lớp.

Có nhiều phương pháp tính toán được sử dụng trong tính toán kết cấu composite nói chung và kết cấu composite lớp có gắn lớp áp điện nói riêng. Phương pháp số với lợi thế giải quyết được những bài toán phức tạp với hình dạng, điều kiện biên khác nhau, cấu hình bất kỳ, ... Tuy nhiên tiếp cận giải tích vẫn là một trong những lựa chọn tin cậy khi cho lời giải dạng hiển có thể dự đoán được quy luật ứng xử cũng như kết quả số có thể kiểm soát được, mặc dù chỉ hạn chế cho những bài toán đặc thù. Trong bài báo này, các tác giả sử dụng phương pháp giải tích, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao của Reddy để phân tích tĩnh tấm composite lớp có gắn lớp áp điện, làm phong phú thêm các nghiên cứu cho loại kết cấu này. Kết quả số được so sánh với [5] sử dụng lý thuyết bậc cao 12 ẩn chuyển vị và lời giải chính xác theo [6].

2. Cơ sở lý thuyết và mô hình tính

2.1. Trường chuyển vị và biến dạng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT)

Xét một tấm composite lớp cấu hình vuông góc (cross-ply) kích thước $(a \times b \times h)$, bốn biên tựa khớp, mặt trên tấm có gắn lớp áp điện (PFRC) đóng vai trò kích thích. Hệ trục tọa độ Đề-các xyz được chọn như hình vẽ (Hình 1). Lớp áp điện PFRC có chiều dày t_p .



Hình 1. Kết cấu tấm composite có lớp áp điện PFRC

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba Reddy (TSDT) [10] trường chuyển vị của tấm được giả thiết:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\phi_x - c_1 z^3 (\phi_x + \partial w_0 / \partial x) \\ v(x, y, z) &= v_0 + z\phi_y - c_1 z^3 (\phi_y + \partial w_0 / \partial y) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ trên mặt trung bình của tấm theo các phương x, y, z ; ϕ_x, ϕ_y là góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y, x ;

$$c_1 = (4/3h^2)$$

Các thành phần biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị theo quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \varepsilon_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -c_2 \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Có thể thấy rằng nếu $c_1 = 0$ và $\phi_x = -\partial w_0 / \partial x, \phi_y = -\partial w_0 / \partial y$ ta nhận được trường chuyển vị và biến dạng của lý thuyết tấm cổ điển; khi $c_1 = 0$ ta nhận được trường chuyển vị và biến dạng của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất.

2.2. Phương trình vật lý của lớp vật liệu áp điện

Quan hệ ứng suất - biến dạng của lớp composite áp điện thứ k trong hệ trục tọa độ tấm (x, y, z) được biểu diễn dưới dạng [5]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} - \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó \bar{Q}_{ij} là các hệ số trong ma trận độ cứng vật liệu chuyển đổi và \bar{e}_{ij} các mô đun đàn hồi vật liệu áp điện chuyển đổi được tính theo [10]; $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_i)$ là các thành phần ứng suất, biến dạng cơ học và các thành phần điện trường.

Cường độ điện trường E tính toán thông qua trường điện thế $\xi(x, y, z)$ của lớp áp điện thứ k [5]

$$\{E\}_x^k = -\frac{\partial \xi(x, y, z)^{(k)}}{\partial x}; \{E\}_y^k = -\frac{\partial \xi(x, y, z)^{(k)}}{\partial y}; \{E\}_z^k = -\frac{\partial \xi(x, y, z)^{(k)}}{\partial z} \quad (5)$$

2.3. Các thành phần nội lực

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm ta nhận được các thành phần nội lực cơ, nhiệt và điện của tấm composite có lớp áp điện:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} [N^p] \\ [M^p] \\ [P^p] \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{Q^p\} \\ \{R^p\} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

trong đó

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (7)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^4) dz \quad (i, j = 4, 5)$$

$$\{N^p, M^p, P^p\} = \begin{Bmatrix} N_x^p \\ N_y^p \\ N_{xy}^p \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} (1, z, z^3) dz \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^p \\ Q_{xz}^p \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} dz; \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yz}^p \\ R_{xz}^p \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{e}_{14} & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & \bar{e}_{25} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} z^2 dz$$

2.4. Phương trình cân bằng

Hệ phương trình cân bằng tĩnh được thiết lập theo nguyên lý cực tiểu thế năng toàn phần và có dạng sau [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] + \\ + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) + q &= 0 \\ \frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x &= 0; & \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xx} &= M_{xx} - c_1 P_{xx}; & \bar{M}_{yy} &= M_{yy} - c_1 P_{yy}; & \bar{M}_{xy} &= M_{xy} - c_1 P_{xy}; \\ \bar{Q}_x &= Q_x - 3c_1 R_x; & \bar{Q}_y &= Q_y - 3c_1 R_y \end{aligned} \quad (11)$$

Từ hệ phương trình (10), biểu diễn các thành phần ứng lực theo ứng suất, rồi ứng suất qua biến dạng và cuối cùng là biến dạng qua chuyển vị, ta nhận được hệ phương trình cân bằng theo các thành phần chuyển vị.

2.5. Lời giải giải tích cho tấm composite áp điện sử dụng TSDT

Xét tấm chữ nhật composite lớp áp điện bốn cạnh liên kết khớp, điều kiện biên thể hiện dưới dạng:

- Tại các cạnh $x = 0$ và $x = a$:

$$v_0 = 0, w_0 = 0, \phi_y = 0, N_{xx} = 0, \bar{M}_{xx} = 0, \xi = 0. \tag{12}$$

- Tại các cạnh $y = 0$ và $y = b$:

$$u_0 = 0, w_0 = 0, \phi_x = 0, N_{yy} = 0, \bar{M}_{yy} = 0, \xi = 0. \tag{13}$$

trong đó a và b là kích thước của tấm theo phương x và y .

Sử dụng dạng nghiệm Navier thỏa mãn điều kiện biên (12), (13) cho tấm composite lớp cầu hình vuông góc, có gắn các lớp áp điện (kích thích) như sau:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y; & v_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y; \\ w_0(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y; & \phi_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos \alpha x \sin \beta y; \\ \phi_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \tag{14}$$

trong đó $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ và $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn})$ là các hệ số cần xác định.

Khai triển tải trọng tác dụng $q(x, y)$ và trường điện thế $\xi(x, y)$ dưới dạng chuỗi lượng giác kép:

$$q_z^+ = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} q_{zmn}^+ \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \xi(x, y, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \xi_{mn}(z) \sin \alpha x \sin \beta y \tag{15}$$

Với tải trọng ngoài tác dụng dạng hình sin (xét với $m = n = 1$): $q_{zmn}^+ = q_0$.

Điện thế được giả thiết biến đổi tuyến tính theo chiều dày của lớp áp điện [5]:

$$\xi_{mn} = \left(\frac{V_t}{t_p}\right)z - \left(\frac{V_t h}{2t_p}\right) \quad (V_t \text{ là giá trị điện thế áp đặt lên lớp kích thích}) \tag{16}$$

Thay các biểu thức (14) ÷ (16) vào hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính có dạng:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q_{zmn}^+ \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - V_t \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Các hằng số s_{ij} ma trận độ cứng được biểu diễn theo (18), các hệ số $A_{ij} \div H_{ij}$ xác định theo (19).

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= -(A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2); s_{12} = -(A_{12} + A_{66})\alpha\beta; s_{13} = [E_{11}\alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66})\beta^2]c_1\alpha; \\
 s_{14} &= (c_1E_{11} - B_{11})\alpha^2 + (c_1E_{66} - B_{66})\beta^2; s_{15} = [(E_{66} + E_{12})c_1 - B_{12} - B_{66}]\alpha\beta; \\
 s_{22} &= -(A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2); s_{23} = ((2E_{66} + E_{12})\beta\alpha^2 + E_{22}\beta^3)c_1; s_{24} = s_{15}; \\
 s_{25} &= (E_{66}c_1 - B_{66})\alpha^2 + (E_{22}c_1 - B_{22})\beta^2; s_{33} = ((-2H_{12} - 4H_{66} - H_{22}\beta^2)c_1^2\beta^2 + \\
 &+ 2D_{55}c_2 - F_{55}c_2^2 - A_{55})\alpha^2 + (-F_{44}c_2^2 + 2D_{44}c_2 - A_{44})\beta^2; s_{34} = (-H_{11}c_1^2 + F_{11}c_1)\alpha^3 + \\
 &+ (((-H_{12} - 2H_{66})c_1^2 + (2F_{66} + F_{12})c_1)\beta^2 + 2D_{55}c_2 - F_{55}c_2^2 - A_{55})\alpha; \\
 s_{35} &= ((-H_{12} - 2H_{66})c_1^2 + (2F_{66} + F_{12})c_1)\beta\alpha^2 + (F_{22}c_1 - H_{22}c_1^2)\beta^3 + \\
 &+ (-F_{44}c_2^2 + 2D_{44}c_2 - A_{44})\beta; s_{44} = (-D_{11} - H_{11}c_1^2 + 2F_{11}c_1)\alpha^2 + \\
 &+ (-D_{66} - H_{66}c_1^2 + 2F_{66}c_1)\beta^2 - A_{55} + 2D_{55}c_2 - F_{55}c_2^2; \\
 s_{45} &= ((-H_{66} - H_{12})c_1^2 + (2F_{12} + 2F_{66})c_1 - D_{66} - D_{12})\alpha\beta \\
 s_{55} &= (-D_{66} - H_{66}c_1^2 + 2F_{66}c_1)\alpha^2 + (-H_{22}c_1^2 + 2F_{22}c_1 - D_{22})\beta^2 - F_{44}c_2^2 + 2D_{44}c_2 - A_{44}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Điều kiện để tồn tại nghiệm Navier trong trường hợp tấm có cấu hình phản xứng vuông góc:

$$\begin{aligned}
 A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \\
 E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = D_{45} = F_{45} = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Các thành phần véc tơ điện thế V_i được xác định trong (20)

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\pi e_{31}}{a}; V_2 = \frac{\pi e_{32}}{b}; V_3 = \frac{\pi^2}{6a^2b^2h^2} (-3e_{32}t_p a^2 h^2 - e_{31}h^3 b^2 - e_{32}h^3 a^2 - 3e_{31}t_p b^2 h^2 + \\
 &+ 8e_{15}t_p^2 b^2 h + 6e_{15}t_p^3 b^2 - 4e_{31}t_p^2 b^2 h - 2e_{31}t_p^3 b^2 + 8e_{24}t_p^2 a^2 h + 6e_{24}t_p^3 a^2 - 4e_{32}t_p^2 a^2 h - 2e_{32}t_p^3 a^2); \\
 V_4 &= \frac{\pi (-2e_{31}t_p^2 h + 4e_{15}t_p^2 h + 3e_{15}t_p^3 + e_{31}h^3 - e_{31}t_p^3)}{3ah^2}; \\
 V_5 &= \frac{\pi (-2e_{32}t_p^2 h + 4e_{24}t_p^2 h + 3e_{24}t_p^3 + e_{32}h^3 - e_{32}t_p^3)}{3bh^2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Giải hệ phương trình (17) ta nhận được các hệ số: $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}$, rồi thay vào biểu thức (14) để có các thành phần chuyển vị u_0, v_0, w_0 , từ đó dễ dàng xác định các thành phần biến dạng và ứng suất tương ứng.

3. Kết quả số

Xét tấm composite áp điện cấu hình [p/0/90/0], bốn biên tựa khớp. Tấm chịu tải trọng cơ học ($q_z^+ = 40 \text{ N/m}^2$) và điện thế áp đặt lên mặt trên lớp PFRC với các trường hợp: $V_t = 0 \text{ V}; V_t = +100 \text{ V}; V_t = -100 \text{ V}$ phân bố dạng hình sin ($m = n = 1$), chiều dày mỗi lớp composite là $h_k = 0.1 \text{ mm}$, lớp áp điện có chiều dày $t_p = 0.25 \text{ mm}$.

Các thông số vật liệu của lớp vật liệu composite [6]: $E_1 = 172.9 \text{ GPa}, E_1/E_2 = 25, G_{12} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$.

Các thông số vật liệu của lớp vật liệu của lớp áp điện PFRC [6]: $C_{11} = 32.6 \text{ GPa}, C_{12} = C_{21} = 4.3 \text{ GPa}, C_{13} = C_{31} = 4.76 \text{ GPa}, C_{22} = C_{33} = 7.2 \text{ GPa}, C_{23} = 3.85 \text{ GPa}, C_{44} = 1.05 \text{ GPa}, C_{55} = C_{66} = 1.29 \text{ GPa}, e_{31} = -6.76 \text{ C/m}^2, \eta_{11} = \eta_{22} = 0.037e-9 \text{ C/Vm}, \eta_{33} = 0.037e-9 \text{ C/Vm}$.

Xét tấm chịu tải trọng cơ học ($q_z^+ = 40 \text{ N/m}^2$) và điện thế áp đặt lên mặt trên lớp PFRC với các trường hợp: $V_t = 0 \text{ V}; V_t = +100 \text{ V}; V_t = -100 \text{ V}$.

Các đại lượng khảo sát không thứ nguyên tính theo [6]:

$$\begin{aligned} \bar{u}\left(0, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right) &= \frac{E_2}{q_0 S^3 h} u; & \bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) &= \frac{100 E_2}{q_0 S^4 h} w; \\ \bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2}\right) &= \frac{\sigma_x}{q_0 S^2}; & \bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{6}\right) &= \frac{\sigma_y}{q_0 S^2}; & \bar{\tau}_{xy}\left(0, 0, \pm \frac{h}{2}\right) &= \frac{\tau_{xy}}{q_0 S^2}; \\ \bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) &= \frac{\tau_{yz}}{q_0 S}; & \bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right) &= \frac{\tau_{xz}}{q_0 S} \end{aligned} \quad (21)$$

3.1. Kết quả chuyển vị

Chương trình tính toán các thành phần chuyển vị và ứng suất của tấm composite áp điện được viết trên nền Matlab để tính toán đồng thời theo ba lý thuyết CLPT, FSDT và TSDT. Bảng 1 và Bảng 2 trình bày các kết quả số được kiểm chứng với nghiệm chính xác [6] và nghiệm giải tích [5] theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đầy đủ 12 ẩn số chuyển vị với các tỉ số $a/h = 10; 20$ và 100 .

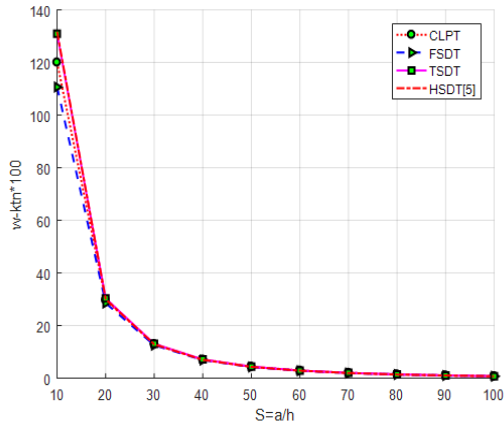
Bảng 1. Chuyển vị màng và độ võng không thứ nguyên \bar{u}, \bar{w} của tấm composite [p/0/90/0] chịu uốn bởi tải trọng cơ học và điện thế áp đặt phân bố dạng hình sin tại mặt trên của lớp PFRC

Theory	$a/h = 10$			$a/h = 20$			$a/h = 100$		
	$V = 0$	$V = +100$	$V = -100$	$V = 0$	$V = +100$	$V = -100$	$V = 0$	$V = +100$	$V = -100$
$\bar{u}(0, b/2, \pm h/2)$									
CLPT (Bài báo)	0.0063 -0.0063	-2.8886 0.8828	2.9012 -0.8953	0.0063 -0.0063	-0.7174 0.2160	0.7300 -0.2285	0.0063 -0.0063	-0.0227 0.0026	0.0352 -0.0152
FSDT (Bài báo)	0.0071 -0.0074	-2.7969 0.8795	2.8110 -0.8942	0.0064 -0.0067	-0.6962 0.2162	0.7090 -0.2296	0.0062 -0.0064	-0.0220 0.0025	0.0343 -0.0154
TSDT (Bài báo)	0.0065 -0.0065	-2.9159 0.9101	2.9290 -0.9231	0.0063 -0.0063	-0.7191 0.2177	0.7318 -0.2303	0.0063 -0.0063	-0.0227 0.0026	0.0352 -0.0152
HSDT [5]	0.0063 -0.0069	-3.1184 0.8789	3.1311 -0.8927	0.0062 -0.0066	-0.7147 0.2168	0.7271 -0.2299	0.0061 -0.0065	-0.0219 0.0025	0.0342 -0.0154
Exact [6]	0.0066 -0.0070	-3.1410 0.8897	3.1542 -0.9038	0.0063 -0.0067	-0.7229 0.2213	0.7356 -0.2346	0.0062 -0.0065	-0.0223 0.0026	0.0346 -0.0157
$w(a/2, b/2, 0)$									
CLPT (Bài báo)	-0.3999	120.0470	-120.8469	-0.3999	29.7118	-30.5117	-0.3999	0.8045	-1.6044
FSDT (Bài báo)	-0.6248	110.7076	-111.9572	-0.4578	28.5823	-29.4979	-0.4027	0.7763	-1.5817
TSDT (Bài báo)	-0.6644	130.9680	-132.2968	-0.4688	30.3444	-31.2820	-0.4027	0.8029	-1.6083
HSDT [5]	-0.6681	129.0550	-130.3910	-0.4711	29.7724	-30.7146	-0.4043	0.7753	-1.5840
Exact [6]	-0.7100	132.9000	-134.3000	-0.4866	30.3370	-31.3100	-0.4089	0.7873	-1.6050

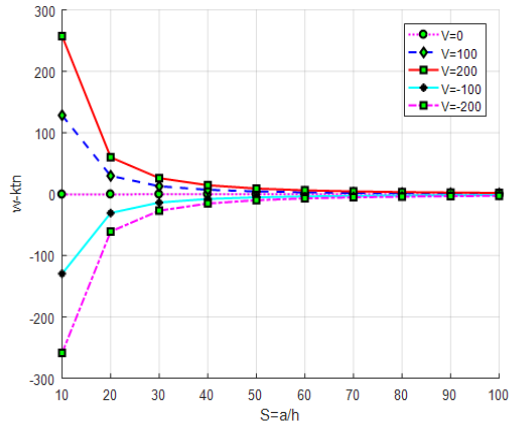
Trong Bảng 1, kết quả chuyển vị \bar{u} và độ võng \bar{w} được tính toán khi tấm composite chịu đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế theo các tỷ số a/h khác nhau. Trường hợp tấm chiều dày trung bình ($a/h = 10$) chuyển vị \bar{u} tính toán theo HSDT [5] cho kết quả gần với nghiệm chính xác (sai số 0.72%) trong khi sai số giữa TSDT và nghiệm chính xác là 7.17%. Độ võng \bar{w} tính theo TSDT và HSDT [5] lại cho sai số so với nghiệm chính xác gần như nhau. Trường hợp tấm mỏng ($a/h = 100$), các kết quả tính theo các lý thuyết CLPT, FSDT (hệ số hiệu chỉnh cắt $k = 5/6$), TSDT, HSDT gần như trùng khớp với nghiệm chính xác.

Đồ thị trên Hình 2 biểu diễn biến thiên của độ võng không thứ nguyên theo tỷ số a/h với trường hợp chỉ chịu điện thế áp đặt $V = +100$ V (không có tải trọng cơ học). Đường biến thiên độ võng - tỉ

số a/h theo lý thuyết tấm cổ điển (CLPT) là đường cong cho thấy độ võng không thứ nguyên tại tâm của tấm phụ thuộc vào tỉ số a/h trong khi nếu chỉ chịu tải trọng cơ học thì đường biến thiên này là đường thẳng [10] (không phụ thuộc vào a/h). Khi tấm dày các đường biểu diễn cách xa nhau, khi tấm càng mỏng các đường biểu diễn càng gần nhau hơn. Điều này cho thấy sự cần thiết phải sử dụng các lý thuyết tấm thích hợp khi tính toán.



Hình 2. Biến thiên độ võng \bar{w} theo tỷ số a/h của tấm composite áp điện [p/0/90/0] tính theo các lý thuyết CLPT, FSDT, TSDT và HSDT



Hình 3. Biến thiên độ võng \bar{w} theo tỷ số a/h của tấm composite áp điện [p/0/90/0] dưới tác dụng của các mức điện thế áp đặt phân bố dạng hình sin

Chênh lệch độ võng \bar{w} của tấm trong trường hợp có điện thế kích thích ($V = +100$ V) so với khi không có điện thế là 450 lần khi $a/h = 10$, 116 lần khi $a/h = 20$ và 6 lần với $a/h = 100$. Điều này cho thấy vai trò kích thích của lớp áp điện với các kết cấu tấm có độ dày khác nhau (Hình 3).

3.2. Kết quả ứng suất

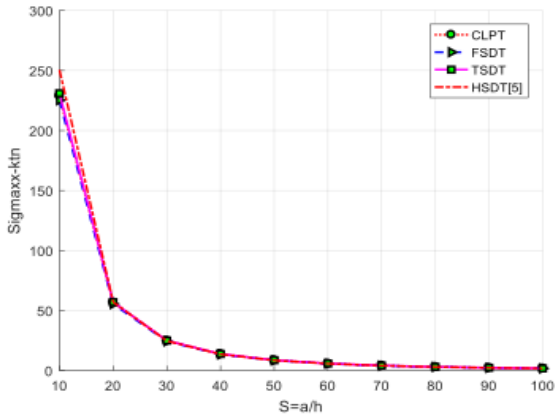
Bảng 2 trình bày kết quả tính toán ứng suất không thứ nguyên khi tấm composite chịu đồng thời của tải trọng cơ học và điện thế theo các tỷ số a/h khác nhau. Các giá trị $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\sigma}_{xy}$ được xác định từ phương trình (4), $\bar{\sigma}_{xz}$, $\bar{\sigma}_{yz}$ xác định từ các phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi [10] theo biểu thức (22).

$$\tau_{xz} = - \sum_{L=1}^n \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz; \quad \tau_{yz} = - \sum_{L=1}^n \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz \quad (22)$$

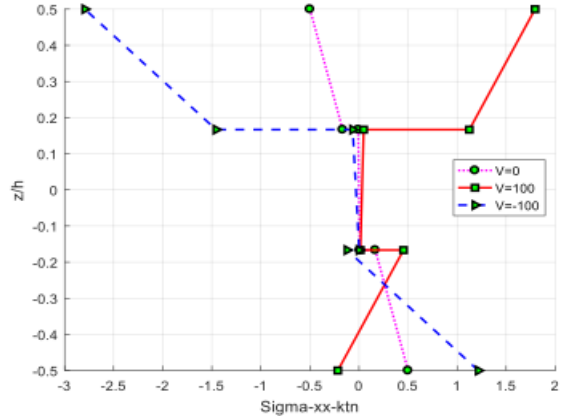
Hình 4 biểu diễn biến thiên của ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_{xx}$ theo tỷ số a/h . Kết quả trên Bảng 2 và đồ thị trên Hình 4 cho thấy sự tương đồng giữa các lý thuyết khi tấm mỏng. Với tấm có chiều dày trung bình ($a/h = 10$) kết quả tính theo TSDT cho sai lệch nhỏ so với tính theo lời giải chính xác. Các Hình 5, Hình 6, và Hình 7 cho thấy nếu cực của điện áp thay đổi, lớp PFRC gây ra sự đảo chiều của các ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\sigma}_{xy}$. Các đồ thị này cũng chỉ ra rằng khi áp đặt một điện thế kích thích làm thay đổi các thành phần ứng suất màng trong tấm so với trường hợp chỉ có tải trọng cơ học. Ứng suất cắt ngang $\bar{\sigma}_{xz}$, $\bar{\sigma}_{yz}$ theo phương chiều dày tại bề mặt trên của lớp tiếp xúc với lớp áp điện không còn bằng không như ở bề mặt dưới của tấm.

Bảng 2. Ứng suất không thứ nguyên ($\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}$) của tấm composite [p/0/90/0] áp điện chịu uốn bởi tải trọng cơ học và điện thế áp đặt phân bố dạng hình sin tại mặt trên của lớp PFRC

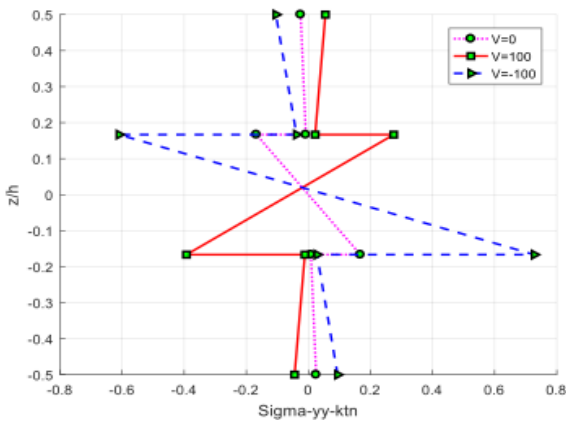
Theory	a/h = 10			a/h = 20			a/h = 100		
	V = 0	V = +100	V = -100	V = 0	V = +100	V = -100	V = 0	V = +100	V = -100
$\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, \pm h/2)$									
CLPT (Bài báo)	-0.4996 0.4996	228.8587 -71.0573	-229.8578 72.0565	-0.4996 0.4996	56.8400 -17.3896	-57.8392 18.3888	-0.4996 0.4996	1.7940 -0.2160	-2.7932 1.2152
FSDT (Bài báo)	-0.4633 0.4850	225.2644 -74.4478	-226.1911 75.4179	-0.4816 0.5044	55.4269 -17.6749	-56.3902 18.6837	-0.4882 0.5114	1.7406 -0.2078	-2.7170 1.2306
TSDT (Bài báo)	-0.5203 0.5203	231.0224 -73.2210	-232.0630 74.2617	-0.5045 0.5045	56.9723 -17.5220	-57.9814 18.5311	-0.4998 0.4998	1.7940 -0.2160	-2.7936 1.2156
HSDT [5]	-0.5075 0.5516	247.5430 -70.7688	-248.5580 71.8720	-0.4933 0.5239	56.7572 -17.4131	-57.7437 18.4609	-0.4887 0.5144	1.7380 -0.2048	-2.7154 1.2336
Exact [6]	-0.5281 0.5623	248.7600 -71.6660	-249.8200 72.7900	-0.5035 0.5305	57.2690 -17.8100	-58.2760 18.8750	-0.4948 0.5193	1.7549 -0.2181	-2.7445 1.2566
$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, \pm h/2)$									
CLPT (Bài báo)	-0.1665 0.1665	44.0862 -55.8858	-44.4193 56.2188	-0.1665 0.1665	10.8967 -13.8465	-11.2297 14.1796	-0.1665 0.1665	0.2760 -0.3940	-0.6091 0.7271
FSDT (Bài báo)	-0.2284 0.2404	34.3220 -47.9839	-34.7788 48.4647	-0.1806 0.1897	9.8205 -13.3148	-10.1818 13.6942	-0.1635 0.1715	0.2562 -0.3896	-0.5831 0.7325
TSDT (Bài báo)	-0.2481 0.2481	42.7177 -54.5173	-43.2138 55.0134	-0.1894 0.1894	10.7919 -13.7418	-11.1706 14.1205	-0.1675 0.1675	0.2749 -0.3929	-0.6099 0.7279
HSDT [5]	-0.2373 0.2626	39.4075 -56.2713	-39.8821 56.7966	-0.1811 0.1996	9.9600 -14.0978	-10.3222 14.4970	-0.1600 0.1761	0.2478 -0.3971	-0.5679 0.7492
Exact [6]	-0.2571 0.2799	42.5320 -57.6670	-43.0460 58.2270	-0.1901 0.2044	10.4590 -14.1600	-10.8400 14.5660	-0.1643 0.1758	0.2596 -0.3955	-0.5882 0.7470
$\bar{\sigma}_{xy}(0, 0, \pm h/2)$									
CLPT (Bài báo)	0.0197 -0.0197	-7.3660 4.4821	7.4055 -4.5216	0.0197 -0.0197	-1.8267 1.1057	1.8662 -1.1452	0.0197 -0.0197	-0.0541 0.0253	0.0936 -0.0648
FSDT (Bài báo)	0.0229 -0.0236	-6.7532 4.0441	6.7991 -4.0913	0.0204 -0.0210	-1.7458 1.0691	1.7866 -1.1112	0.0195 -0.0201	-0.0522 0.0246	0.0912 -0.0648
TSDT (Bài báo)	0.0255 -0.0255	-7.4355 4.5516	7.4865 -4.6026	0.0213 -0.0213	-1.8298 1.1089	1.8724 -1.1514	0.0198 -0.0198	-0.0541 0.0252	0.0937 -0.0648
HSDT [5]	0.0247 -0.0264	-7.5662 4.5282	7.6157 -4.5811	0.0208 -0.0219	-1.7913 1.1055	1.8329 -1.1493	0.0194 -0.0203	-0.0519 0.0246	0.0907 -0.0652
Exact [6]	0.0261 -0.0276	-7.6960 4.6190	7.7480 -4.6740	0.0215 -0.0224	-1.8220 1.1232	1.8648 -1.1679	0.0197 -0.0204	-0.0527 0.0251	0.0922 -0.0660
$\bar{\sigma}_{xz}(0, b/2, 0)$									
CLPT (Bài báo)	-0.3664	23.4825	-24.2154	-0.3664	5.5958	-6.3287	-0.3664	-0.1280	-0.6049
FSDT (Bài báo)	-0.3637	26.8483	-27.5757	-0.3753	6.0951	-6.8458	-0.3795	-0.1255	-0.6336
TSDT (Bài báo)	-0.3357	23.1597	-23.8312	-0.3581	5.5822	-6.2984	-0.3661	-0.1276	-0.6046
HSDT [5]	-0.3530	23.0262	-23.7322	-0.3747	-	-	-0.3825	-0.1241	-0.6409
Exact [6]	-0.3448	23.6090	-24.2980	-0.3833	0.6819	-1.4485	-0.3847	-0.1174	-0.6520
$\bar{\sigma}_{yz}(a/2, 0, 0)$									
CLPT (Bài báo)	-0.0764	23.1991	-23.3519	-0.0764	5.7425	-5.8952	-0.0764	0.1564	-0.3091
FSDT (Bài báo)	-0.1064	20.4339	-20.6468	-0.0867	5.6121	-5.7855	-0.0796	0.1565	-0.3157
TSDT (Bài báo)	-0.1075	22.7326	-22.9476	-0.0851	5.7061	-5.8762	-0.0767	0.1560	-0.3094
HSDT [5]	-0.1160	23.9406	-24.1725	-0.0914	-	-	-0.0823	0.1609	-0.3256
Exact [6]	-0.1211	24.0650	-24.3070	-0.0832	0.8814	-1.0478	-0.0818	0.1593	-0.3228



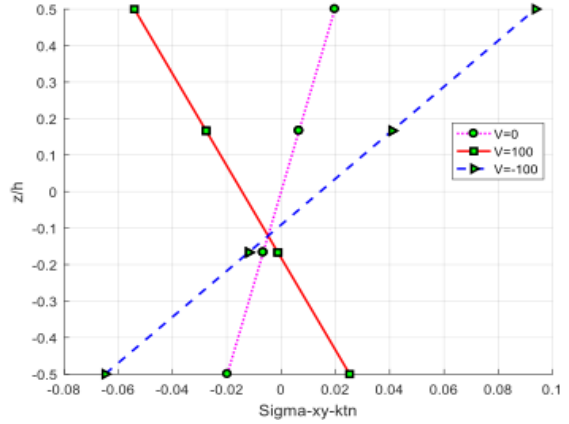
Hình 4. Thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$ biến thiên theo tỷ số a/h



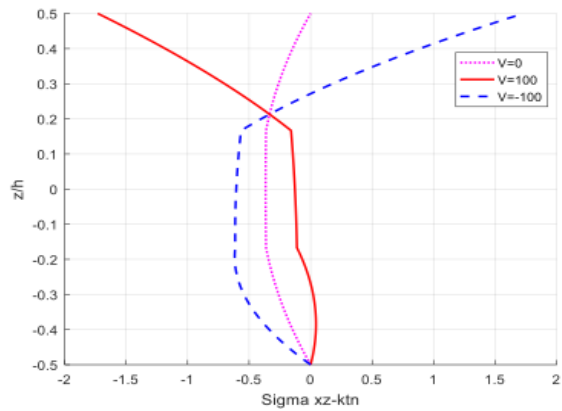
Hình 5. Phân bố thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{xx}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ theo tọa độ chiều dày tấm



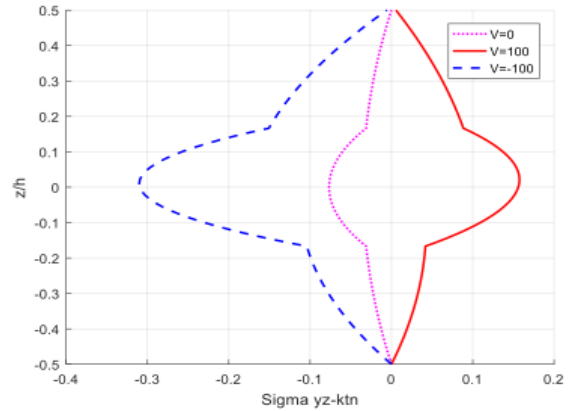
Hình 6. Phân bố thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ theo tọa độ chiều dày tấm



Hình 7. Phân bố thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{xy}(0, 0)$ theo tọa độ chiều dày tấm



Hình 8. Phân bố thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}\right)$ theo tọa độ chiều dày tấm



Hình 9. Phân bố thành phần ứng suất $\bar{\sigma}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ theo tọa độ chiều dày tấm

4. Kết luận

Trong bài báo này, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao của Reddy được sử dụng để phân tích tĩnh kết cấu tấm composite có gắn lớp composite cốt sợi áp điện PFRC (piezoelectric fiber-reinforced composite) đóng vai trò kích thích. Có thể thấy rằng chiều của điện thế áp đặt lên lớp PFRC sẽ có tác dụng tăng thêm hay giảm bớt biến dạng gây ra bởi tải trọng cơ học. Lớp PFRC khi được kích hoạt sẽ ảnh hưởng đến sự phân bố của ứng suất theo chiều dày tấm. Ảnh hưởng của điện thế áp đặt đến độ võng của tấm dày là rõ rệt hơn so với tấm mỏng.

Các ví dụ số cũng cho thấy hiệu quả của lý thuyết tấm bậc ba đơn giản của Reddy với số ẩn chuyển vị ít hơn (5 ẩn) nhưng vẫn cho kết quả phù hợp với kết quả tính theo lý thuyết đàn hồi [6] và theo lý thuyết HSDT - 12 ẩn chuyển vị [5]. Mô hình này sẽ là một lựa chọn tốt cho các bài toán phân tích và tối ưu kết cấu composite áp điện.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lee, C. K. (1990). [Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships.](#) *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(3):1144–1158.
- [2] Wang, B. T., Rogers, C. A. (1991). [Laminate plate theory for spatially distributed induced strain actuators.](#) *Journal of Composite Materials*, 25(4):433–452.
- [3] Jonnalagadda, K. D., Blandford, G. E., Tauchert, T. R. (1994). [Piezothermoelastic composite plate analysis using first-order shear deformation theory.](#) *Computers & Structures*, 51(1):79–89.
- [4] Mitchell, J. A., Reddy, J. N. (1995). [A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae.](#) *International Journal of Solids and Structures*, 32(16):2345–2367.
- [5] Shiyekar, S. M., Kant, T. (2011). [Higher order shear deformation effects on analysis of laminates with piezoelectric fibre reinforced composite actuators.](#) *Composite Structures*, 93(12):3252–3261.
- [6] Mallik, N., Ray, M. C. (2004). [Exact solutions for the analysis of piezoelectric fiber reinforced composites as distributed actuators for smart composite plates.](#) *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 1(4):347–364.
- [7] Thinh, T. I., Ngoc, L. K. (2008). [Static and dynamic analysis of laminated composite plates with integrated piezoelectrics.](#) *Vietnam Journal of Mechanics*, 30(1):55–66.
- [8] Ngoc, L. K., Thinh, T. I. (2009). [Optimum problem of piezoelectric laminated composite plate using genetic algorithm.](#) *Vietnam Journal of Mechanics*, 31(2):87–96.
- [9] Lê, K. N. (2010). [Tính toán tĩnh và dao động của kết cấu tấm composite áp điện.](#) Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.
- [10] Reddy, J. N. (2004). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis.* CRC Press.